

Фононный перенос энергии в наноструктурах, содержащих два металлических слоя

А.И. Безуглый

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: bezuglyj@kipt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 12 февраля 2015 г., после переработки 19 марта 2015 г., опубликована онлайн 23 июня 2015 г.

Рассмотрен режим стационарного нагрева системы, состоящей из двух металлических слоев M_1 и M_2 , разделенных диэлектрической прослойкой I . Считается, что в слоях поглощается мощность W_1 и W_2 , а массивная диэлектрическая подложка, на которой расположена $M_1/I/M_2$ -система, является термостатом. На основании кинетического уравнения для фононной функции распределения проанализирован фононный перенос тепла в $M_1/I/M_2$ -системе и найдена зависимость электронных температур слоев, T_1 и T_2 , от W_1 и W_2 . Предельные случаи толстых и тонких слоев рассмотрены в реальной экспериментальной ситуации, когда один из слоев нагревается, а другой слой служит термометром. Проведено сравнение результатов теории с экспериментом.

Розглянуто режим стаціонарного нагріву системи, що складається з двох металевих шарів M_1 і M_2 , розділених діелектричним прошарком I . Вважається, що в шарах поглинається потужність W_1 і W_2 , а масивна діелектрична підкладка, на якій розташована $M_1/I/M_2$ -система, є термостатом. На підставі кінетичного рівняння для фононної функції розподілу проаналізовано фононне перенесення тепла в $M_1/I/M_2$ -системі і знайдена залежність електронних температур шарів, T_1 і T_2 від W_1 і W_2 . Граничні випадки товстих і тонких шарів розглянуто в реальній експериментальній ситуації, коли один з шарів нагрівається, а інший шар служить термометром. Проведено порівняння результатів теорії з експериментом.

PACS: 63.20.kd Фонон-электронное взаимодействие;

66.70.-f Неэлектронная теплопроводность и распространение тепловых импульсов в твердых телах, тепловые волны.

Ключевые слова: двухслойная наноструктура, стационарный нагрев, фононный теплообмен, низкие температуры.

1. Введение

Границы между материалами в значительной степени определяют специфику и величину тепловых потоков в твердотельных наноструктурах. Так, перенос тепла через границу между двумя металлами (M_1/M_2) осуществляется в основном электронами [1,2], тогда как перенос тепла через границу металл–диэлектрик (M/I) или между двумя диэлектриками имеет фононную природу [3–6]. Типичной физической ситуацией, где тепло переносится фононами через M/I -границу, является отвод тепла от нагретой металлической пленки в холодную диэлектрическую подложку. Обычно в эксперименте пленка нагревается либо транспортным током, либо электромагнитным излучением от СВЧ источника

или лазера. Во всех этих случаях энергия электромагнитного поля сначала поглощается электронами, затем перетекает в фононную подсистему, и уже обмен фононами между пленкой и подложкой приводит к охлаждению пленки.

Весьма часто переход энергии от электронов к фононам описывается так называемой «двухтемпературной моделью», которая основана на предположении, что в пленке электроны и фононы термализованы и характеризуются температурами T_e и T_p соответственно [7–9]. При этом мощность, передаваемая от электронов к фононам имеет вид $P_{ep} = f(T_e) - f(T_p)$, где функция $f(T)$ пропорциональна T^5 в области температур, низких по сравнению с дебаевской температурой Θ_D , и пропорциональна T при $T \gg \Theta_D$.

Условием термализации электронной подсистемы является более высокая частота электрон-электронных столкновений по сравнению с частотой столкновений электронов с фононами. В области низких температур $T_e \ll \Theta_D$ для чистых металлов это условие выполняется, если $T_e \ll \Theta_D^2/T_F$, где T_F — фермиевская температура. Отсюда следует, что в чистых металлах электронная подсистема термализована при субкельвиновых температурах. В грязных металлах из-за усиления электрон-электронного и ослабления электрон-фононного взаимодействия условие термализации электронов выполняется при $T_e \lesssim 10$ К [10]. В дальнейшем будем рассматривать именно такие достаточно низкие температуры и считать электроны термализованными.

В противоположность электронам в низкотемпературной области фононы не термализованы и не имеют собственной температуры, поскольку частота фонон-фононных столкновений на несколько порядков меньше частоты столкновений фононов с электронами [11]. Это означает, что при $T_e \ll \Theta_D$ корректное описание фононной подсистемы и фононного переноса тепла в структурах, содержащих металлические и диэлектрические слои, требует подхода, основанного на кинетическом уравнении для фононной функции распределения. В случае стационарного нагрева пленки, расположенной на диэлектрической подложке, такой подход был сформулирован Шкловским [12,13]. В последующем кинетический подход был распространен на нестационарный случай Шкловским и автором [14–16]. Этот же формализм использован в настоящей статье для структуры $M_1/I/M_2$, представляющей собой два металлических слоя, разделенных диэлектрической прослойкой.

Наш интерес к $M_1/I/M_2$ -структурам в большой мере связан с экспериментом [17], в котором в двухслойной системе один из металлических слоев нагревался или охлаждался и при этом измерялись электронные температуры обоих слоев. Заметим, что авторская интерпретация эксперимента основана на предположении, что фононы в каждом из слоев термализованы. Поскольку температура эксперимента была меньше или порядка 1 К, предположение о фононной термализации не согласуется с приведенным выше утверждением, что при $T \ll \Theta_D$ фонон-фононные столкновения происходят гораздо реже, чем фонон-электронные. Чтобы устранить такую несогласованность, в настоящей статье дано кинетическое описание экспериментальных результатов, опубликованных в [17]. В рамках кинетического подхода на основании уравнения для фононной функции распределения мы проанализировали фононный перенос тепла в $M_1/I/M_2$ -системе и нашли зависимость электронных температур слоев, T_1 и T_2 , от удельной мощности тепловых источников в слоях, W_1 и W_2 , при произвольных толщинах слоев. Для прояснения физической картины фононного теплообмена были рассмотрены

предельные случаи толстых и тонких слоев, когда неравновесные фононы в основном поглощаются в слое или соответственно покидают его без перепоглощения. Отметим, что в эксперименте толщины металлических слоев M_1 и M_2 и диэлектрической прослойки I имеют порядок 10–100 нм, что позволяет относить подобные $M_1/I/M_2$ -сэндвичи к наноструктурам.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 вычислены электронные температуры металлических слоев M_1 и M_2 при их стационарном нагреве (или охлаждении, если $W < 0$). В разд. 3 проанализированы предельные случаи толстых и тонких слоев с точки зрения специфической термометрии, когда один из слоев нагревается (или охлаждается), а другой слой служит термометром. В разд. 4 проведено сравнение полученных результатов с экспериментом [17] и показано, что теория, не привлекающая представление о фононной температуре, хорошо описывает эксперимент. Раздел 5 содержит наиболее существенные выводы.

2. Электронные температуры металлических слоев

Рассмотрим слоистую структуру $M_1/I/M_2$, которая состоит из двух металлических слоев толщиной d_1 и d_2 , разделенных диэлектрической прослойкой толщиной d_i (рис. 1). Слой M_1 лежит на массивной диэлектрической подложке, которая имеет температуру T_B и играет роль термостата. Чтобы проанализировать низкотемпературную кинетику электронов и фононов в такой структуре, воспользуемся простой микроскопической моделью. Будем считать, что металлы M_1 и M_2 идентичны и энергетический спектр электронов в металле квадратичен и изотропен: $\varepsilon(\mathbf{p}) = p^2/(2m)$; p — квазиимпульс электрона, m — его эффективная масса. При низких температурах закон дисперсии фононов можно аппроксимировать линейным соотношением: $\omega_q = sq$, где q — модуль волнового вектора фонона, а s — скорость продольного звука. Здесь и далее учитываем только одну, продольную, ветвь колебаний решетки. Учет поперечных мод колебаний не меняет физическую картину релаксации энергии в слоистой структуре, но в то же время конверсия мод на межслоевых границах настолько усложняет описание, что аналитический подход вряд ли возможен (см. обсуждение этого вопроса в [15,16]). Перенос энергии между электронами и фононами — следствие электрон-фононного взаимодействия, для которого используем приближение потенциала деформации. Имеющий фононную природу обмен энергией между слоями будем описывать в терминах хорошо известной модели акустического рассогласования сред [3–5].

В интересующей нас области температур электрон-электронные столкновения доминируют над электрон-фононными, а значит, электронные подсистемы металлических слоев M_1 и M_2 термализованы и характеризуются температурами T_1 и T_2 соответственно. Будем

считать, что вследствие высокой электронной теплопроводности эти температуры не зависят от перпендикулярной к слоям координаты z , т.е. являются константами. Напротив, фононная функция распределения в k -ом ($k = 1, 2$) металлическом слое, $N_{\mathbf{q}}^{(k)}$, зависит от z и подчиняется кинетическому уравнению

$$s_z \frac{dN_{\mathbf{q}}^{(k)}}{dz} = I_{pe}(N_{\mathbf{q}}^{(k)}), \quad (1)$$

где s_z — проекция скорости фонона на ось z , I_{pe} — интеграл фонон-электронных столкновений, который в случае фермиевской функции распределения электронов имеет весьма простой вид:

$$I_{pe}(N_{\mathbf{q}}^{(k)}) = v[n_q(T_k) - N_{\mathbf{q}}^{(k)}(z)]. \quad (2)$$

Здесь $n_q(T) = [\exp(\hbar\omega_q / k_B T) - 1]^{-1}$ — бозевская функция распределения (k_B — постоянная Больцмана). В приближении потенциала деформации частота фонон-электронных столкновений дается формулой

$$v = \frac{m^2 \mu^2}{2\pi \hbar^3 \rho s} \omega_q, \quad (3)$$

где μ — константа потенциала деформации, имеющая порядок энергии Ферми ε_F ; ρ — плотность металла. Заметим, что формула (3) относится к случаю чистого металла. В грязных металлах зависимость v от ω_q можно аппроксимировать степенной функцией с показателем степени, зависящим от типа дефектов [14,15].

Чтобы сформулировать граничные условия, обратимся к рис. 1, где изображены процессы отражения и преломления фононов на границах сред. В металле M_1 на границе с подложкой функция распределения фононов, имеющих положительную z -компоненту волнового вектора, содержит два вклада. Первый из них определяется фононами, пришедшими из подложки, второй — фононами металла, отраженными от границы:

$$N_{\mathbf{q}}^{(1)}(0) = \alpha n_q(T_B) + \beta N_{\mathbf{q}'}^{(1)}(0). \quad (4)$$

Здесь α и β — коэффициенты прохождения и отражения для границы «металл–подложка», T_B — температура подложки. В записи граничных условий волновые векторы \mathbf{q} и \mathbf{q}' представляют фононы, имеющие положительную или отрицательную z -компоненту волнового вектора: $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z > 0)$, $\mathbf{q}' = (q_x, q_y, -q_z)$.

Условие (4) предполагает, что фононы, вылетевшие из слоя M_1 в подложку, назад уже не возвращаются. Такая картина характерна для монокристаллических подложек с высокой теплопроводностью и достаточно узких пленок.

В модели акустического рассогласования [3–5] вероятность прохождения α зависит от угла падения

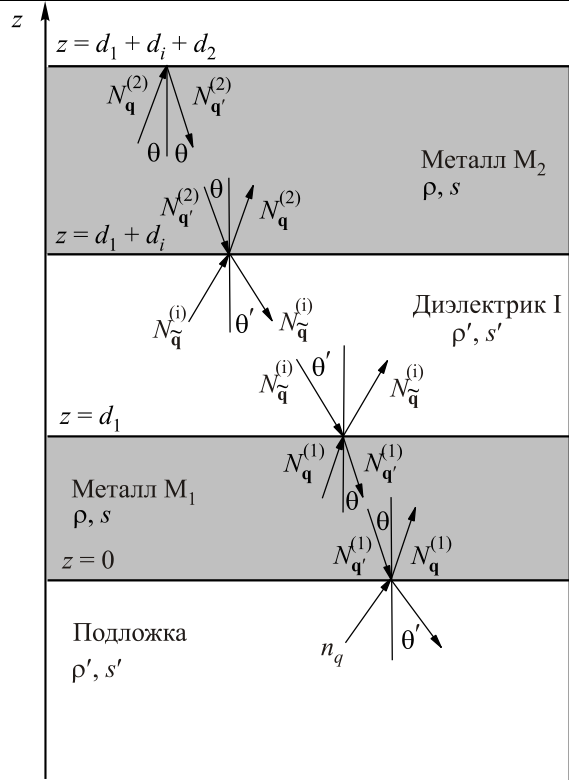


Рис. 1. Преломление и отражение фононов на границах сред для структуры $M_1/I/M_2$, лежащей на диэлектрической подложке. Показаны направления волновых векторов фононов и числа заполнения соответствующих фононных состояний. Углы θ и θ' связаны соотношением $s' \sin \theta = s \sin \theta'$, где s (s') — скорость продольного звука в металле (диэлектрике). Считается, что металлы M_1 и M_2 одинаковы и материал диэлектрической подложки совпадает с материалом прослойки I.

фонона θ и акустических импедансов смежных сред $Z = \rho s$ и $Z' = \rho' s'$:

$$\alpha(\theta) = \frac{4ZZ' \cos \theta \cos \theta'}{(Z \cos \theta' + Z' \cos \theta)^2}. \quad (5)$$

Углы падения и преломления связаны соотношением $s' \sin \theta = s \sin \theta'$.

Условия на границах $z = d_1$ и $z = d_1 + d_i$ записываются аналогично соотношению (4). При $z = d_1$ имеем

$$N_{\mathbf{q}}^{(i)}(d_1) = \alpha N_{\mathbf{q}}^{(1)}(d_1) + \beta N_{\mathbf{q}'}^{(i)}(d_1), \quad (6)$$

$$N_{\mathbf{q}'}^{(1)}(d_1) = \alpha N_{\mathbf{q}}^{(i)}(d_1) + \beta N_{\mathbf{q}}^{(1)}(d_1), \quad (7)$$

тогда как при $z = d_1 + d_i$

$$N_{\mathbf{q}}^{(2)}(d_1 + d_i) = \alpha N_{\mathbf{q}}^{(i)}(d_1 + d_i) + \beta N_{\mathbf{q}'}^{(2)}(d_1 + d_i), \quad (8)$$

$$N_{\mathbf{q}'}^{(i)}(d_1 + d_i) = \alpha N_{\mathbf{q}}^{(2)}(d_1 + d_i) + \beta N_{\mathbf{q}}^{(i)}(d_1 + d_i). \quad (9)$$

При записи граничных условий использовали равенство $\alpha(\theta) = \alpha(\theta')$. Волновые векторы в прослойке I обо-

значены $\tilde{\mathbf{q}}$ ($\tilde{\mathbf{q}}'$), если они имеют положительную (отрицательную) z -компоненту. Отметим, что граничные условия написаны в предположении, что металлы M_1 и M_2 одинаковы. Также считались одинаковыми материалы подложки и прослойки I. Эти предположения не влияют на физическую картину фононного теплообмена, но существенно упрощают его анализ.

Последнее граничное условие — условие зеркального отражения фононов на внешней границе металлического слоя M_2 :

$$N_{\mathbf{q}}^{(2)}(d_1 + d_i + d_2) = N_{\mathbf{q}'}^{(2)}(d_1 + d_i + d_2). \quad (10)$$

Решение кинетического уравнения (1) в металлическом слое с номером k имеет вид

$$N_{\mathbf{q}(\mathbf{q}')}^{(k)}(z) = C_{\mathbf{q}(\mathbf{q}')}^{(k)} \exp(\mp z/l) + n_q(T_k), \quad (11)$$

где $l = |s_z|/\nu$. Поскольку мы считаем, что в диэлектрической прослойке фононы распространяются баллистически, фононные функции распределения $N_{\mathbf{q}}^{(i)}$ и $N_{\mathbf{q}'}^{(i)}$ не зависят от z . Их значения вместе с постоянными $C_{\mathbf{q}(\mathbf{q}')}^{(k)}$ определяются из граничных условий. Полученные выражения для коэффициентов $C_{\mathbf{q}(\mathbf{q}')}^{(k)}$ приведены в Приложении.

Уравнение для электронной температуры в металлическом слое M_k следует из условия теплового баланса: $W_k = P_{ep}^{(k)}$, где W_k — удельная мощность источников тепла, $P_{ep}^{(k)}$ — усредненная по толщине слоя удельная мощность, передаваемая от электронов к фононам. $P_{ep}^{(k)}$ выражается через интеграл фонон-электронных столкновений:

$$P_{ep}^{(k)} = \frac{1}{d_k} \int_{z \in M_k} dz \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q I_{pe} [N_{\mathbf{q}}^{(k)}(z)]. \quad (12)$$

Подстановка (11) в (12) дает для слоя M_1 уравнение

$$W_1 = \frac{1}{d_1} \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z [C_{\mathbf{q}}^{(1)}(e^{-\hat{d}_1} - 1) - C_{\mathbf{q}'}^{(1)}(e^{\hat{d}_1} - 1)], \quad (13)$$

а для слоя M_2 уравнение

$$W_2 = -\frac{1}{d_2} \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z [C_{\mathbf{q}}^{(2)} e^{-(\hat{d}_1 + \hat{d}_i)} - C_{\mathbf{q}'}^{(2)} e^{(\hat{d}_1 + \hat{d}_i)}]. \quad (14)$$

Здесь и далее \hat{d}_1 , \hat{d}_2 , \hat{d}_i обозначают толщины слоев d_1 , d_2 , d_i , нормированные на l . Используя выражения (34)–(37) для коэффициентов $C_{\mathbf{q}(\mathbf{q}')}^{(k)}$, получаем следующую систему уравнений для температур T_1 и T_2 :

$$W_1 d_1 = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z \frac{\alpha(e^{\hat{d}_1} - 1)}{D} \{[(1 + \beta)e^{2\hat{d}_2 + \hat{d}_1} +$$

$$+ 2\beta(e^{2\hat{d}_2} - 1) - 2\beta e^{\hat{d}_1} + \alpha][n_q(T_1) - n_q(T_B)] + (e^{2\hat{d}_2} - 1)(e^{\hat{d}_1} + \beta)[n_q(T_1) - n_q(T_2)]\}, \quad (15)$$

$$W_2 d_2 = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z \frac{\alpha(e^{2\hat{d}_2} - 1)}{D} \{\alpha e^{\hat{d}_1} [n_q(T_1) - n_q(T_B)] - (e^{2\hat{d}_1} - \beta)[n_q(T_1) - n_q(T_2)]\}, \quad (16)$$

где $D = (1 + \beta)e^{2(\hat{d}_1 + \hat{d}_2)} - 2\beta e^{2\hat{d}_1} - 2\beta^2 e^{2\hat{d}_2} + 2\beta^2 - \alpha\beta$.

Уравнения (15) и (16) описывают как нагрев, так и охлаждение слоев M_1 и M_2 . При охлаждении слоя M_k нужно просто считать, что мощность W_k отрицательна. Заметим, что в низкотемпературном эксперименте охлаждение слоя нормального металла может быть получено, если этот слой образует туннельный контакт со сверхпроводником. Дело в том, что протекание электрического тока в такой системе приводит к туннелированию горячих (надщелевых) электронов из нормального слоя в сверхпроводник и, таким образом, к охлаждению нормального металла [18].

3. Толстые и тонкие слои

Довольно громоздкий вид полученных уравнений связан с тем обстоятельством, что они описывают фононный теплоперенос в $M_1/I/M_2$ -системе при произвольных значениях толщин металлических слоев. И вид уравнений (15), (16), и их анализ существенно упрощаются в предельных случаях тонких и толстых слоев. Будем называть слой тонким, если его толщина мала по сравнению с l_p — длиной свободного пробега фононов до их столкновений с электронами. В этом случае (при не слишком малых α) подавляющая часть неравновесных фононов покидает слой без перепоглощения электронами. В противоположном предельном случае толстых слоев излученные электронами неравновесные фононы в основном поглощаются в том же слое, что приводит к тепловому равновесию между электронной и фононной подсистемами в слое.

Перейдем к аналитическому описанию предельных случаев. Сначала рассмотрим *толстые* слои. Для таких слоев выполняются неравенства $\hat{d}_1 \gg 1$ и $\hat{d}_2 \gg 1$, что позволяет упростить уравнения (15) и (16), опустив (после подстановки D и простых вычислений) слагаемые, содержащие малые экспоненты $e^{-\hat{d}_1(2)}$. Упрощенные уравнения имеют вид

$$W_1 d_1 + W_2 d_2 = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z \alpha [n_q(T_1) - n_q(T_B)], \quad (17)$$

$$W_2 d_2 = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z \frac{\alpha}{1 + \beta} [n_q(T_2) - n_q(T_1)]. \quad (18)$$

Если нагревается только нижний слой, т.е. если $W_2 = 0$, из (18) следует, что температуры нижнего и верхнего слоев совпадают. При этом наличие верхнего слоя никак не отражается на температуре нижнего, поскольку из (17) следует хорошо известное выражение

$$T_1 = \left(T_B^4 + \frac{120\hbar^3 s^2}{\pi^2 k_B^4 \langle \alpha \rangle} W_1 d_1 \right)^{1/4}, \quad (19)$$

полученное в [12] для более простой ситуации, когда нагревается толстая пленка, лежащая на диэлектрической подложке. Входящая в (19) величина

$$\langle \alpha \rangle = \int_0^{\pi/2} \alpha(\theta) \sin(2\theta) d\theta$$

представляет собой усредненную по углам вероятность прохождения фонона через М/И-границу. Таким образом, в случае двух толстых слоев верхний слой является хорошим термометром для нижнего.

Если нагревается только верхний слой: $W_1 = 0$, $W_2 \neq 0$, из уравнений (17) и (18) получаем

$$T_1 = \left(T_B^4 + \frac{120\hbar^3 s^2}{\pi^2 k_B^4 \langle \alpha \rangle} W_2 d_2 \right)^{1/4}, \quad (20)$$

$$T_2 = \left[T_B^4 + \frac{120\hbar^3 s^2}{\pi^2 k_B^4} W_2 d_2 \left(\langle \alpha \rangle^{-1} + \left\langle \frac{\alpha}{1+\beta} \right\rangle^{-1} \right) \right]^{1/4}. \quad (21)$$

Видно, что температура нижнего слоя M_1 такая, как если бы вся энергия выделялась в нем, а верхнего слоя вообще бы не было. Именно такой перепад температур $T_1 - T_B$ необходим, чтобы отвести в подложку мощность $W_2 d_2$, приходящуюся на единицу поверхности двухслойной системы. Перепад температур между верхним и нижним слоями имеет аналогичную природу. Действительно, для температуры T_2 справедлива формула (20) с заменой T_B на T_1 и α на $\alpha/(1+\beta)$. Причина последней замены состоит в том, что вероятность выхода фонона из верхнего слоя и его поглощения в нижнем определяется величиной $\alpha/(1+\beta)$ для заданного угла падения.

Обратимся к случаю *тонких* слоев: $\hat{d}_1 \ll 1$, $\hat{d}_2 \ll 1$. Заметим, что при $\alpha \ll 1$ среднее расстояние, которое фонон проходит в слое с толщиной $d \ll l_p$, может оказаться больше d из-за многократных отражений от границ слоя. В таком случае следует ввести эффективную толщину слоя $d/\langle \alpha \rangle$ [14] и под тонкими слоями понимать эффективно тонкие слои, для которых $\hat{d} \ll \langle \alpha \rangle$.

Наша цель состоит в том, чтобы получить уравнения для T_1 и T_2 с такой точностью (по малым \hat{d}_1 и \hat{d}_2), которая позволит обнаружить влияние нагрева

нижнего слоя на температуру верхнего. Пусть нагревается только нижний слой. Для T_1 имеем уравнение

$$W_1 = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q v [n_q(T_1) - n_q(T_B)]. \quad (22)$$

Это известное уравнение для температуры тонкой пленки, нагреваемой тепловым источником с удельной мощностью W_1 [12]. Вычисление интеграла дает

$$W_1 = \Sigma(T_1^5 - T_B^5), \quad (23)$$

где зависящая от материала константа электрон-фононной связи

$$\Sigma = \frac{D_5 m^2 \mu^2 k_B^5}{4\pi^3 \rho \hbar^7 s^4}. \quad (24)$$

Число $D_5 \approx 24,9$ представляет собой значение интеграла $D_k = \int_0^\infty x^{k-1} (e^x - 1)^{-1} dx$ при $k = 5$. В следующем разделе нам понадобится также число $D_6 \approx 122,1$.

С нужной точностью по \hat{d}_1 уравнение для T_2 имеет вид

$$5\Sigma T_B^4 (T_2 - T_B) = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q 2v \frac{1+\beta}{\alpha} \hat{d}_1 [n_q(T_1) - n_q(T_B)]. \quad (25)$$

При записи (25) мы учли, что нагрев верхнего слоя пропорционален малому параметру $\hat{d}_1 \ll 1$, поэтому $T_2 - T_B \ll T_B$. Заметим, что уравнение (25) получено при условии $\alpha \gg \hat{d}$, поэтому в нем нельзя переходить к пределу $\alpha \rightarrow 0$.

Если тепло выделяется только в верхнем слое, то его температура с достаточной точностью определяется равенством (23) с заменой $T_1 \rightarrow T_2$ и $W_1 \rightarrow W_2$. Температура нижнего слоя (термометра) дается формулой (25) с аналогичной заменой индекса 1 индексом 2.

Рассмотрим теперь два случая, когда слои имеют существенно разные толщины. Сначала рассмотрим случай, когда $\hat{d}_1 \gg 1$, а $\hat{d}_2 \ll 1$. С учетом этих неравенств уравнение (15) сводится к (17), а уравнение (16) к равенству

$$W_2 = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q v [n_q(T_2) - n_q(T_1)]. \quad (26)$$

Из (26), в частности, следует, что если верхний слой не нагревается, он может служить хорошим термометром, так как при $W_2 = 0$ его температура T_2 равна температуре нижнего слоя T_1 . Если нагревать только верхний слой M_2 , то, согласно уравнению (26), имеем

$$T_2 = (T_1^5 + W_2/\Sigma)^{1/5}, \quad (27)$$

где T_1 определяется равенством (20).

Пусть $\hat{d}_1 \ll 1$, а $\hat{d}_2 \gg 1$. Для такого случая уравнения (15) и (16) дают

$$W_1 = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q v \frac{1}{1+2\beta} \{ (1+3\beta)[n_q(T_1) - n_q(T_B)] + (1+\beta)[n_q(T_1) - n_q(T_2)] \}, \quad (28)$$

$$W_2 d_2 = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q \frac{\alpha}{1+2\beta} [n_q(T_2) - n_q(T_B)]. \quad (29)$$

Легко увидеть, что в такой двухслойной системе верхний слой не может служить термометром, так как при $W_2 = 0$ его температура T_2 (в рассмотренном приближении) равна температуре подложки T_B , тогда как нагреваемый нижний слой имеет температуру T_1 , которая определяется равенством (23) и существенно отличается от температуры подложки.

4. Обсуждение результатов и сравнение с экспериментом

Как отмечалось во Введении, настоящая работа мотивирована экспериментом [17], который был проведен на системе, состоящей из двух тонких металлических слоев (верхнего и нижнего), разделенных прослойкой диэлектрика. Суть этого эксперимента заключалась в измерении электронных температур в каждом из слоев при нагреве (или охлаждении) одного из них. Массивная диэлектрическая подложка, на которую был нанесен нижний слой, имела фиксированную температуру, т.е. играла роль термостата.

В разд. 3 мы показали, что тепловые свойства двухслойной системы M_1/M_2 в большой степени определяются толщинами металлических слоев. Для измерения температуры нагреваемого слоя с помощью слоя-термометра важным является взаимное расположение этих слоев относительно подложки. Так, показания термометра зависят от того, расположен он над нагреваемым слоем или между нагреваемым слоем и подложкой (являющейся стоком тепла). Рассмотрим сначала случай, когда термометр M_2 расположен над толстым нагреваемым слоем M_1 . В этом случае электронная температура термометра T_2 совпадает с температурой T_1 с экспоненциальной точностью по параметру d_1/l , т.е. $(T_1 - T_2) \propto e^{-d_1/l_p}$. При этом толщина слоя-термометра не имеет существенного значения. Если же слой M_1 , в котором мы хотим измерить температуру, тонкий ($d_1/l \ll 1$), то электронная температура термометра T_2 мало отличается от температуры подложки T_B . Более определенно: $T_2 - T_B \propto d_1/l_p$ при любой толщине термометра. Физическая причина сильной зависимости температуры термометра T_2 от толщины слоя M_1 довольно очевидна. Тонкий слой M_1

слабо поглощает фононы подложки и поэтому слой-термометр M_2 сильно охлаждается подложкой даже в присутствии слоя M_1 , расположенного между M_1 и подложкой.

Теперь рассмотрим случай, когда термометром является слой M_1 , расположенный между подложкой и нагреваемым слоем M_2 . Как оказывается, в этом случае ни при каких толщинах слоев M_1 и M_2 температура термометра не равна (с экспоненциальной точностью) температуре нагреваемого слоя. Так, если в качестве термометра использован толстый слой, его температура T_1 будет такой, как если бы все тепло выделялось в нем, а другого слоя вообще не было бы. При этом температура нагреваемого слоя T_2 (в зависимости от того, толстый он или тонкий) определяется уравнениями (18) или (26), которые описывают перепад температур между слоем M_2 и слоем M_1 , играющим роль термостата. Если и термометром, и нагревателем являются тонкие слои, температура термометра T_1 мало отличается от температуры подложки. Если же нагревателем является эффективно толстый слой, температура термометра дается равенством (28) с $W_1 = 0$.

Сравним полученные результаты с экспериментом [17]. Чтобы корректно сравнить теорию и эксперимент, выясним, толстыми или тонкими являются медные слои в этом эксперименте. Для этого найдем среднюю вероятность ухода фонона из слоя $\langle \alpha \rangle$ и длину свободного пробега фононов $l_p = s/v(T)$, где частота фонон-электронных столкновений дается формулой (3) с $\hbar \omega = k_B T$. Вычисление $\langle \alpha \rangle$ для границы «медь-кремний» дает значение 0,144. Зависящая от температуры длина свободного пробега фононов выражается через константу электрон-фононной связи Σ следующим образом:

$$l_p(T) = \frac{D_5 k_B^4}{2\pi^2 \hbar^3 \Sigma s^2} \frac{1}{T}. \quad (30)$$

Подстановка в (30) значений $s = 4700$ м/с, $T_B = 0,432$ К, $\Sigma = 2 \cdot 10^{-9}$ Вт/(мкм³·К⁵) [17] дает для $l_p(T_B)$ величину $2,1 \cdot 10^{-4}$ см. Поскольку в эксперименте толщины металлических слоев $d_1 = d_2 = 5 \cdot 10^{-6}$ см, для эффективной толщины получаем $d_{\text{eff}} = d_{1(2)}/\langle \alpha \rangle = 3,47 \cdot 10^{-5}$ см, откуда следует, что $d_{\text{eff}} \ll l_p(T_B)$. Таким образом, при температуре $T_B = 0,432$ К медные слои в эксперименте [17] тонкие.

Рассмотрим (см. рис. 2(б) в [17]) случай, когда слой M_1 охлаждается, а слой M_2 служит термометром. Из рисунка следует, что при слабом охлаждении отклонения температур слоев от температуры термостата T_B малы по сравнению с T_B и пропорциональны друг другу: $T_2 - T_B = C_{\text{exp}}(T_1 - T_B)$, причем $C_{\text{exp}} \approx 0,033$. Рассматриваемая экспериментальная ситуация описывается формулой (25). При $T_B - T_1 \ll T_B$ из (25) следует, что $T_B - T_2 = C_{\text{theor}}(T_B - T_1)$, где

$$C_{\text{theor}} = \frac{12\pi^2 D_6 A d_1 \hbar^3 \Sigma s^2 T_B}{5D_5^2 k_B^4}. \quad (31)$$

Входящая в (31) величина A представляет собой интеграл

$$A = \int_0^{\theta_{\text{cr}}} \frac{\sin \theta [2 - \alpha(\theta)]}{\alpha(\theta) \cos \theta} d\theta, \quad (32)$$

в котором верхним пределом является критический угол полного отражения фонона $\theta_{\text{cr}} = \arcsin(s/s')$. Для границы «медь-кремний» величина $A \approx 0,22$, что дает значение $C_{\text{theor}} \approx 0,031$, которое мало отличается от $C_{\text{exp}} \approx 0,033$. Полученному совпадению C_{theor} и C_{exp} не следует придавать слишком большое значение. Действительно, рассматриваемая нами модель является весьма упрощенной, не учитывающей, например, поперечные фононные моды. Поэтому более реалистично ожидать, что теория должна согласовываться с экспериментом главным образом в порядках величин.

Обратимся теперь к случаю сильного нагрева, когда $T_1 - T_B \gtrsim T_B$. Заметим, что в этом случае формула (25) должна быть модифицирована. Изменения состоят в том, что при вычислениях не будем предполагать малость $T_2 - T_B$ по сравнению с T_B . Проведенные вычисления дают соотношение

$$t_2^5 - 1 = (5/6)C_{\text{theor}}(t_1^6 - 1), \quad (33)$$

где $t_k = T_k/T_B$. Экспериментальные результаты для случая сильного нагрева представлены на рис. 2(а) в работе [17]. Сравнение теории с экспериментом показывает, что соотношение (33) описывает результаты эксперимента, если взять $C_{\text{theor}} \approx 0,012$. Заметим, что значения C_{theor} при слабом охлаждении и при сильном нагреве одного порядка. Таким образом, теория достаточно хорошо согласуется с экспериментом [17].

В завершение раздела отметим, что, хотя нами рассмотрен случай слоев из одинаковых металлов и одинаковых материалов подложки и прослойки, развитый формализм может быть обобщен на случай разных металлов M_1 и M_2 и разных диэлектриков подложки и прослойки.

5. Заключение

В настоящей статье теоретически рассмотрен стационарный режим нагрева (охлаждения) двухслойной системы $M_1/l/M_2$ при условии, что роль термостата играет массивная диэлектрическая подложка. В отличие от электронов, фононы в каждом из слоев не считаются термализованными. Из условия теплового баланса в разд. 2 получены уравнения (15) и (16) для электронных температур в каждом из слоев. В разд. 3 эти уравнения проанализированы в предельных случаях толстых и тонких слоев и в явном виде получены

зависимости электронных температур каждого слоя, T_1 и T_2 , от удельных мощностей тепловыделения в слоях, W_1 и W_2 . В разд. 4 проведено сравнение результатов теории с экспериментом [17] и установлено, что эксперимент вполне адекватно описывается моделью, не использующей необоснованное предположение о термализации фононов. Следует также отметить, что для согласия теории с экспериментом не требуются какие-либо подгоночные параметры.

Автор выражает благодарность В.А. Шкловскому за обсуждение работы.

6. Приложение

Значения постоянных $C_{\mathbf{q}(\mathbf{q}')}^{(k)}$, $N_{\mathbf{q}(\mathbf{q}')}^{(i)}$ определяются из граничных условий (4), (6)–(10). Для констант $C_{\mathbf{q}(\mathbf{q}')}^{(k)}$, входящих в выражения баланса тепла (13), (14), имеем

$$C_{\mathbf{q}}^{(1)} = (\alpha e^{\hat{d}_1}/D) \{e^{\hat{d}_1} [(1 + \beta)e^{2\hat{d}_2} - 2\beta][n_q(T_B) - n_q(T_1)] - \beta(e^{2\hat{d}_2} - 1)[n_q(T_1) - n_q(T_2)]\}, \quad (34)$$

$$C_{\mathbf{q}'}^{(1)} = (\alpha/D) \{[2\beta(e^{2\hat{d}_2} - 1) + \alpha][n_q(T_B) - n_q(T_1)] - e^{\hat{d}_1}(e^{2\hat{d}_2} - 1)[n_q(T_1) - n_q(T_2)]\}, \quad (35)$$

$$C_{\mathbf{q}}^{(2)} = (\alpha e^{\hat{d}_1 + \hat{d}_i + 2\hat{d}_2}/D) \{ \alpha e^{\hat{d}_1} [n_q(T_B) - n_q(T_1)] + (e^{2\hat{d}_1} - \beta)[n_q(T_1) - n_q(T_2)] \}, \quad (36)$$

$$C_{\mathbf{q}'}^{(2)} = e^{-2(\hat{d}_1 + \hat{d}_i + \hat{d}_2)} C_{\mathbf{q}}^{(2)}, \quad (37)$$

где

$$D = (1 + \beta)e^{2(\hat{d}_1 + \hat{d}_2)} - 2\beta e^{2\hat{d}_1} - 2\beta^2 e^{2\hat{d}_2} + 2\beta^2 - \alpha\beta. \quad (38)$$

Для компактности формул (34)–(38) использованы как α , так и $\beta = 1 - \alpha$. Напомним, что толщины слоев \hat{d}_1 , \hat{d}_2 , \hat{d}_i нормированы на l и обозначены \hat{d}_1 , \hat{d}_2 , \hat{d}_i .

1. B.C. Gundrum, D.G. Cahill, and R.S. Averbach, *Phys. Rev. B* **72**, 245426 (2005).
2. P.E. Hopkins, *ISRN Mech. Eng.* **2013**, 682586 (2013).
3. A.W. Little, *Can. J. Phys.* **37**, 334 (1959).
4. S.B. Kaplan, *J. Low Temp. Phys.* **37**, 343 (1979).
5. E.T. Swartz and R.O. Pohl, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 605 (1989).
6. F. Giazotto, T.T. Heikkila, A. Luukanen, A.M. Savin, and J.P. Pekola, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 6217 (2006).
7. М.И. Каганов, И.М. Лифшиц, Л.В. Танатаров, *ЖЭТФ* **31**, 232 (1956).
8. С.И. Анисимов, Б.Л. Капелиович, Т.Л. Перельман, *ЖЭТФ* **66**, 776 (1974).

9. F.C. Wellstood, C. Urbina, and J. Clarke, *Phys. Rev. B* **49**, 5942 (1994).
10. Е.М. Гершензон, М.Е. Гершензон, Г.Н. Гольцман, А.Д. Семенов, А.В. Сергеев, *Письма в ЖЭТФ* **36**, 241 (1982).
11. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
12. В.А. Шкловский, *ЖЭТФ* **78**, 1281 (1980).
13. V.A. Shklovskij, *J. Low Temp. Phys.* **41**, 375 (1980).
14. А.И. Безуглый, В.А. Шкловский, *ЖЭТФ* **111**, 2106 (1997).
15. А.И. Безуглый, В.А. Шкловский, *ФНТ* **39**, 459 (2013) [*Low Temp. Phys.* **39**, 357 (2013)].
16. A.I. Bezuglyj and V.A. Shklovskij, *Phys. Rev. B* **89**, 214303 (2014).
17. L.M.A. Pascal, A. Fay, C.B. Winkelmann, and H. Courtois, *Phys. Rev. B* **88**, 100502(R) (2013).
18. M. Nahum, T.M. Eiles, and J.M. Martinis, *Appl. Phys. Lett.* **65**, 3123 (1994).

Phonon transfer of energy in nanostructures comprising two metal layers

A.I. Bezuglyj

We consider a steady-state heating regime for a system consisting of two metal layers, M_1 and M_2 , separated by a dielectric layer I. It is supposed that the powers W_1 and W_2 are absorbed in the layers, and a massive dielectric substrate, on which the $M_1/I/M_2$ system is situated, is a thermostat. On the basis of the kinetic equation for the phonon distribution function, we analyze the phonon heat transfer in the $M_1/I/M_2$ system and find the dependence of electron temperatures of layers, T_1 and T_2 , on W_1 and W_2 . The limiting cases of thick and thin layers are considered in a real experimental situation where one of the layers is heated and the other layer serves as a thermometer. The theoretical results are compared with the experimental data.

PACS: *63.20.kd* Phonon-electron interactions;
66.70.-f Nonelectronic thermal conduction and heat-pulse propagation in solids; thermal waves.

Keywords: two-layers nanostructures, steady-state heating, phonon heat transfer, low temperatures.