

## Двумерные солитоны в нематической фазе магнетиков с изотропным обменным взаимодействием

Е.Г. Галкина<sup>1</sup>, Б.А. Иванов<sup>2</sup>, О.А. Космачев<sup>3</sup>, Ю.А. Фридман<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Институт физики НАН Украины, пр. Науки, 46, г. Киев, 03028, Украина*  
E-mail: el.galkina@gmail.com

<sup>2</sup>*Институт магнетизма НАН Украины, пр. Вернадского, 36-б, г. Киев, 03142, Украина*

<sup>3</sup>*Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского  
пр. Вернадского, 4, г. Симферополь, 295007, Республика Крым*

Статья поступила в редакцию 21 ноября 2014 г., опубликована онлайн 23 марта 2015 г.

Исследованы двумерные топологические солитоны-вихри для состояний спинового нематика в магнетиках со спинами  $S = 1$  и  $S = 3/2$ . В зависимости от параметров магнетика реализуются или чисто мультипольные вихри, с квадрупольным параметром для нематика со спином  $S = 1$ , или октупольным параметром для нематика со спином  $S = 3/2$ , или вихри с несингулярным ядром. Вихревое ядро отвечает области макроскопического размера с разрушенным нематическим порядком. Переход к вихрям с ядром происходит при критических значениях параметра системы. При этом формируется или ферромагнитный вихрь с насыщенным значением магнитного момента в ядре, или вихрь с антиферромагнитным порядком в ядре. Динамические свойства вихря с ферромагнитным ядром характеризуются наличием гироскопической силы, а для вихря с антиферромагнитным ядром имеет место лоренц-инвариантная динамика, характерная для антиферромагнетиков в рамках сигма-модели.

Досліджено двовимірні топологічні солітони-вихори для станів спінового нематика в магнетиках зі спінами  $S = 1$  та  $S = 3/2$ . Залежно від параметрів магнетика реалізуються або чисто мультипольні вихори, з квадрупольним параметром для нематика із спіном  $S = 1$ , або октупольним параметром для нематика із спіном  $S = 3/2$ , або вихори з несингулярним ядром. Вихорове ядро відповідає області макроскопічного розміру із зруйнованим нематичним порядком. Перехід до вихорів з ядром відбувається при критичних значеннях параметра системи. При цьому формується або феромагнітний вихор з насиченим значенням магнітного моменту в ядрі, або вихор з антиферомагнітним порядком в ядрі. Динамічні властивості вихору з феромагнітним ядром характеризуються наявністю гіроскопічної сили, а для вихору з антиферомагнітним ядром має місце лоренц-інваріантна динаміка, характерна для антиферомагнетиків у рамках сигма-моделі.

PACS: 75.10.Jm Квантовые спиновые модели, включая квантовую спиновую фрустрацию;  
05.45.Yv Солитоны;  
03.75.Kk Динамические свойства конденсатов; коллективные и гидродинамические возбуждения, течение сверхтекучей жидкости.

Ключевые слова: спиновый нематик, солитон, уравнение Ландау–Лифшица.

### 1. Введение

Большая часть работ в области теории магнетизма базируется на уравнении Ландау–Лифшица для единичного (нормированного) вектора намагниченности [1,2]. Справедливость уравнения Ландау–Лифшица можно обосновать для ферромагнетика, описываемого обмен-

ным гамильтонианом Гейзенберга, который включает изотропное билинейное взаимодействие спинов вида  $\mathcal{J}\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ . По сути, при применении уравнения Ландау–Лифшица авторы ограничиваются анализом гейзенберговских магнетиков, состояние которых при низких температурах (фактически, при  $T \rightarrow 0$ ) определяется заданием вектора намагниченности (среднего спина  $\langle \mathbf{S} \rangle$ )

практически постоянной длины. При выходе за рамки такой модели, например при учете высших инвариантов изотропного взаимодействия типа  $(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2)^n$  (возможны степени  $n$  до  $2S$ , т.е. такие обобщения имеют смысл для спина  $S > 1/2$ ), приближение  $|\langle \mathbf{S} \rangle| = \text{const}$  перестает быть применимым. Такие спиновые модели активно используются для описания кристаллических магнетиков, в чем большую роль сыграл обзор Локтева и Островского [3] и монография Нагаева [4]. В последние годы интерес к этой проблеме вырос в связи с исследованием многокомпонентных бозе-эйнштейновских конденсатов нейтральных атомов с ненулевым спином [5] и изучением так называемых состояний магнетиков со скрытой симметрией [6,7].

Возможность нелинейных режимов спиновой динамики для таких систем изучена недостаточно. Наиболее адекватным понятием для описания нелинейной динамики физических систем являются солитоны. Широкий класс интересных солитонных состояний, включающий магнитные вихри и дисклинации, магنونные капли, трехмерные солитоны с топологическим индексом Хопфа, исследован для спиновых систем со спонтанно нарушенной симметрией (см. монографии и обзоры [8–11]). В последние годы установлено, что двумерные солитоны-вихри важны для описания свойств магнитных частиц субмикронного размера, которые перспективны для применения в новых приборах магнитной наноэлектроники. Для таких частиц обнаружены и другие типы неодномерных солитонов, магنونные капли, которые имеют серьезные преимущества для создания наногенераторов, возбуждаемых спинполяризованным током [12,13]. Такие солитоны изучаются теоретически уже около сорока лет [14–16], но продолжают вызывать интерес теоретиков [17–19]. В целом, спиновые системы магнетиков — важный объект приложения солитонных идей и методов, их изучение часто приводит к получению новых типов солитонных состояний.

Основной спецификой негеизенберговских спиновых систем является квантовая редукция спина, т.е. появление состояний со средним значением  $|\langle \mathbf{S} \rangle| < S$ . В статических свойствах системы это проявляется в существовании так называемых спиновых нематиков, таких состояний, в основном состоянии которых средний спин  $\langle \mathbf{S} \rangle$  равен нулю [20–23]. Спонтанное понижение симметрии в этой фазе и отличие спинового нематика от парамагнетика определяются мультипольными средними по компонентам спина (квадрупольными, типа  $\langle S_i S_k \rangle$ , октупольными, типа  $\langle S_i S_j S_k \rangle$  и т.д.). В динамике таких магнетиков (как нематических, так и магнитных фаз) возникают специфические моды, связанные с включением мультипольных степеней свободы [24–30]. Для них характерны связанные колебания мультипольных переменных и изменения моду-

ля спина без поворота вектора  $\langle \mathbf{S} \rangle$ , т.е. продольные спиновые колебания.

Адекватный подход к описанию таких магнитных систем базируется на использовании топологических свойств полного пространства состояний для спина  $S$ , которое является комплексным проективным пространством  $CP_{2S}$  [3]. Это позволяет построить лагранжиан системы, описывающий энергию системы и спиновую динамику с учетом всех нетривиальных мультипольных степеней свободы. Надо заметить, что последовательный учет всех мультипольных степеней свободы представляет собой довольно громоздкую задачу, сложность которой увеличивается с ростом величины спина. Поэтому исследование нелинейной динамики практически ограничивалось простейшим случаем негеизенберговских магнетиков со спином  $S = 1$ . В нематической фазе этой системы существуют специфические продольные магнитные солитоны, одномерные [31] или двумерные солитоны [32,33]. Проведен топологический анализ таких солитонов на границе перехода в ферромагнитное состояние [34]. Для всех этих солитонов присутствуют колебания среднего значения модуля спина и неприводимых квадрупольных переменных вида  $\langle S_x^2 - S_y^2 \rangle$  и  $\langle S_x S_y + S_y S_x \rangle$ . Предложено использование продольной спиновой динамики для реализации быстрого переключения направления магнитного момента малых частиц магнетиков под действием лазерного импульса, что открывает новые перспективы повышения скорости работы магнитных систем памяти [35,36]. Однако уже для следующего нетривиального примера, нематического состояния в магнетике со спином  $S = 3/2$ , известны только примеры анализа линейной динамики [24,30]. Кроме того, анализ системы со спином  $S = 1$  показал, что простое длинноволновое приближение адекватно только в достаточно узкой области параметров задачи [37].

В работе исследуются топологически устойчивые двумерные солитоны-вихри для состояния спинового нематика. На примере моделей со спином  $S = 1$  и  $S = 3/2$  выяснены общие закономерности их структуры и динамики. Исследованы решения в континуальном приближении и проведен численный анализ дискретной решеточной модели. Этот анализ показал применимость макроскопического подхода для количественного (около критических линий) или полуквантового, в общем случае, описания основных характеристик солитонов.

## 2. Модель и выбор переменных

Теоретико-полевой подход при полном учете состояний спина базируется на использовании когерентных состояний группы Ли  $SU(2S+1)$  (см. их математические свойства в [38,39]). При нулевой температуре состояние спина определяется чистыми квантовыми состояниями оператора спина  $\mathbf{S}$ . Вектор состояния для

спина на каждом узле  $\mathbf{1} |\Psi\rangle$  определяется значениями  $4S$  параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{4S}$ , индекс узла далее опускается. Энергия системы в приближении среднего поля  $W\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{4S}\}$  совпадает со средним значением гамильтониана системы, вычисленным на состояниях  $|\Psi\rangle$ ,  $W\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{4S}\} = \langle \Psi | H | \Psi \rangle$ . Динамика переменных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{4S}$  определяется лагранжианом [3]

$$L = |\Psi\rangle \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) |\Psi\rangle - W\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{4S}\}. \quad (1)$$

На основе линеаризованной версии этого лагранжиана легко получить спектр линейных возбуждений. Преимущество этого подхода состоит в том, что он допускает переход к нелинейному случаю и исследование солитонов. Проблема применения этого подхода в том, что увеличение величины спина значительно усложняет расчеты. Однако в нашем случае полезно провести упрощенный анализ, выделив только одну наиболее важную степень свободы.

Начнем с более простого случая «минимального» негейзенберговского изотропного магнетика со спином  $S = 1$  и обсудим те его свойства, которые допускают перенос на более сложные системы. Гамильтониан этой модели имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{a}} [J(\mathbf{S}_{\mathbf{l}} \mathbf{S}_{\mathbf{l}+\mathbf{a}}) + K(\mathbf{S}_{\mathbf{l}} \mathbf{S}_{\mathbf{l}+\mathbf{a}})^2]. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{S}_{\mathbf{l}}$  — оператор спина в узле  $\mathbf{l}$ , константы  $J$  и  $K$  определяют билинейное (гейзенберговское) и биквадратичное по спинам обменное взаимодействие пар ближайших соседей, набор векторов  $\mathbf{a}$  определяет положение ближайших соседей, множитель  $1/2$  учитывает, что суммирование в (2) производится так, что каждая пара ближайших соседей учитывается один раз. Будем рассматривать случай квадратной решетки, то есть  $\mathbf{l} = a(l_1 \mathbf{e}_x + l_2 \mathbf{e}_y)$ ,  $l_1, l_2$  — целые числа,  $a$  — постоянная решетки.

Модель (2) обладает указанными выше физическими свойствами, отсутствующими для гейзенберговских магнетиков. В частности, в этой системе возможно нематическое состояние, которое устойчиво при выполнении условия  $K > J > 0$  [40]. Основное состояние может быть описано заданием единичного вектора-директора  $\mathbf{n}$ , такого, что на каждом узле магнетика  $\langle (\mathbf{S}\mathbf{n})^2 \rangle = 0$ , а для двух других ортогональных направлений,  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ ,  $\langle (\mathbf{S}\mathbf{e}_1)^2 \rangle = \langle (\mathbf{S}\mathbf{e}_2)^2 \rangle = 1$  [40]. Для описания низкочастотной спиновой динамики было предложено использовать нелинейное уравнение сигма-модели для единичного вектора-директора  $\mathbf{n}$  [40]. Однако изотропная сигма-модель не достаточна для анализа топологических дефектов типа вихрей, дисклинаций или ежей, и в данной работе спиновая динамика будет рассмотрена вне рамок этого приближения.

Состояние спинового нематика с  $S = 1$ , в котором  $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$ , инвариантно относительно обращения времени, но для него имеет место спонтанное нарушение вращательной симметрии, связанное со спиновыми квадрупольными средними  $S_{ik}$ ,  $2S_{ik} = \langle S_i S_k + S_k S_i \rangle$ ,  $i, k = x, y, z$ . Величина  $S_{ik} - \delta_{ik} S(S+1)/3$  является квантовым аналогом параметра порядка Де Жена, который вводится для обычных нематических жидких кристаллов [41].

Введем стандартные состояния с заданной проекцией спина на ось квантования (ось  $z$ ),  $|+1\rangle$ ,  $|0\rangle$  и  $|-1\rangle$ . Обсудим выбор вектора состояния для описания нематика, в основном состоянии которого  $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$ . Выбор  $|\Psi_{\text{nem}}\rangle = Z_+ |+1\rangle + Z_- |-1\rangle$  гарантирует равенство нулю поперечных компонент спина,  $\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = 0$  при любом соотношении комплексных чисел  $Z_+$  и  $Z_-$ , связанных условием нормировки  $|Z_+|^2 + |Z_-|^2 = 1$ . При  $|Z_+| = |Z_-|$  получаем состояние  $|\Psi_{\text{nem}}^{(\text{ground})}\rangle$ , для которого  $\langle S_z \rangle = 0$  и которое определяет нематическое состояние. В динамике условие  $|Z_+| = |Z_-|$  нарушается и появляются значения  $\langle S_z \rangle \neq 0$ . Данный класс состояний годится для описания специфической динамики спинового нематика, для которого имеет место только изменение вектора намагниченности по длине, без его поворота, а также колебания квадрупольных (в общем случае — мультипольных) переменных.

Рассмотрим квадрупольные средние  $S_{ik}$ . В общем виде в качестве геометрического образа этих средних можно выбрать квадрупольный эллипсоид, т.е. эллипсоид с направлениями главных осей  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$ , полуоси которого равны  $\langle S_1^2 \rangle$ ,  $\langle S_2^2 \rangle$  и  $\langle S_3^2 \rangle$ ,  $i, k = 1, 2, 3$ , а величины  $\langle S_i S_k + S_k S_i \rangle = 0$  при  $i \neq k$ . Легко видеть, что условие нормировки для  $|\Psi_{\text{nem}}\rangle$  дает  $\langle S_z^2 \rangle = 1$ , то есть  $\langle S_x^2 \rangle + \langle S_y^2 \rangle = 1$ , в силу чего получается  $\langle S_x^2 \rangle \leq \langle S_z^2 \rangle = 1$ ,  $\langle S_y^2 \rangle \leq \langle S_z^2 \rangle = 1$ . Поскольку изменение фазы вектора состояния не меняет значения наблюдаемых величин, конкретизируем вид вектора состояния следующим образом:

$$|\Psi_{\text{nem}}\rangle = |1\rangle \cos \frac{\alpha}{2} + |-1\rangle e^{i\beta} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (3)$$

удобство использования переменной  $\alpha/2$ , а не  $\alpha$  будет видно ниже. Легко видеть, что для этого состояния  $\langle S_x S_z + S_y S_z \rangle = 0$ ,  $\langle S_y S_z + S_z S_y \rangle = 0$ , но отличны от нуля следующие квадрупольные средние:

$$\langle S_x^2 \rangle = \frac{1}{2} (1 + \sin \alpha \cos \beta), \quad \langle S_y^2 \rangle = \frac{1}{2} (1 - \sin \alpha \cos \beta),$$

$$\langle S_x S_y + S_y S_x \rangle = \sin \alpha \sin \beta,$$

в силу чего две главные оси квадрупольного эллипсоида лежат в плоскости  $xy$ , а одна параллельна оси квантования  $z$ . Нематическому состоянию соответствует  $\alpha = \pi/2$ , и при  $\alpha \approx \pi/2$  можно ввести вектор-

директор  $\mathbf{n}$ ,  $n_x = \cos\beta$  и  $n_y = \sin\beta$ , который лежит в плоскости  $xy$ .

Совместно с величиной  $\langle S_z \rangle = \cos\alpha$  эти квадратурные средние определяют продольную спиновую динамику. Величину  $\langle S_z \rangle$  и нетривиальные квадратурные средние удобно представить в виде

$$\sigma_3 = \langle S_z \rangle, \sigma_1 = \langle S_x^2 - S_y^2 \rangle = \sin\alpha \cos\beta, \quad (4)$$

$$\sigma_2 = \langle S_x S_y + S_y S_x \rangle = \sin\alpha \sin\beta.$$

Формально величины  $\sigma_i, i=1, 2, 3$ ,  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 1$  можно рассматривать как компоненты единичного трехмерного вектора. Для этого вектора величины  $\alpha, \beta$  имеют смысл стандартных угловых переменных, что и определяет удобство записи вектора состояния в виде (3) или (6). Набор переменных  $\sigma_i$  представляет часть восьмимерного вектора  $n_\mu, \mu = 1, 2 \dots 8$ , ассоциированного с матрицами Гелл-Мана, который естественным образом возникает при описании динамики этой системы в общем случае [26]. Необходимо заметить, однако, что величины  $\sigma_i$  и  $n_\mu$  имеют достаточно сложные трансформационные свойства, в частности, для них различные компоненты по-разному трансформируются при отражении времени. Не просты также и преобразования при поворотах, см. ниже общее обсуждение для случаев  $S = 1$  и  $S = 3/2$ . Однако такая формальная аналогия окажется полезной при исследовании как статических, так и динамических свойств спиновых нематиков.

Перейдем теперь к анализу следующего примера, магнетика со спином магнитного иона  $S = 3/2$ . В общем случае гамильтониан системы со спином  $3/2$  и изотропным обменным взаимодействием между ближайшими соседями имеет вид

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{a}} [J \mathbf{S}_\mathbf{l} \mathbf{S}_{\mathbf{l}+\mathbf{a}} + K (\mathbf{S}_\mathbf{l} \mathbf{S}_{\mathbf{l}+\mathbf{a}})^2 + L (\mathbf{S}_\mathbf{l} \mathbf{S}_{\mathbf{l}+\mathbf{a}})^3], \quad (5)$$

где  $\mathbf{S}_\mathbf{l}$  — спиновый оператор  $S = 3/2$  в узле  $\mathbf{l}$ . Дополнительно к гамильтониану магнетика со спином  $S = 1$ , см. (2), в данном случае присутствует бикубическое по спинам обменное взаимодействие, определяющееся обменным интегралом  $L$ . Специфика динамики и статистики этих материалов обусловлена нетривиальными октапольными средними. Кроме стандартных магнитных фаз, характеризующихся векторным параметром порядка (ферро- и антиферромагнитная фазы), в магнетике с  $S = 3/2$  и преобладающими высшими обменными интегралами возможна реализация состояний с тензорными параметрами порядка — нематическая [22–24] и антинематическая [25] фазы. Основную роль в свойствах этих фаз играют октапольные средние, кубические по компонентам спиновых операторов, прежде всего, средние типа  $\langle (S^\pm)^3 \rangle$ ,  $S^\pm = S_x \pm iS_y$ . Формирование

октапольного порядка связано с учетом бикубического обменного взаимодействия.

Как и выше для случая  $S = 1$ , выберем одноузельную волновую функцию так, чтобы она соответствовала только продольным колебаниям среднего значения спина и октапольных средних, т.е. запишем:

$$|\psi\rangle = \left| \frac{3}{2} \right\rangle \cos \frac{\alpha}{2} + \left| -\frac{3}{2} \right\rangle e^{i\beta} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

Для этого состояния  $\langle S_z \rangle = (3/2)\cos\alpha$ . Здесь используются те же обозначения, что и для нематика со спином  $S = 1$ , для «угловых» переменных  $\alpha, \beta$ . Это не может привести к недоразумениям: как будет показано ниже, динамика переменных  $\alpha, \beta$  универсальна для нематиков со спином  $S = 3/2$  и  $S = 1$ . Легко также найти нетривиальные значения октапольных переменных; запишем их в виде

$$\langle (S^+)^3 \rangle + \langle (S^-)^3 \rangle = 4\sqrt{3} \sin\alpha \cos\beta = 4\sqrt{3}\sigma_1,$$

$$\langle (S^+)^3 \rangle - \langle (S^-)^3 \rangle = i4\sqrt{3} \sin\alpha \sin\beta = i4\sqrt{3}\sigma_2. \quad (7)$$

Обозначив  $\langle S_z \rangle = (3/2)\sigma_3$ , можно ввести три величины  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , связанные соотношением  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 1$ , и формально рассматривать их как единичный вектор. Естественно, как и для случая  $S = 1$ , это можно делать с некоторыми оговорками. Трансформационные свойства величин  $\sigma_i$  иные, чем для реальных векторных величин, скажем намагниченности. Более того, некоторые физические свойства этих величин различаются для случаев  $S = 3/2$  и  $S = 1$ . В частности, для нематика с  $S = 3/2$  все три величины  $\sigma_i$  меняют знак при отражении времени. Величины  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  совпадают с введенными ранее для нематика с  $S = 3/2$  компонентами вектора «псевдоспина»  $\sigma$  [24], в то время как для  $S = 1$  они определяют вектор-директор  $\mathbf{n}$ . Однако для спиновой динамики нематических фаз указанные различия не играют роли. Динамика переменных  $\sigma_i$  (или  $\alpha, \beta$ ) универсальна, и анализ структуры солитонов проводится одинаково для нематиков со спином  $S = 3/2$  и  $S = 1$ . В результате, для этих двух типов нематиков будет отличаться только физическая интерпретация результатов, но не запись решения через  $\sigma_i$  (или  $\alpha, \beta$ ).

Легко показать, что обе физические системы, нематик со спином  $S = 3/2$  и  $S = 1$ , описываются лагранжианом с одинаковой структурой динамической части, его можно записать в виде

$$L = \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{l}} \frac{\partial \beta_{\mathbf{l}}}{\partial t} (1 - \cos \alpha_{\mathbf{l}}) - W\{\alpha, \beta\}, \quad (8)$$

где  $W\{\alpha, \beta\}$  — энергия системы, которая включает сумму энергий взаимодействия пар ближайших спинов и зависит от переменных  $\alpha_{\mathbf{l}}$  и  $\beta_{\mathbf{l}}$  для всех спинов.

Кинетическая часть лагранжиана при записи через величины  $\sigma_i$  принимает вид, известный для ферромагнетика и включающий вектор-потенциал монополя Дирака с направлением сингулярности (струны Дирака) в направлении отрицательной полуоси оси 3, то есть

$$\frac{\hbar}{2} \frac{\partial \beta}{\partial t} (1 - \cos \alpha) \rightarrow \frac{\hbar}{2(1 + \sigma_3)} (\sigma_1 \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} - \sigma_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}). \quad (9)$$

Для пары спинов в узлах  $a$  и  $b$  в приближении среднего поля энергию взаимодействия можно записать в виде суммы дипольного вклада  $-\tilde{J} \langle \mathbf{S}_a \rangle \langle \mathbf{S}_b \rangle \propto -\tilde{J} \sigma_{3,a} \sigma_{3,b}$  и мультипольного вклада  $-\tilde{J} (\sigma_{1,a} \sigma_{1,b} + \sigma_{2,a} \sigma_{2,b})$ , где  $\tilde{J}$  и  $\bar{J}$  — комбинации обменных интегралов в гамильтонианах (2) или (5). Равенство множителей при  $\sigma_{1,a} \sigma_{1,b}$  и  $\sigma_{2,a} \sigma_{2,b}$  обеспечивается вращательной инвариантностью системы. Однако величины  $\bar{J}$  и  $\tilde{J}$  могут быть, вообще говоря, различными.

Легко видеть, что нематическая фаза с одной подрешеткой, в основном состоянии которой  $\sigma_{i,a} = \sigma_{i,b}$  и  $\sigma_3 = 0$ , устойчива при  $\bar{J} > 0$  и  $-\bar{J} \leq \tilde{J} \leq \bar{J}$ . Равенству  $\bar{J} = \tilde{J}$  соответствует особая точка системы с повышенной симметрией, формальной вращательной инвариантностью в пространстве  $\sigma_i$ . Например, для магнетика со спином  $S = 1$  значения  $\tilde{J} = J - K/2$  и  $\bar{J} = K/2$  и условие  $\tilde{J} = \bar{J}$  соответствует  $SU(3)$  критической точке  $J = K$  [40,42]. Для магнетика со спином  $S = 3/2$  простой, но громоздкий расчет дает

$$\tilde{J} = \frac{9}{8} (J - \frac{K}{2} + \frac{119}{16} L), \quad \bar{J} = \frac{9}{8} L, \quad (10)$$

так что условия  $\tilde{J} \leq \bar{J}$  и  $-\bar{J} \leq \tilde{J}$  определяют границы устойчивости нематической фазы,  $\Lambda_1 = J - K/2 + 103L/16 \leq 0$  и  $\Lambda_2 = J - K/2 + 135L/16 \geq 0$  [24]. При  $\Lambda_1 \rightarrow 0$  или  $\Lambda_2 \rightarrow 0$  система переходит в ферромагнитную или антиферромагнитную фазу соответственно [24,30].

Полную энергию системы удобно представить в универсальном виде

$$W\{\alpha, \gamma\} = -\frac{1}{2} \bar{J} \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{a}} (\sigma_{1,\mathbf{l}} \sigma_{1,\mathbf{l}+\mathbf{a}} + \sigma_{2,\mathbf{l}} \sigma_{2,\mathbf{l}+\mathbf{a}} + \kappa \sigma_{3,\mathbf{l}} \sigma_{3,\mathbf{l}+\mathbf{a}}), \quad (11)$$

где величина  $\kappa = \tilde{J}/\bar{J}$ . Гамильтониан ферромагнетика в таком виде во многих работах использовался при анализе магнитных вихрей в двумерном анизотропном гейзенберговском ферромагнетике [43,44] или антиферромагнетике [45] с анизотропией типа легкая плоскость. При применении (11) к ферромагнетикам величины  $\sigma_i$  имели смысл компонент классических спинов и рассматривался только случай  $\kappa > 0$ . В угловых переменных

$$\begin{aligned} \sigma_{1,\mathbf{l}} \sigma_{1,\mathbf{l}+\mathbf{a}} + \sigma_{2,\mathbf{l}} \sigma_{2,\mathbf{l}+\mathbf{a}} &= \sin \alpha_{\mathbf{l}} \sin \alpha_{\mathbf{l}+\mathbf{a}} \cos(\gamma_{\mathbf{l}} - \gamma_{\mathbf{l}+\mathbf{a}}), \\ \sigma_{3,\mathbf{l}} \sigma_{3,\mathbf{l}+\mathbf{a}} &= \cos \alpha_{\mathbf{l}} \cos \alpha_{\mathbf{l}+\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

Около  $SU(3)$  точки с повышенной симметрией при  $\kappa = 1$  система обладает вращательной инвариантностью в пространстве  $\sigma_i$ . Рассмотрим теперь другую критическую точку,  $\kappa = -1$ . В этом случае энергия в переменных  $\sigma_i$  является предельно анизотропной. Однако если выделить две подрешетки (обозначим их векторы трансляций  $\mathbf{l}_1 = a[\bar{l}_1(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + \bar{l}_2(\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_x)]$ ,  $\bar{l}_1, \bar{l}_2$  — целые числа,  $\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{a}$ ) и перейти к новой переменной  $\tau_i$  по правилу

$$\begin{aligned} \sigma_{i,\mathbf{l}} &\rightarrow \tau_{i,\mathbf{l}}, \sigma_{1,\mathbf{l}+\mathbf{a}} \rightarrow -\tau_{1,\mathbf{l}+\mathbf{a}}, \sigma_{2,\mathbf{l}+\mathbf{a}} \rightarrow \\ &\rightarrow -\tau_{2,\mathbf{l}+\mathbf{a}}, \sigma_{3,\mathbf{l}+\mathbf{a}} \rightarrow \tau_{3,\mathbf{l}+\mathbf{a}}, \end{aligned} \quad (12)$$

то знак у первых двух слагаемых в (11) изменится. В результате получается лагранжиан относительно переменных  $\tau_i$ , кинетическая часть которого имеет вид

$$\frac{\hbar}{2(1 + \tau_3)} \left( \tau_1 \frac{\partial \tau_2}{\partial t} - \tau_2 \frac{\partial \tau_1}{\partial t} \right), \quad (13)$$

а энергия является изотропной по переменной  $\tau_i$  в предельном случае  $\kappa = -1$  и имеет слабую анизотропию при  $1 + \kappa \ll 1$ ,

$$W = \frac{1}{2} \bar{J} \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{a}} (\tau_{1,\mathbf{l}} \tau_{1,\mathbf{l}+\mathbf{a}} + \tau_{2,\mathbf{l}} \tau_{2,\mathbf{l}+\mathbf{a}} + |\kappa| \tau_{3,\mathbf{l}} \tau_{3,\mathbf{l}+\mathbf{a}}). \quad (14)$$

Динамика переменных  $\tau_i$  может рассматриваться безотносительно к тому, к какой подрешетке относится данный спин, и в энергии по-прежнему можно писать сумму по  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{a}$ . Здесь принципиально важно, что преобразование (12) не меняет гамильтоновой структуры уравнений для  $\tau_i$  (что произошло бы, если бы поменять знак или у всех трех компонент  $\sigma_i$ , или только у одной компоненты). Насколько нам известно, такой прием был впервые предложен в работе [46] для исследования сильно анизотропных классических антиферромагнетиков.

Таким образом, преобразование (12) в случае  $\kappa < 0$  сводит задачу к анализу классического спинового гамильтониана с антиферромагнитным взаимодействием и со слабой (в пределе  $1 + \kappa \ll 1$ ) анизотропией типа легкая плоскость. Статическому состоянию такой системы (как однородному основному, так и содержащему вихрь) соответствует состояние с двумя подрешетками в узлах  $\mathbf{l}_1$  и  $\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{a}$ . Распределение  $\sigma_{i,\text{afm}}$  для антиферромагнитного вихря с некоторым значением  $\kappa_{\text{afm}} < 0$  получается из решения для ферромагнитного вихря с  $\kappa_{\text{fm}} = -\kappa_{\text{afm}}$  преобразованием

$$\begin{aligned} \sigma_{i,\text{afm}}(\mathbf{l}_1) &= \sigma_{i,\text{fm}}(\mathbf{l}_1), \quad \sigma_{3,\text{afm}}(\mathbf{l}_2) = -\sigma_{3,\text{fm}}(\mathbf{l}_2), \\ \sigma_{1,2,\text{afm}}(\mathbf{l}_2) &= \sigma_{1,2,\text{fm}}(\mathbf{l}_2), \end{aligned} \quad (15)$$

что ясно видно из численных данных, приведенных в разд. 4. Энергии вихрей с  $\kappa = |\kappa|$  и  $\kappa = -|\kappa|$  совпа-

дают (см. разд. 4). Динамические свойства вихрей с антиферромагнитным ядром и с ферромагнитным ядром являются, однако, принципиально различными.

### 3. Структура вихрей в континуальном приближении

В рамках макроскопического подхода, который мы ниже будем использовать, энергия системы представляется собой функционал полевых переменных  $\alpha(\mathbf{r}, t)$  и  $\beta(\mathbf{r}, t)$ . Выбирая случай квадратной решетки, запишем лагранжиан, описывающий динамику переменных  $\alpha, \beta$ ,

$$L = \int d^2x \left[ \frac{\hbar}{a^2} (1 - \cos \alpha) \frac{\partial \beta}{\partial t} - w \right], \quad (16)$$

где  $w$  — плотность энергии системы, которая зависит от переменных  $\alpha(\mathbf{r}, t)$ ,  $\beta(\mathbf{r}, t)$  и их пространственных производных. Для энергии вида (11) или (14) эту плотность легко представить в виде разложения по градиентам, в основном приближении получается

$$w = \frac{2\bar{J}}{a^2} (1 - \kappa) \cos^2 \alpha + \frac{\bar{J}}{2} (\nabla \alpha)^2 [\cos^2 \alpha + \kappa \sin^2 \alpha] + \frac{\bar{J}}{2} \sin^2 \alpha (\nabla \phi)^2. \quad (17)$$

В рамках макроскопической модели (16) можно ввести энергию системы  $E$  и полевой импульс  $\mathbf{P}$ ,

$$E = \int w d^2x, \mathbf{P} = \frac{\hbar}{a^2} \int (\cos \alpha - 1) \nabla \beta d^2x. \quad (18)$$

На основе лагранжиана (16) можно исследовать как линейную, так и нелинейную динамику нематической фазы. Перейдем к анализу двумерных солитонов на основе лагранжиана (16). Уравнение Лагранжа  $\delta L / \delta \beta = 0$  имеет вид

$$\hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t} \sin \alpha = \bar{J} a^2 \nabla [\sin^2 \alpha \nabla \beta], \quad (19)$$

и в статическом случае из него следует, что двумерное решение может быть выбрано в виде

$$\beta = m\chi + \beta_0, \alpha = \alpha(r), \quad (20)$$

где  $r, \chi$  — полярные координаты в плоскости магнетика,  $\beta_0$  — произвольный угол. Условие непрерывности дает, что число  $m$  должно быть целым, оно имеет тот же смысл, что и топологический заряд завихренности (vorticity) для вихрей в магнетиках.

При выполнении условия (20) функция  $\alpha(r)$  описывается уравнением в обыкновенных производных,

$$(\cos^2 \alpha + \kappa \sin^2 \alpha) \left( \frac{d^2 \alpha}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\alpha}{dr} \right) + \sin \alpha \cos \alpha \left( \frac{1}{l_0^2} - \frac{m^2}{r^2} - (1 - \kappa) \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 \right) = 0, \quad (21)$$

где величина  $l_0 = (a/2)\sqrt{1/(1-\kappa)}$  имеет смысл характерного масштаба (длины) при малых  $1-\kappa$ .

В предельном случае  $\kappa=1$  величина  $1/l_0 \rightarrow 0$ , уравнение становится масштабно-инвариантным и имеет решение вида солитона Белавина–Полякова [14]. Обобщить это решение для случая малых, но конечных значений  $1-\kappa$  (как это сделано для ферромагнетика с малой анизотропией ([17,47]) не удастся, и оно далее не обсуждается. Однако можно построить решения, описывающие вихрь с ядром. Структура ядра вихря определяется функцией  $\alpha = \alpha_0(r)$  с условием, что при  $r \rightarrow \infty$  величина  $\alpha = \pi/2$ , а при  $r \rightarrow 0$  отсутствуют сингулярности. Поведение решения вблизи начала координат определяется величиной  $l_0$ ,  $\alpha_0(r) \propto (r/l_0)^m$ , то есть  $\sigma_3 \rightarrow 1$ ,  $\sigma_{1,2} \rightarrow 0$  при  $r \ll l_0$ . Однако на больших расстояниях важна другая характерная длина,  $\bar{l}_0 = l_0 \sqrt{\kappa}$  [43], так что при  $r \gg \bar{l}_0$  величина  $\alpha$  стремится к равновесному значению экспоненциально,  $\cos \alpha_0(r) \propto \exp(-r/\bar{l}_0)$ . Таким образом, в центре вихря в спиновом нематике формируется несингулярное насыщенное ядро. В центре ядра  $|\langle \mathbf{S} \rangle| = S$ , а квадратурные средние определяются эллипсоидом вращения с избранной осью, параллельной спину, т.е. нематический порядок разрушен, но восстановлен магнитный порядок. Отметим, что величины  $\bar{l}_0$  и  $l_0$  близки только при  $1 \sim \kappa$ . При малых  $\kappa$  их различие велико, в частности, при  $\kappa \rightarrow 0$ , величина  $\bar{l}_0 \rightarrow 0$ , а  $l_0 = a/2$  остается конечной.

Полное решение уравнение (21) может быть получено только численно, например, с использованием метода стрельбы. Как будет показано в рамках дискретной модели, уже при  $\kappa < \kappa_c \approx 0.7$  характер вихря принципиально изменяется и ядро исчезает. Поэтому имеет смысл рассмотреть случай  $1 \sim \kappa$ , когда (21) переходит в универсальное уравнение, определяющее структуру магнитного вихря [9–11]. Легко показать, что энергия вихря имеет слабую (логарифмическую) расходимость с ростом размера системы  $L$ ,

$$E = \pi m^2 \bar{J} \ln \left( \frac{L}{Al_0} \right), \quad (22)$$

где  $A$  — численный множитель порядка единицы.

Таким образом, для статических вихрей в спиновом нематике со спином  $S = 1$  и  $S = 3/2$  при описании в терминах переменной  $\sigma_i$  получается универсальное поведение. Поведение проекций спина (величины  $\sigma_3$ ) также универсально для рассмотренных моделей. Однако для

мультипольных наблюдаемых величин ситуация более сложная, здесь важны средние вида  $\langle (S^+)^{2S} \rangle$ ,  $S^+ = S_x + iS_y$ , то есть  $\langle (S^+)^2 \rangle$  и  $\langle (S^+)^3 \rangle$  для случаев  $S = 1$  и  $S = 3/2$  соответственно. При повороте в обычном пространстве вокруг оси  $z$  на угол  $\phi$  эти средние изменяются как  $\langle (S^+)^{2S} \rangle \rightarrow \langle (S^+)^{2S} \rangle \exp(2Si\phi)$ , в то время как для «обычного» вектора  $\mathbf{u}$  имеет место преобразование  $(u_x + iu_y) \rightarrow (u_x + iu_y) \exp(i\phi)$ . Следовательно, получается следующая картина: обход вокруг простейшего вихря с  $m = 1$  в нематике со спином  $S$  соответствует повороту спиновой системы магнетика на угол  $\pi m/S$ .

Во многих работах для спина  $S = 1$  использовалось представление через «декартовы» векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  [33,40]. В этих терминах для вихря с  $m = 1$  получаются состояния с разрывами  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  вида  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \rightarrow (-\mathbf{u}_0, -\mathbf{v}_0)$ . Это дало основание назвать такой вихрь дисклинацией [40], по аналогии с дисклинациями вектора-директора в нематических жидких кристаллах [41]. Для нематика со спином  $S = 3/2$  величины  $\langle (S^\pm)^3 \rangle$  характеризуются наличием оси третьего порядка, перпендикулярной плоскости  $xy$ . Здесь такой простой аналогии с жидкими кристаллами нет, и качестве наглядного образа можно выбрать правильный треугольник, лежащий в этой плоскости. Поворот такого треугольника на угол  $2\pi/3$  переводит его в себя, что обеспечивает непрерывность наблюдаемых величин. Сопоставление переменных  $\sigma_i$  и мультипольных переменных достаточно простое (см. рис. 1), и далее будет использоваться универсальное представление результатов через переменную  $\sigma_i$ .

Статические свойства ферромагнетика и антиферромагнетика для классических спинов (единичных векторов) в рамках модели (11) одинаковы. Структура статического вихря спинового нематика вблизи критической точки  $\kappa \approx -1$  получается из того же универсального решения  $\alpha = \alpha_0(r)$  простой заменой  $l_0 \rightarrow (a/2)\sqrt{1/(1+\kappa)}$ . Фактически «антиферромагнитное» поведение имеет место только в ядре вихря для компонент  $\sigma_{3\mathbf{I}} = \langle S_z \rangle$ , см. преобразование (15). Это поведение хорошо видно на рисунках, представляющих найденную численно структуру вихря, (сравните рис. 2(б)(в)).

Динамические свойства топологических солитонов часто являются достаточно нетривиальными. Динамика вихрей в спиновых нематиках наиболее интересна для случая, когда градиенты малы, вихрь имеет развитое ядро и малы эффекты решеточного пиннинга.

В рамках континуального приближения вопрос о вынужденном движении вихря можно рассмотреть на основе анализа полевого импульса спинового нематика  $\mathbf{P}$ . Согласно формуле, как и для ферромагнетика,  $\mathbf{P}$  содержится недифференцируемое выражение  $\nabla\beta$ . Используя метод [48], для вихря в нематике со спином  $S = 1$  было обнаружено присутствие гиросилы  $\mathbf{F}_{\text{giro}} = G[\mathbf{e}_z \times \mathbf{V}]$  [32]. Такая гироскопическая сила эквивалентна силе Лоренца для заряженной частицы в однородном маг-

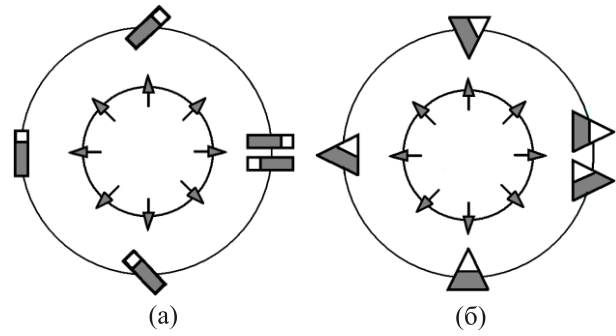


Рис. 1. Наглядная картина универсальных переменных  $\sigma_i$  (стрелки) и преобразования мультипольных переменных (для  $S = 1$  проекции квадрупольного эллипсоида изображены прямоугольниками, для  $S = 3/2$  использованы правильные треугольники) в вихре с топологическим зарядом  $m = 1$  при различных значениях спина  $S$ ;  $S = 1$  (а),  $S = 3/2$  (б). Чтобы легче было проследить за поворотом фигуры, один из ее краев заштрихован.

нитном поле  $\mathbf{B} = G\mathbf{e}_z$  и хорошо известна для вихрей в сверхтекучих системах и топологических солитонов в ферромагнетиках. В рамках лагранжиана (18) легко показать, что этот результат справедлив и для общей модели, значение гиросилы  $G = \pi m\hbar/a^2$  не зависит от спина нематика. Нетрудно также показать, что для планарного вихря, в котором  $\alpha = \pi/2 = \text{const}$ , гироскопические свойства отсутствуют.

Рассмотрим теперь динамику вихрей около антиферромагнитной критической точки  $-1 < \kappa < -\kappa_c$ . Как отмечено выше, в этом случае задача сводится к анализу «спиновой гамильтониана» для антиферромагнетика и все компоненты  $\tau_i^{(1)}$  и  $\tau_i^{(2)}$  в разных подрешетках (узлах  $\mathbf{I}_1$  и  $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 + \mathbf{a}$ ) имеют противоположные знаки. Динамика антиферромагнетика принципиально отличается от динамики ферромагнетика (см. монографии и обзоры [49–51]). Удобно ввести неприводимые векторы  $\mu_i = (\tau_i^{(1)} + \tau_i^{(2)})/2$  и  $\lambda_i = (\tau_i^{(1)} - \tau_i^{(2)})/2$ , которые удовлетворяют условиям  $\lambda_i\mu_i = 0$  и  $\lambda_i^2 + \mu_i^2 = 1$ .  $\mu_i$  и  $\lambda_i$  аналогичны векторам суммарной намагниченности и вектора антиферромагнетизма для обычного антиферромагнетика соответственно. Для слабой анизотропии выполнено условие  $\mu_i^2 \ll \lambda_i^2 \approx 1$ , и вектор  $\lambda_i$  можно считать единичным. В этом случае динамика определяется замкнутым уравнением (уравнением сигма-модели) только для вектора  $\lambda_i$ , а вектор  $\mu_i$  является вспомогательной переменной,  $\mu_i = \hbar\epsilon_{ijk}[\lambda_j \times \partial\lambda_k/\partial t]/J$  [49–51]. Лагранжиан сигма-модели для вектора  $\lambda_i$  обладает формальной лоренц-инвариантностью с характерной скоростью  $c = 4\sqrt{2Ja}/\hbar$ . Это обстоятельство существенно упрощает анализ динамики солитонов, позволяя построить решение для движущегося солитона по известному неподвижному решению (см. подробнее анализ двумерных солитонов [52] и вихрей [53] в антиферромагнетиках).



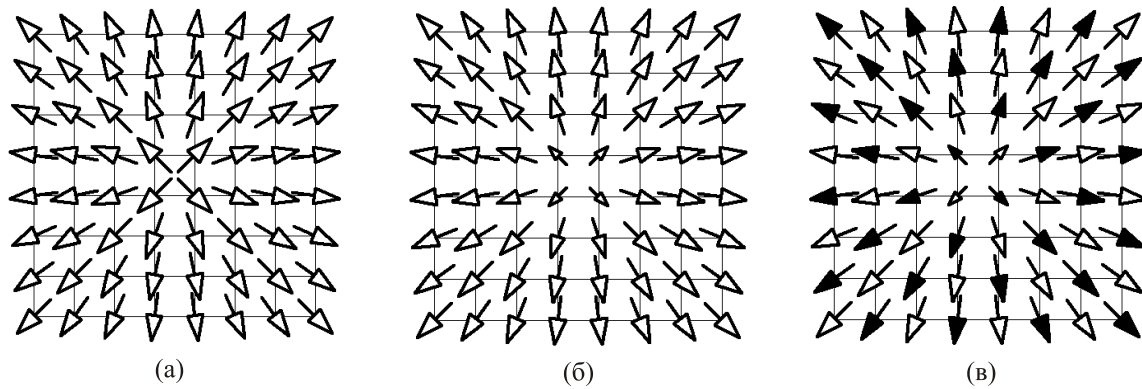


Рис. 2. Распределение дискретных переменных  $\sigma_{1i}$  в вихре с топологическим зарядом  $m = 1$  при различных значениях  $\kappa$ : 0 (а),  $0,9 > \kappa_c$  (б) и  $\kappa = -0,9$  (в). Для наглядности представлена только часть фрагмента, выбранного для численного счета. Величины  $\sigma_{1i}$  для каждого узла представлены двумя «квадропольными» компонентами  $\sigma_{1,1}$  и  $\sigma_{2,1}$ , масштаб плоского вектора  $(\sigma_{1,1}, \sigma_{2,1})$  дает представление о величине  $\sigma_{3,1}$ , положительные или отрицательные значения  $\sigma_{3,1}$  показаны светлыми или темными стрелками соответственно.

#### 4. Анализ вихрей в дискретной модели

Континуальное приближение, строго говоря, применимо только в том случае, когда характерный размер солитона значительно больше межатомного расстояния,  $|\nabla\alpha| \ll 1/a$ . Это условие выполнено в предельных случаях  $1-\kappa \ll 1$  и  $1+\kappa \ll 1$ , когда характерные размеры близки и значительно больше постоянной решетки  $l_0 \approx \bar{l}_0 \gg a$ . Однако в области устойчивости нематической фазы такое условие нарушается. Например, даже для достаточно малого  $1-\kappa = 0.1$  величина  $\bar{l} = 1,5a$  и лишь незначительно превышает постоянную решетки  $a$ . Величина  $\bar{l}_0/a \approx (1/2)\sqrt{\kappa} \ll 1$  в центре этой области при  $\kappa \rightarrow 0$  обращается в нуль. Поэтому применимость континуального приближения заведомо не ясна, и следует ожидать существенных эффектов дискретности.

Рассмотрим дискретную версию модели нематика (11) на квадратной решетке. Для анализа статических солитонов будем искать численно минимум энергии  $W(\alpha_1, \beta_1)$  по отношению к переменным  $\alpha_1, \beta_1$ . Использовалась та же программа, что и в [31,37]: энергии минимизировались с применением стандартного алгоритма Гаусса–Зейделя, затем вычислялись значения энергии и суммарной  $z$ -проекции спина. Анализ проведен для приблизительно кругового фрагмента, вырезанного из квадратной решетки размером  $20 \times 20$ . Такой небольшой размер вполне достаточен, так как при  $\bar{l}_0 \sim a$  размер ядра вихря сильно локализован, а влияние границ на структуру пренебрежимо мало.

Как и следовало ожидать, при малых значениях  $(1-\kappa)$  численный анализ показывает практически радиально-симметричное распределение значений  $\alpha_1$  с масштабом в несколько постоянных решетки  $a$ . Зависимость  $\alpha_1 \approx \alpha(|r|)$  фактически повторяет кривые  $\alpha_0(r)$ , полученные в континуальном приближении. В общем же случае ситуация такая же, как для магнитных вих-

рей: ядро существует только при достаточно малых значениях  $(1-|\kappa|)$  (см. рис. 2(а)). При  $\kappa_c < \kappa < 1$  ядро отвечает ферромагнитной ориентации величин  $\sigma_3$ , т.е. компонент спина  $\langle S_z \rangle$ , а при  $-1 < \kappa < -\kappa_c$  имеет место антипараллельная ориентация компонент спина  $\langle S_z \rangle$  в соседних узлах (см. рис. 2(в)). Такой вихрь можно назвать антиферромагнитным.

Зависимость энергии вихря от параметра  $\kappa$  представлена на рис. 3. Так как для планарного распределения  $\sigma_i$  энергия не зависит от  $\kappa$ , это значение энергии вихря выбрано как начало отсчета. При появлении ядра энергия понижается, но конкретную точку появления такой аномалии определить достаточно сложно. Для антиферромагнитной критической точки поведение энергии полностью совпадает с тем, что имеет место для ферромагнитной критической точки.

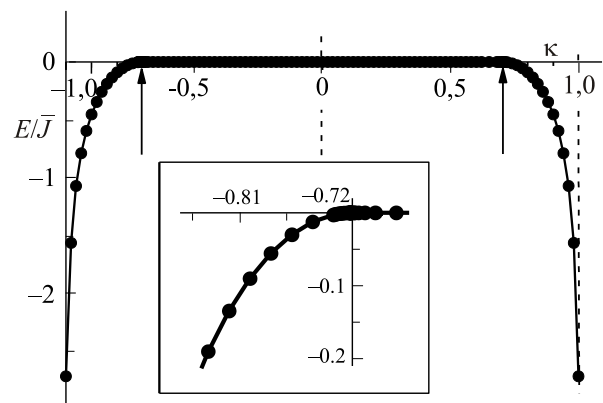


Рис. 3. Зависимость энергии вихря  $E$  (нормированное на число спинов в системе, в единицах  $\bar{J}$ ) от параметра  $\kappa$ , символы — значения, полученные численно, линия проведена для наглядности. Вертикальными стрелками обозначены критические точки. На вставке — детали поведения вблизи критической точки появления антиферромагнитного ядра.



Следует отметить, что появление вихревого ядра, ферромагнитного или антиферромагнитного, связано с понижением симметрии вихря, подобно стандартному поведению параметра порядка вблизи точки фазового перехода второго рода. Это может быть использовано для симметричного анализа переходов различных вихревых состояний. Такой подход полезен, так как численный анализ вблизи критических точек усложняется из-за «критического замедления» (подобно тому, что имеет место вблизи стандартных фазовых переходов второго рода), что проявляется в сильном возрастании времени численного расчета. Для обоих установленных критических значений  $\kappa$  удобно исследовать те величины, которые определяют симметрию вихря, выбрав их в качестве параметра порядка.

Величина суммарной компоненты спина по оси  $z$  удобна для анализа критического поведения в ферромагнитной критической точке (см. рис. 4). Поведение этой величины в точке появления ядра вихря с хорошей точностью следует корневой зависимости, характерной для параметра порядка в теории фазовых переходов Ландау. Для антиферромагнитной критической точки в качестве параметра порядка можно выбрать разности средних значений спинов в подрешетках, для конкретного анализа были взяты значения для четырех центральных спинов (см. рис. 5). Таким образом, появление вихревого ядра, ферромагнитного или антиферромагнитного, можно рассматривать как некоторую механическую аналогию фазового перехода второго рода. Присутствие корневых сингулярностей при  $\kappa \rightarrow \kappa_c$  установить гораздо легче (см. рис. 4, 5). Найденное значение  $\kappa_c = 0,7034$  совпадает с найденным ранее путем анализа больших решеточных систем [44].

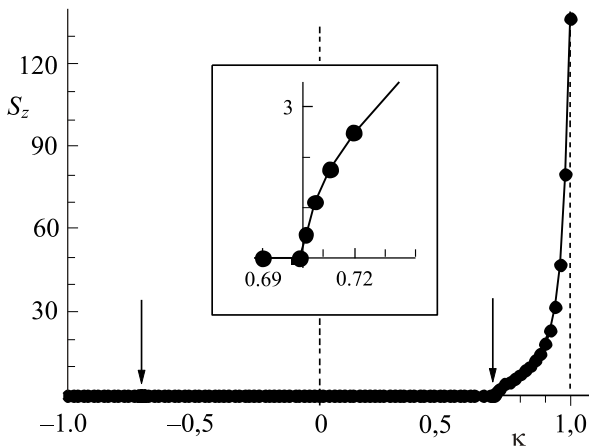


Рис. 4. Зависимость суммарного спина в ядре вихря  $S_z$  от параметра  $\kappa$ , символы — значения, полученные численно, сплошная линия проведена для наглядности. На вставке — детали поведения вблизи критической точки появления ферромагнитного ядра, линия: подгонка зависимостью типа  $\sqrt{\kappa_c - \kappa}$ .

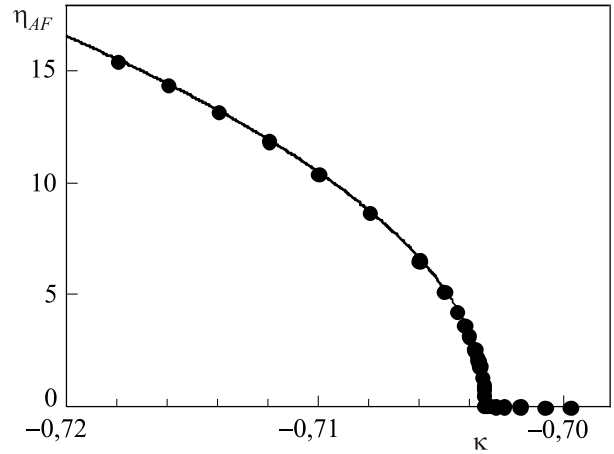


Рис. 5. Зависимость антиферромагнитного параметра порядка  $\eta_{AF}$ ,  $\eta_{AF} = \pi/2 \pm \alpha_a$ , где  $\alpha_a$  — значения для четырех центральных спинов, вблизи критической точки появления антиферромагнитного ядра от параметра  $\kappa$  (символы), линия — подгонка зависимостью типа  $\sqrt{-\kappa - |\kappa_c|} = \sqrt{|\kappa| - |\kappa_c|}$ .

### 5. Заключительные замечания

Для магнетика с сильным биквадратичным взаимодействием в состоянии спинового нематика существуют двумерные топологические дефекты — нематические вихри. При обходе вокруг линии такого вихря с целочисленным топологическим индексом  $m$  мультипольные средние, описывающие нематический порядок, поворачиваются на угол  $2\pi m S$ . Значению  $m = 1$  соответствует минимально возможный угол поворота, обеспечивающий непрерывность всех спиновых средних. Обнаружены несколько типов таких вихрей с сингулярностью в центре и с несингулярным ядром, в котором разрушен нематический порядок. Ядро характеризуется восстановлением магнитного порядка, который может быть ферромагнитным или антиферромагнитным. Предложено описание, базирующегося на введении «минимального» вектора состояния, определяющегося тремя параметрами  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , которые можно рассматривать как компоненты единичного трехмерного вектора.  $\sigma_1, \sigma_2$  описывают мультипольные переменные и  $\sigma_3$  определяет среднее значение спина. В рамках этих переменных существует универсальное описание структуры вихря для спинового нематика  $S = 1$  и  $S = 3/2$ . Более того, показана возможность применения результатов, полученных для различных солитонов классических моделей ферромагнетиков и антиферромагнетиков, для описания спиновых нематиков.

В настоящее время экспериментально реализуются ультрахолодные газы атомов со спином до  $S = 3$  (для атомов хрома  $^{52}\text{Cr}$ ) [5]. С точки зрения эксперимента представляет интерес обобщение данного подхода на случай более высоких значений спина, как целых ( $S = 2, 3$ ), так и полуцелых, например  $S = 5/2$ . Для магне-

тика с  $S = 2$  хорошо изучены различные нематические состояния [54–57]. Среди них есть «квадратное» состояние с осью симметрии  $C_4$ . Наши результаты легко обобщаются для этого состояния, а также для «шестиугольного» состояния с осью симметрии  $C_6$ , описанного в работе [57] для магнетика с  $S = 3$ . Однако структура «минимального» вектора состояния для нематиков с  $S > 3/2$  более сложная, чем использованные выше при записи (3) и (6). Для случая с  $S = 2$  она включает состояния типа  $|\Psi_T\rangle = Z_1|-2\rangle + Z_2|1\rangle$  или  $|\Psi_N\rangle = Z_{(-)}|-2\rangle + Z_0|0\rangle + Z_{(+)}|2\rangle$ , симметрия которых ниже, чем в случае (3) и (6). Для общего состояния  $|\Psi_N\rangle$  нужно вводить более сложное представление, чем использованное в данной работе представление через трехкомпонентный параметр порядка  $\sigma_i$ . Применимость указанного подхода для состояния  $|\Psi_T\rangle$ , определяющего при  $|Z_2| = 2|Z_1|$  спиновый нематик с тетрагональной симметрией мультипольных переменных, требует дополнительного исследования.

Авторы благодарны В.Г. Барьяхтару и А.К. Колежуку за полезные обсуждения. О.К. и Ю.Ф. частично поддержаны совместным грантом РФФИ и Республики Крым 14-42-01527 «р\_юг\_а».

- Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Издание второе, переработанное и дополненное Е.М. Лифшицем и Л.П. Питаевским, Наука, Москва (1982).
- А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
- В.М. Локтев, В.С. Островский, *ФНТ* **20**, 983 (1994) [*Low Temp. Phys.* **20**, 775 (1994)].
- Э.Л. Нагаев, *Магнетики со сложными обменными взаимодействиями*, Наука, Москва (1988).
- Y. Kawaguchi and M. Ueda, *Phys. Rep.* **520**, 253 (2012).
- P. Santini, S. Carretta, G. Amoretti, R. Caciuffo, N. Magnani, and G.H. Lander, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 807 (2009).
- J. A. Mydosh and P.M. Oppeneer, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1301 (2011).
- А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, РАН УрО, Ин-т физ. Металлов, Екатеринбург (2009).
- А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
- А.М. Косевич, В.А. Иванов, and А.С. Ковалев, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
- А.М. Косевич, В.А. Иванов and А.С. Ковалев, *Physica D* **3**, 363 (1981).
- M.A. Hofer, M. Sommacal, and T.J. Silva, *Phys. Rev. B* **85**, 214433 (2012).
- S.M. Mohseni, S.R. Sani, J. Persson, T.N.A. Nguyen, S. Chung, Y. Pogoryelov, P.K. Muduli, E. Iacocca, A. Eklund, R.K. Dumas, S. Bonetti, A. Deac, M.A. Hofer, and J. Åkerman, *Science* **339**, 1295 (2013).
- А.А. Белавин, А.М. Поляков, *Письма ЖЭТФ* **22**, 503 (1975).
- Б.А. Иванов, А.М. Косевич, *Письма ЖЭТФ* **24**, 495 (1976).
- А.С. Ковалев, А.М. Косевич, К.В. Маслов, *Письма ЖЭТФ* **30**, 321 (1979).
- Д.В. Филин, Е.Г. Галкина, Б.А. Иванов, *Письма ЖЭТФ* **97**, 291 (2013).
- C. Schütte and M. Garst, *Phys. Rev. B* **90**, 094423 (2014).
- S. Komineas, *Physica D* **291**, 815 (2015).
- A.F. Andreev and I.A. Grishchuk, *Sov. Phys. JETP* **60**, 267 (1984).
- A.V. Chubukov, *J. Phys. Condens. Matter* **2**, 1593 (1990).
- V.I. Marchenko, *JETP Lett.* **48**, 427 (1988).
- A.V. Chubukov, K.I. Ivanova, P.Ch. Ivanov and E.R. Korutcheva, *J. Phys.: Condens. Matter* **3**, 2665 (1991).
- Yu.A. Fridman, O.A. Kosmachev, A.K. Kolezhuk, and B.A. Ivanov, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 097202 (2011).
- Yu.A. Fridman, O.A. Kosmachev, and P.N. Klevets, *J. Magn. Magn. Matter* **320**, 435 (2008).
- V.G. Bar'yakhtar, V.I. Butrim, A.K. Kolezhuk, and B.A. Ivanov, *Phys. Rev. B* **87**, 224407 (2013).
- A. Smerald and N. Shannon, *Phys. Rev. B* **88**, 184430 (2013).
- M.Y. Kovalevsky and A. V. Glushchenko, *J. Magn. Magn. Mater* **355**, 192 (2014).
- M.Y. Kovalevsky and A.V. Glushchenko, *Ann. Phys.* **349**, 55 (2014).
- О.А. Космачев, Ю.А. Фридман, Е.Г. Галкина, Б.А. Иванов, *ЖЭТФ* **147**, 320 (2015).
- Б.А. Иванов, Р.С. Химин, *ЖЭТФ* **131**, 343 (2007).
- Б.А. Иванов, *Письма ЖЭТФ* **84**, 90 (2006).
- N.A. Mikushina and A.S. Moskvina, *Phys. Lett. A* **302**, 8 (2002).
- В.А. Иванов, R.S. Khymyn, and A.K. Kolezhuk, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 047203 (2008).
- E.G. Galkina, V.I. Butrim, Yu.A. Fridman, B.A. Ivanov, and Franco Nori, *Phys. Rev. B* **88**, 144420 (2013).
- Е.Г. Галкина, Б.А. Иванов, В.И. Бутрим, *ФНТ* **40**, 817 (2014) [*Low Temp. Phys.* **40**, 635 (2014)].
- В.А. Иванов, А.Ю. Галкин, R.S. Khymyn, and А.Ю. Меркулов, *Phys. Rev. B* **77**, 064402 (2008).
- А.М. Переломов, *УФН* **123**, 23 (1977).
- A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer-Verlag, Berlin (1986).
- В.А. Иванов and А.К. Kolezhuk, *Phys. Rev. B* **68**, 052401 (2003).
- П.Де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977).
- N. Papanicolaou, *Nuclear Phys. B* **305**, 367 (1988).
- M.E. Gouvêa, G.M. Wysin, A.R. Bishop, and F.G. Mertens, *Phys. Rev. B* **39**, 11840 (1989).
- G.M. Wysin, *Phys. Rev. B* **49**, 8780 (1994).
- A.R. Völkel, G.M. Wysin, A.R. Bishop, and F.G. Mertens, *Phys. Rev. B* **44**, 10066 (1991).
- J. Karadamoglou and N. Papanicolaou, *Phys. Rev. B* **60**, 9477 (1999).

47. В. П. Воронов, Б. А. Иванов, А. М. Косевич, *ЖЭТФ* **84**, 2235 (1983).
48. В. А. Ivanov and V.A. Stephanovich, *Phys. Lett. A* **141**, 89 (1989).
49. Е.А. Туров, А.В. Колчанов, В.В. Меньшенин, И.Ф. Мирсаев, В.В. Николаев, *Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков*, Физматлит, Москва (2001).
50. Б.А. Иванов, Б.А. Колежук, *ФНТ* **21**, 355 (1995) [*Low Temp. Phys.* **21**, 275 (1995)].
51. Б.А. Иванов, *ФНТ* **31**, 841 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 635 (2005)].
52. И.В. Барьяхтар, Б.А. Иванов, *ЖЭТФ* **85**, 328 (1983).
53. В.А. Ivanov and D.D. Sheka, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 404 (1994).
54. Tin-Lun Ho, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 742 (1998).
55. C.V. Ciobanu, S.-K. Yip, and Tin-Lun Ho, *Phys. Rev. A* **61**, 033607 (2000).
56. M. Ueda and M. Koashi, *Phys. Rev. A* **65**, 063602 (2002).
57. R. Barnett, A.M. Turner, and E. Demler, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 180412 (2006).

## Two-dimensional solitons in spin nematic states for magnets with isotropic exchange interaction

E.G. Galkina, B.A. Ivanov, O.A. Kosmachev, and Yu.A. Fridman

Two-dimensional topological vortex-like solitons are investigated for spin nematic states for magnets with spins  $S = 1$  and  $S = 3/2$ . Either pure-multipole vortices, with quadrupolar order parameter for  $S = 1$  system and octupolar order parameter for  $S = 3/2$  system, or vortices with non-singular core, are realized for different parameters of the system. The vortex core corresponds to the macroscopic region with broken nematic order. The transition to the core-full vortices takes place at some critical value of system parameters. Either ferromagnetic vortex with saturated magnetic moment within the core or the vortex with antiferromagnetic order are formed. For ferromagnetic vortices, dynamical properties are characterized by the presence of the gyroforce, whereas the dynamics is Lorentz-invariant (as for antiferromagnets within the sigma-model) for the vortex with antiferromagnetic core.

PACS: 75.10.Jm Quantized spin models, including quantum spin frustration;  
05.45.Yv Solitons;  
03.75.Kk Dynamic properties of condensates; collective and hydrodynamic excitations, superfluid flow.

Keywords: spin nematic, soliton, Landau-Lifshitz equation.