Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2014, т. 40, № 9, с. 1021–1027

Гидродинамика нормальной и сверхтекучей полярных жидкостей. Распространение звука

Ю.М. Полуэктов

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: yuripoluektov@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 3 марта 2014 г., опубликована онлайн 21 июля 2014 г.

В рамках феноменологического подхода получены уравнения гидродинамики нормальной и сверхтекучей жидкостей, обладающих спонтанной электрической поляризацией. Показано, что распространение звуковых волн в средах со спонтанной поляризацией сопровождается колебаниями электрического поля. Вычислены поправки к скоростям первого и второго звуков в нормальной и сверхтекучей полярных жидкостях.

У рамках феноменологічного підходу отримані рівняння гідродинаміки нормальної та надплинної рідин, що мають спонтанну електричну поляризацію. Показано, що поширення звукових хвиль у середовищах зі спонтанною поляризацією супроводжується коливаннями електричного поля. Обчислено поправки до швидкостей першого та другого звуків в нормальній і надплинній полярних рідинах.

PACS: **67.10.–j** Квантовые жидкости: основные свойства;
67.25.D– Сверхтекучая фаза ^{4}He;
47.37.+q Гидродинамические аспекты сверхтекучести, квантовые жидкости;
47.35.Rs Звуковые волны.

Ключевые слова: поляризация, дипольный момент, нормальная жидкость, сверхтекучесть, первый и второй звуки.

1. Введение

Исследованию незаряженных диэлектрических жидкостей в электромагнитных полях посвящено большое число работ [1–3]. Практически во всех таких работах предполагается, что взаимодействие диэлектрика с электрическим полем возникает в результате поляризации среды, причем вектор индукции считается пропорциональным напряженности поля: $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, где ε — диэлектрическая проницаемость среды, зависящая от ее термодинамических характеристик. Такая зависимость предполагает, что $\mathbf{D}$ обращается в нуль одновременно с $\mathbf{E}$. Однако это, вообще говоря, не обязательно. Так, в [4] в примечании на стр. 58 отмечается, что «...это, строго говоря, справедливо лишь в однородных по своим физическим свойствам (составу, температуре и т.п.) диэлектриках. В неоднородных телах $\mathbf{D}$ может иметь отличные от нуля значения и при $\mathbf{E} = 0$, определяясь при этом градиентами меняющихся вдоль тела термодинамических величин». Существование спонтанной поляризации и отличной от нуля индукции $\mathbf{D}_0$, в принципе, возможно и в пространственно-однородной жидкости. Такая жидкость напоминает пироэлектрические кристаллы [4], в частности сегнетоэлектрики [5], хотя физическая природа возникновения поляризации в твердом теле и жидкости различна. Существование $\mathbf{D}_0$ в твердых телах определяется симметрией и возможно в кристаллах, у которых существует направление, остающееся неизменным при всех преобразованиях симметрии кристалла. В жидкости появление поляризации может быть вызвано спонтанным нарушением симметрии относительно вращений в координатном пространстве, в результате чего жидкость приобретает анизотропные свойства, как это имеет место, например, в жидких кристаллах и сверхтекучем гелии-3. Величина $\mathbf{D}_0$ всегда мала, поскольку приводит к существованию полей в среде, что энергетически невыгодно. В жидкости увеличение энергии при появлении спонтанной поляризации может, как это обсуждается в [6], компенсироваться понижением энергии электронов в атоме при его спонтанной поляризации, т.е. возникновением у атома, находящегося в среде, собственного дипольного момента даже в том случае, если изолированный атом дипольным моментом не обладает. В работе [6] приводятся аргументы в пользу того, что в жидком гелии при температуре, на несколько тысячных долей градуса превышающей температуру перехода в сверхтекучее состояние, при которой плотность и диэлектрическая проницаемость достигают максимума, может происходить переход в поляризованное состояние. Появление спонтанного дипольного момента у атома в жидком гелии позволяет, по крайне мере качественно, объяснить повышенную электрическую активность в волне второго звука, о наблюдении которой сообщалось в работе [7]. Явление спонтанной поляризации в жидкости должно быть очень слабым, но его учет может приводить к качественно новым эффектам и, следовательно, имеет смысл теоретическое исследование этого явления.

В данной работе в рамках феноменологического подхода получены уравнения гидродинамики нормальной и сверхтекучей жидкостей, обладающих спонтанной поляризацией, которые естественно называть полярными. Рассмотрено распространение звука в таких жидкостях и показано, что распространение малых колебаний в них сопровождается колебаниями электрического поля. Скорости звука получают малые анизотропные добавки, зависящие от угла между направлением распространения звука и направлением вектора спонтанной поляризации. Амплитуда колебаний электрического поля и поправка к скорости в первом звуке определяются производной от вектора спонтанной индукции по плотности, а во втором звуке — производной от вектора спонтанной индукции по температуре.

2. Уравнения гидродинамики полярной нормальной жидкости

Получим вначале уравнения гидродинамики жидкости, не проявляющей сверхтекучих свойств, в предположении, что среда может обладать спонтанной поляризацией $\mathbf{P}_0$ также в отсутствие электрического поля, так что вектор индукции имеет вид

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \varepsilon \mathbf{E}, \tag{1}$$

где $\mathbf{D}_0 = 4\pi \mathbf{P}_0$, ε — диэлектрическая проницаемость. Величина вектора спонтанной индукции $\mathbf{D}_0$ при феноменологическом подходе предполагается заданной функцией термодинамических переменных, например плотности ρ и температуры T, а направление определяется электрическим полем и граничными условиями. Таким образом, электрические свойства среды характеризуются двумя величинами: диэлектрической проницаемостью ε и величиной спонтанной индукции D_0.

Для описания электрических свойств жидкостей, движущихся со скоростями много меньшими скорости света c, воспользуемся уравнениями Максвелла в так называемом нерелятивистском электрическом приближении [3]:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{2}$$

где вектор индукции $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$, а $\mathbf{P}$ — вектор поляризации. Предполагается, что отсутствуют сторонние заряды и токи и среда не обладает магнитными свойствами: $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Электромагнитных волн в данном приближении нет. Вектор объемной плотности потока электромагнитной энергии в этом приближении имеет обычный вид, а собственным импульсом электромагнитное поле не обладает. В нерелятивистском электрическом приближении изменяющееся магнитное поле не порождает никакого электрического поля, однако учитывается обратный эффект — электрическое поле порождает магнитное поле. Приближенные уравнения (2) инвариантны относительно преобразований Галилея [3].

Уравнения гидродинамики такой среды можно получить аналогично тому, как выводятся уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости [8], используя законы сохранения и термодинамические тождества. Приведем вначале термодинамические соотношения, которые необходимы для вывода уравнений гидродинамики. Дифференциал внутренней энергии единицы объема покоящейся жидкости с учетом ее поляризации имеет вид [4]

$$dU = TdS + \zeta d\rho + \frac{\mathbf{E}}{4\pi} d\mathbf{D}, \tag{3}$$

где S — энтропия единицы объема, ζ — химический потенциал. Предполагается, что среда обладает спонтанной поляризацией $\mathbf{P}_0$ и в отсутствие электрического поля, так что вектор индукции имеет вид (1). Определим давление как производную от полной внутренней энергии жидкости по объему при постоянных полных массе, энтропии и индукции:

$$p = -\frac{\partial (UV)}{\partial V} = -U + TS + \rho\zeta + \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{4\pi}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) для химического потенциала получаем термодинамическое тождество

$$d\zeta = \frac{1}{\rho} dp - \sigma dT - \frac{\mathbf{D}}{4\pi\rho} d\mathbf{E}, \tag{5}$$

где $\sigma = S/\rho$ — энтропия единицы массы. В дальнейшем в качестве независимых термодинамических переменных, как правило, будем использовать плотность ρ и температуру T и вместо внутренней энергии введем термодинамический потенциал

$$\tilde{F} = U - TS - \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{4\pi} = -p + \rho\zeta. \tag{6}$$

Тогда для соответствующего термодинамического потенциала единицы массы $\tilde{f} = \tilde{F}/\rho$ получаем тождество

$$d\tilde{f} = \frac{p}{\rho^2} d\rho - \sigma dT - \frac{\mathbf{D}}{4\pi\rho} d\mathbf{E}. \qquad (7)$$

Из (7) следуют соотношения для производных

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{E}} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\mathbf{D}}{\rho}\right), \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial T}, \qquad (8)$$

которые позволяют найти зависимости энтропии σ и давления p от электрического поля:

$$\sigma(\rho, T, \mathbf{E}) = \sigma_0(\rho, T) + \left(\frac{\partial\mathbf{D}_0}{\partial T}\right)_\rho \frac{\mathbf{E}}{4\pi\rho} + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi\rho}, \qquad (9)$$

$$p(\rho, T, \mathbf{E}) = p_0(\rho, T) - \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\mathbf{D}_0}{\rho}\right)_T \frac{\mathbf{E}}{4\pi} - \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)_T \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}, \qquad (10)$$

где $p_0(\rho, T)$, $\sigma_0(\rho, T)$ — давление и энтропия единицы массы в отсутствие спонтанной поляризации и электрического поля. Как видим, наличие спонтанной индукции приводит к появлению линейной зависимости этих величин от электрического поля.

Полная энергия единицы объема жидкости, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, имеет вид

$$E = \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} + U(\rho, S, \mathbf{D}). \qquad (11)$$

Выражение для внутренней энергии при справедливости формулы (1) для индукции может быть найдено в результате интегрирования соотношения (3):

$$U(\rho, S, \mathbf{D}) = U_0(\rho, S) + \frac{(\mathbf{D}^2 - 2\mathbf{D}_0\mathbf{D})}{8\pi\varepsilon}, \qquad (12)$$

где $U_0(\rho, S)$ — внутренняя энергия в отсутствие поля и поляризации.

Перейдем к выводу уравнений гидродинамики нормальной полярной жидкости. В данном случае законы сохранения массы, импульса и энтропии имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(S\mathbf{v}) = 0, \qquad (13)$$

где $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ — плотность потока массы, совпадающая с плотностью импульса, $\mathbf{f}$ — сила, действующая на единицу объема жидкости со стороны поля. Тензор потока импульса имеет обычную форму $\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + \rho\upsilon_i\upsilon_j$, причем давление определено формулой (4).

Требование выполнения закона сохранения энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{Q} = 0, \qquad (14)$$

с учетом приведенных выше термодинамических тождеств и законов сохранения (13), позволяет получить выражения для плотности потока энергии

$$\mathbf{Q} = \rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \zeta + \sigma T\right) + \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}] \qquad (15)$$

и силы

$$f_j = \frac{D_i}{4\pi}\frac{\partial E_i}{\partial x_j}. \qquad (16)$$

Отметим, что определение этой силы, вообще говоря, неоднозначно, а имеет смысл только при заданном определении тензора потока импульса. Действительно, если вместо тензора σ_{ij} введем тензор $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + g\delta_{ij}$, где g — произвольная функция, то уравнение сохранения импульса не изменится, если провести замену f_i на $f'_i = f_i + \partial g/\partial x_i$.

Соотношения (9), (10), (16) позволяют записать уравнение движения для полярной жидкости, обладающей спонтанной поляризацией, в виде

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla p_0 - \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}\nabla\varepsilon + \nabla\left[\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right] -$$

$$-\frac{\mathbf{E}}{4\pi}\nabla\mathbf{D}_0 + \nabla\left[\frac{\mathbf{E}}{4\pi}\rho\left(\frac{\partial\mathbf{D}_0}{\partial\rho}\right)_T\right]. \qquad (17)$$

Квадратичные по полю слагаемые в (17) дают объемную силу в диэлектрике в форме Гельмгольца, которая в ином подходе выведена, например, в [4]. Наличие спонтанной поляризации приводит к появлению в выражении для силы дополнительных, линейных по электрическому полю, слагаемых.

Поскольку в используемом приближении (2) электрическое поле потенциально, может быть введен электрический потенциал Φ и электрическое поле представлено в виде $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. С учетом этого из (2) следует уравнение

$$\operatorname{div}\mathbf{D}_0 - \Delta(\varepsilon\Phi) = 0, \qquad (18)$$

определяющее связь между электрическим потенциалом и спонтанной поляризацией. В дальнейшем при изучении распространения звука также будем пренебрегать эффектами, связанными с существованием магнитного поля, полагая $c \to \infty$. Таким образом, из уравнений Максвелла необходимо учитывать только два первых в (2), которые эквивалентны (18). Поскольку фактически используются уравнения электростатики, изменение вектора $\mathbf{D}_0$ обусловлено только изменением термодинамических переменных, а собственной динамики он не имеет. Изменение направления вектора спонтанной индукции может быть вызвано либо электрическим полем, либо за счет влияния граничных эффектов.

3. Звук в нормальной полярной жидкости

Рассмотрим распространение малых колебаний в нормальной жидкости в условиях, когда в равновесном состоянии вектор спонтанной поляризации имеет направление вдоль единичного вектора $\mathbf{n}$, так что $\mathbf{D}_0(\rho,T) = D_0(\rho,T)\mathbf{n}$. Предполагается, что малые флуктуации вектора спонтанной индукции $\mathbf{D}_0$ обусловлены флуктуациями термодинамических переменных, например плотности и температуры, и он меняется только по величине, но не по направлению. Линеаризованная система гидродинамических уравнений имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0,$$
$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{\partial D_0}{\partial\rho}\right)_T \nabla E_{\|}, \tag{19}$$

где $E_{\|} = \mathbf{nE} = -\mathbf{n}\nabla\Phi$. Из (18) и (19) находим систему уравнений для малых колебаний плотности $\rho' = \rho - \rho_0$, температуры $T' = T - T_0$ и электрического потенциала Φ:

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p_0}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho' - \left(\frac{\partial p_0}{\partial T}\right)_\rho \Delta T' - \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{\partial D_0}{\partial\rho}\right)_T (\mathbf{n}\nabla)\Delta\Phi = 0, \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\rho}\right)_T \frac{\partial\rho'}{\partial t} + \left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial T}\right)_\rho \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial D_0}{\partial T}\right)_\rho (\mathbf{n}\nabla)\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0, \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial D_0}{\partial\rho}\right)_T (\mathbf{n}\nabla)\rho' + \left(\frac{\partial D_0}{\partial T}\right)_\rho (\mathbf{n}\nabla)T' - \varepsilon\Delta\Phi = 0. \tag{22}$$

Ищем решения такой системы уравнений в виде $\rho', T', \Phi \sim \exp i(\mathbf{kr} - \omega t)$. С помощью (22) потенциал может быть исключен из уравнений (20), (21) и получена система линейных уравнений для флуктуаций плотности и температуры

$$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T + \rho a_\rho - u^2\right]\rho' + \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho + \rho a_{\rho T}\right]T' = 0, \tag{23}$$

$$\left[\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\rho}\right)_T - \frac{a_{\rho T}}{\rho}\right]\rho' + \left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_\rho - \frac{a_T}{\rho}\right]T' = 0, \tag{24}$$

где $u^2 = \omega^2/k^2$. В (23), (24) использованы обозначения

$$a_\rho \equiv \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial D_0}{\partial\rho}\right)_T^2, \quad a_T \equiv \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial D_0}{\partial T}\right)_\rho^2,$$
$$a_{\rho T} \equiv \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial D_0}{\partial\rho}\right)_T \left(\frac{\partial D_0}{\partial T}\right)_\rho, \tag{25}$$

где $\gamma \equiv \cos^2\theta$, причем $\cos\theta \equiv \mathbf{n}\cdot\mathbf{s}$, а $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ — единичный вектор вдоль распространения звуковой волны. Заметим также, что $a_\rho a_T - a_{\rho T}^2 = 0$. В результате, воспользовавшись некоторыми термодинамическими тождествами, для квадрата скорости звука находим

$$u^2 = u_0^2 + \rho a_\rho + a_T \frac{u_0^2 T}{\rho c_V}\left(1 - \frac{c_V}{c_p}\right) - 2a_{\rho T}\frac{u_0^2 T}{\rho c_V}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p, \tag{26}$$

где $u_0^2 = (\partial p/\partial\rho)_\sigma$ — квадрат скорости звука в жидкости без спонтанной поляризации, $c_V = T(\partial\sigma/\partial T)_\rho$, $c_p = T(\partial\sigma/\partial T)_p$ — теплоемкости при постоянном объеме и давлении. В пренебрежении обычно малым коэффициентом теплового расширения $(\partial\sigma/\partial T)_p$, когда $c_V \approx c_p$, имеем

$$u^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_\sigma + \frac{\rho}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial D_0}{\partial\rho}\right)_T^2 \cos^2\theta, \tag{27}$$

так что поправка к скорости звука, возникающая вследствие наличия спонтанной поляризации, определяется квадратом производной $(\partial D_0/\partial\rho)_T$ и зависит от угла, под которым распространяется звук. Она максимальна, если звук распространяется по направлению поляризации $\mathbf{n}$ и обращается в нуль, если $\mathbf{s} \perp \mathbf{n}$.

4. Уравнения гидродинамики полярной сверхтекучей жидкости

Феноменологический вывод уравнений двухскоростной гидродинамики при наличии спонтанной поляризации осуществляется по той же схеме, с использованием законов сохранения и принципа относительности Галилея, как и в отсутствие поляризации [8], с теми изменениями, которые были использованы в разд. 2 при выводе гидродинамических уравнений полярной нормальной жидкости. В данном случае дифференциал внутренней энергии единицы объема сверхтекучей жидкости в системе отсчета, где $\mathbf{v}_s = 0$, равен

$$dU = TdS + \zeta d\rho + \mathbf{w}d\mathbf{j}_0 + \frac{\mathbf{E}d\mathbf{D}}{4\pi}, \tag{28}$$

где $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, $\mathbf{j}_0 = \rho_n\mathbf{w}$, ρ_n — нормальная плотность, $\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_s$ — нормальная и сверхтекучая скорости. Зависимость внутренней энергии от электрического поля дается формулой (12). С учетом определения давления

$$p = -U + TS + \rho\zeta + \mathbf{wj}_0 + \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{4\pi} \tag{29}$$

получаем термодинамическое тождество для химического потенциала

$$d\zeta = \frac{1}{\rho}dp - \sigma dT - \frac{\mathbf{j}_0}{\rho}d\mathbf{w} - \frac{\mathbf{D}}{4\pi\rho}d\mathbf{E}. \tag{30}$$

Для перехода к независимым переменным $\rho, T, w^2, \mathbf{E}$ более удобным является использование термодинамического потенциала $\tilde{f} = \zeta - p/\rho$, для которого

$$d\tilde{f} = \frac{p}{\rho^2}d\rho - \sigma dT - \frac{\rho_n}{2\rho}d\mathbf{w}^2 - \frac{\mathbf{D}}{4\pi\rho}d\mathbf{E}. \qquad (31)$$

Тождества (30), (31) позволяют найти зависимости от $\mathbf{w}$ и $\mathbf{E}$ давления, энтропии и химического потенциала:

$$p\left(\rho, T, w^2, \mathbf{E}\right) = p_0(\rho, T) - \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right)_T \frac{w^2}{2} -$$

$$- \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\mathbf{D}_0}{\rho}\right)_T \frac{\mathbf{E}}{4\pi} - \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)_T \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}, \qquad (32)$$

$$\sigma\left(\rho, T, w^2, \mathbf{E}\right) = \sigma_0(\rho, T) + \frac{w^2}{2\rho}\left(\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right)_\rho +$$

$$+ \left(\frac{\partial\mathbf{D}_0}{\partial T}\right)_\rho \frac{\mathbf{E}}{4\pi\rho} + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi\rho}, \qquad (33)$$

$$\zeta\left(p, T, w^2, \mathbf{E}\right) = \zeta_0(p, T) - \frac{\rho_n}{\rho}\frac{w^2}{2} - \frac{\mathbf{D}_0\mathbf{E}}{4\pi\rho} - \frac{\varepsilon\mathbf{E}^2}{8\pi\rho}. \qquad (34)$$

Здесь $p_0(\rho, T)$, $\sigma_0(\rho, T)$, $\zeta_0(p, T)$ — давление, энтропия единицы массы и химический потенциал в отсутствие относительной скорости, спонтанной поляризации и электрического поля. Возможной зависимостью ρ_n, ε, $\mathbf{D}_0$ от относительной скорости $\mathbf{w}$ и зависимостью ρ_n от поля $\mathbf{E}$ будем пренебрегать, полагая скорости малыми, а электрическое поле достаточно слабым.

Законы сохранения в данном случае имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \qquad \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(S\mathbf{v}_n) = 0, \qquad \frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla\left(\zeta + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2}\right) = 0, \qquad (35)$$

где также добавлено уравнение для сверхтекучей скорости, обеспечивающее выполнение условия $\operatorname{rot}\mathbf{v}_s = 0$, а плотность потока массы, равная плотности импульса, есть $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0 = \rho_s\mathbf{v}_s + \rho_n\mathbf{v}_n$. Требование выполнения закона сохранения энергии (14) позволяет определить выражения для всех неизвестных величин, входящих в уравнения (35). Тензор потока импульса имеет такой же вид, как в обычной двухскоростной гидродинамике [8]:

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + \rho_n \upsilon_{ni}\upsilon_{nj} + \rho_s \upsilon_{si}\upsilon_{sj}, \qquad (36)$$

а сила, в правой части уравнения сохранения импульса, такая же, как в случае нормальной жидкости (16) $f_j = (D_i/4\pi)(\partial E_i/\partial x_j)$. Плотность потока энергии имеет вид

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{v_s^2}{2} + \zeta\right)\mathbf{j} + ST\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_n(\mathbf{v}_n\mathbf{j}_0) + \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]. \qquad (37)$$

Подставляя в уравнения (35) выражения для давления (32), энтропии (33) и химического потенциала (34), получаем полную систему гидродинамики полярной сверхтекучей жидкости. Уравнение непрерывности имеет тот же вид, что в (35), а уравнения сохранения импульса, энтропии и сверхтекучей скорости с точностью до величин порядка w^2 принимают вид

$$\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} = -\mathbf{v}_n \operatorname{div}(\rho_n\mathbf{v}_n) - \mathbf{v}_s \operatorname{div}(\rho_s\mathbf{v}_s) -$$

$$-\rho_n(\mathbf{v}_n\nabla)\mathbf{v}_n - \rho_s(\mathbf{v}_s\nabla)\mathbf{v}_s -$$

$$-\nabla\left[p_0 - \frac{\rho_n^2 w^2}{2}\right] - \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}\nabla\varepsilon + \nabla\left[\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right] -$$

$$-\frac{\mathbf{E}}{4\pi}\nabla\mathbf{D}_0 + \nabla\left[\frac{\mathbf{E}}{4\pi}\rho\left(\frac{\partial\mathbf{D}_0}{\partial\rho}\right)_T\right], \qquad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[S_0 + \frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right)_\rho + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} + \left(\frac{\partial\mathbf{D}_0}{\partial T}\right)_\rho \frac{\mathbf{E}}{4\pi}\right] +$$

$$+\operatorname{div}\left\{\mathbf{v}_n\left[S_0 + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} + \left(\frac{\partial\mathbf{D}_0}{\partial T}\right)_\rho \frac{\mathbf{E}}{4\pi}\right]\right\} = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla\left[\zeta_0 + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} - \frac{\rho_n w^2}{2\rho} - \frac{\mathbf{D}_0\mathbf{E}}{4\pi\rho} - \frac{\varepsilon\mathbf{E}^2}{8\pi\rho}\right] = 0, \quad (40)$$

где $S_0 = \sigma_0\rho$. К этим уравнением следует добавить уравнение Максвелла, определяющее связь между электрическим потенциалом и спонтанной поляризацией:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}_0 = -\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E} - \mathbf{E}\nabla\varepsilon. \qquad (41)$$

Поскольку в используемом приближении для уравнений Максвелла электрическое поле потенциально, удобно представить напряженность в виде $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$.

5. Звук в сверхтекучей полярной жидкости

Рассмотрим, как модифицируются звуковые моды в сверхтекучем гелии при наличии спонтанной поляризации. Линеаризованная система уравнений двухскоростной гидродинамики (38)–(40) имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \qquad \frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} = -\nabla p + \mathbf{f},$$

$$\rho\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \sigma\operatorname{div}\mathbf{j} + \sigma\rho\operatorname{div}\mathbf{v}_n = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla\zeta = 0. \quad (42)$$

Проделав стандартные выкладки [8], получаем из (42) уравнения

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - \Delta p - \frac{D_0}{4\pi}\nabla\Delta\Phi = 0, \qquad \frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = \frac{\sigma^2\rho_s}{\rho_n}\Delta T. \quad (43)$$

Кроме того, из (41) следует

$$(\mathbf{n}\nabla)D_0 - \varepsilon\Delta\Phi = 0. \qquad (44)$$

Выбирая в качестве независимых переменных плотность и температуру, получаем систему линейных уравнений для определения ρ', T', Φ:

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho' - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \Delta T' - \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{\partial D_0}{\partial\rho}\right)_T (\mathbf{n}\nabla)\Delta\Phi = 0, \qquad (45)$$

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}\right)_T \frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_\rho \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{\sigma^2\rho_s}{\rho_n}\Delta T' - $$

$$- \frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial D_0}{\partial T}\right)_\rho (\mathbf{n}\nabla)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0, \qquad (46)$$

$$\left(\frac{\partial D_0}{\partial\rho}\right)_T (\mathbf{n}\nabla)\rho' + \left(\frac{\partial D_0}{\partial T}\right)_\rho (\mathbf{n}\nabla)T' - \varepsilon\Delta\Phi = 0. \qquad (47)$$

Будем искать решения вида $\rho', T', \Phi \sim \exp i(\mathbf{kr} - \omega t)$. Исключив с помощью (47) электрический потенциал из (45), (46), приходим к системе двух уравнений

$$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T + \rho a_\rho - u^2\right]\rho' + \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho + \rho a_{\rho T}\right]T' = 0, \qquad (48)$$

$$\left[u^2\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}\right)_T - \frac{u^2}{\rho}a_{\rho T}\right]\rho' + \left[u^2\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_\rho - \frac{\sigma^2\rho_s}{\rho_n} - \frac{u^2}{\rho}a_T\right]T' = 0, \qquad (49)$$

где $\gamma \equiv \cos^2\theta$, причем $\cos\theta \equiv \mathbf{n}\cdot\mathbf{s}$, $u^2 = \omega^2/k^2$, $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ — единичный вектор вдоль распространения звуковой волны. Отсюда получаем уравнение для определения скоростей звука

$$\left[u^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T - \rho a_\rho\right]\left[u^2\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_\rho - \frac{\sigma^2\rho_s}{\rho_n} - \frac{u^2}{\rho}a_T\right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho + \rho a_{\rho T}\right]\left[u^2\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}\right)_T - \frac{u^2}{\rho}a_{\rho T}\right] = 0. \qquad (50)$$

В (48)–(50) использованы обозначения (25). Уравнение (50) можно представить в виде

$$\left(u^2 - u_{10}^2\right)\left(u^2 - u_{20}^2\right) = u_{10}^2 u_{20}^2\left(1 - \frac{c_V}{c_p}\right) +$$

$$+ a_T u^2 \frac{T}{\rho c_V}\left(u^2 - \frac{c_V}{c_p}u_{10}^2\right) + a_\rho\rho\left(u^2 - u_{20}^2\right) -$$

$$- 2a_{\rho T}u^2 \frac{T u_{10}^2}{\rho c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p. \qquad (51)$$

Здесь

$$u_{10}^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_\sigma, \quad u_{20}^2 = \frac{\sigma^2\rho_s}{\rho_n}\left(\frac{\partial T}{\partial\sigma}\right)_\rho \qquad (52)$$

— скорости первого и второго звуков в отсутствие поляризации. Полагая аномально малый в гелии коэффициент теплового расширения $(\partial\rho/\partial T)_p$ равным нулю и, следовательно, $c_V = c_p$, получаем выражения для скоростей первого и второго звуков с учетом малых поправок на спонтанную поляризацию

$$u_1^2 = u_{10}^2 + \frac{\rho}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial D_0}{\partial\rho}\right)_T^2 \cos^2\theta, \qquad (53)$$

$$u_2^2 = u_{20}^2 + \frac{u_{20}^2}{4\pi\varepsilon}\frac{T}{\rho c_V}\left(\frac{\partial D_0}{\partial T}\right)_\rho^2 \cos^2\theta. \qquad (54)$$

Связь напряженности поля в волне первого звука с колебаниями плотности

$$E_\parallel = -\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon}\left(\frac{\partial D_0}{\partial\rho}\right)_T \rho', \qquad (55)$$

а в волне второго звука с колебаниями температуры

$$E_\parallel = -\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon}\left(\frac{\partial D_0}{\partial T}\right)_\rho T'. \qquad (56)$$

Как поляризационные добавки к скоростям, так и связи напряженности электрического поля с флуктуациями плотности и температуры (55), (56) зависят от угла между направлением спонтанной поляризации и направлением распространения волны. Колебания поля максимальны, когда направление распространения волны совпадает с направлением спонтанной поляризации $(\theta = 0)$ и обращается в нуль, если эти направления ортогональны $(\theta = \pi/2)$.

Об обнаружении колебаний напряженности поля в волне второго звука сообщалось в работе [7]. Если причиной наблюдаемого эффекта является существование в жидком гелии спонтанной поляризации, как это предполагается в работе [6], то величина данного эффекта должна зависеть от угла между направлением спонтанной поляризации и направлением изменения величин, колеблющихся в волне. Этот угол можно было бы изменить, прикладывая постоянное электрическое поле. Экспериментальное обнаружение зависимости величины эффекта от направления внешнего поля указывало бы на анизотропию системы и служило бы аргументом в пользу существования в жидком гелии спонтанной поляризации. Отсутствие эффекта в волне первого звука [7] может быть связано с различной зависимостью величины спонтанной поляризации от плотности и температуры и, следовательно, различной величиной производных $(\partial D_0/\partial\rho)_T$ и $(\partial D_0/\partial T)_\rho$.

Предполагая, что наблюдаемый в [7] эффект обусловлен спонтанной поляризацией, оценим величину $(\partial D_0/\partial T)_\rho$. В экспериментах [7] возникает разность потенциалов $\Delta U \sim 100$ нВ на расстоянии $l \sim 1$ см, так что напряженность поля в волне $E \sim 10^{-7}$ В/см. Амплитуда колебаний температуры в волне второго звука $\Delta T \sim 10^{-3}$ К [7]. С учетом этих значений из (56) следует, что $(\partial D_0/\partial T)_\rho \sim 10^{-4}$ В/(см·К). К сожалению, на основании полученных соотношений нет возможности оценить непосредственно величину спонтанной индукции $D_0 = 4\pi P_0$. Оценка из соотношения (54) величины сдвига скорости второго звука, при полученном значении производной, дает крайне малую величину

$$\frac{u_2 - u_{20}}{u_{20}} \sim \frac{T}{\rho c_V}\left(\frac{\partial D_0}{\partial T}\right)_\rho^2 \sim 10^{-18}, \tag{57}$$

которая находится за пределами возможностей экспериментального обнаружения.

6. Заключение

В феноменологическом подходе получены уравнения гидродинамики нормальной и сверхтекучей жидкостей, которые обладают спонтанной поляризацией. Показано, что при наличии спонтанной индукции возникают эффекты, линейные по электрическому полю. Исследовано распространение звука в полярных жидкостях. Найдено, что как в нормальной, так и в сверхтекучей жидкости появляются анизотропные добавки к скорости звука, а распространение звуковой волны сопровождается колебаниями электрического поля. В волне первого звука и в нормальной жидкости электрические эффекты определяются производной вектора спонтанной индукции по плотности, а во втором звуке — по температуре. Обсуждается возможная применимость полученных уравнений к интерпретации экспериментов по электрической активности сверхтекучего гелия в волне второго звука [7].

1. С.Р. де Гроот, Л.Г. Сатторп, *Электродинамика*, Наука, Москва (1982).
2. Г.А. Остроумов, *Взаимодействие электрических и гидродинамических полей*, Наука, Москва (1979).
3. В.В. Толмачев, А.М. Головин, В.С. Потапов, *Термодинамика и электродинамика сплошной среды*, Изд-во Московского университета (1988).
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
5. В.Г. Вакс, *Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков*, Наука, Москва (1973).
6. Ю.М. Полуэктов, А.С. Рыбалко, *ФНТ* **39**, 992 (2013) [*Low Temp. Phys.* **39**, 770 (2013)].
7. А.С. Рыбалко, *ФНТ* **30**, 1321 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 994 (2004)].
8. И.М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).

Hydrodynamics of normal and superfluid polar liquids. Sound propagation

Yu.M. Poluektov

Hydrodynamic equations for normal and superfluid liquids, possessing spontaneous electric polarization, are obtained using the phenomenological approach. It is shown that sound wave propagation is followed by electric field oscillations. Corrections to speeds of the first and second sounds in normal and superfluid polar liquids are calculated.

PACS: **67.10.–j** Quantum fluids: general properties;
67.25.D– Superfluid phase ^{4}He;
47.37.+q Hydrodynamic aspects of superfluidity; quantum fluids;
47.35.Rs Sound waves.

Keywords: polarization, dipole moment, normal fluid, superfluid, first and second sounds.