

Эволюция галактик в зеркале уравнения коагуляции

В.М. Конторович

*Радиоастрономический институт НАН Украины
ул. Искусств, 4, г. Харьков, 61002, Украина*

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина
E-mail: vkont@rian.kharkov.ua; vkont1001@yahoo.com*

Статья поступила в редакцию 30 июня 2016 г., опубликована онлайн 25 ноября 2016 г.

Уравнение Смолуховского и его обобщения, описывающие слияния частиц, позволяют понять основные этапы формирования распределения галактик по массам (функции масс галактик), устанавливающиеся в результате слияний, и, тем самым, дать объяснение результатам многолетних наблюдений на космическом телескопе имени Хаббла и крупных наземных телескопах.

Рівняння Смолуховського та його узагальнення, які описують злиття частинок, дозволяють зрозуміти основні етапи формування розподілу галактик по масах (функції мас галактик), що встановлюються в результаті злиття, і, тим самим, дати пояснення результатам багаторічних спостережень за допомогою космічного телескопа імені Хаббла та великих наземних телескопах.

PACS: 05.20.Dd Кинетическая теория;

98.62.Ai Происхождение, формирование, эволюция, возраст и формирование звезды;

98.62.Dm Kinematics, dynamics, and rotation.

Ключевые слова: галактики; эволюция; слияния; большие красные смещения; уравнение коагуляции.

1. Введение

Долгое время считалось, что после своего образования в результате развития гравитационной неустойчивости (из газового протогалактического облака), галактики эволюционируют сугубо индивидуально. Такая точка зрения, казалось бы, подтверждалась как «разбеганием» галактик в расширяющейся Вселенной, так и простейшими газокинетическими оценками, согласно которым вероятность столкновения («типичных», «средних») галактик за хаббловское время пренебрежимо мала — порядка $\sim 10^{-4}$. В том, что эта оценка занижена, легко убедиться, разделив число (пекулярных, взаимодействующих) объектов в каталоге Воронцова-Вельяминова и (или) Арпа и Мадоре — несколько сот — на число «нормальных» объектов в каталоге Дрейера (NGC — десятков тысяч). Тот же результат (10^{-2}) мы получим, подсчитав долю пекулярных галактик в каталоге Вокулера и др. (RC3). Еще существенней роль слияний в более плотной Вселенной на больших красных смещениях. Наблюдательные данные последних трех десятилетий, в особенности данные космического

телескопа Хаббла и крупнейших наземных телескопов, дают убедительные доказательства этому.

Важнейшая динамическая характеристика галактики — ее масса — разумеется, претерпевает изменения в процессе слияний. Устанавливается распределение по массам — функция масс (ФМ), в свою очередь, определяющая функцию светимости (ФС) галактик, — величину, непосредственно измеряемую. Для того чтобы перейти от ФС к ФМ, используют статистические данные об отношении масса–светимость.

Если массивные галактики преимущественно образуются в результате слияния менее массивных галактик, то этот процесс, несомненно, отражает их ФМ. Вычислить такую функцию можно (если ограничиться парными слияниями), решив описывающее ее кинетическое уравнение коагуляции — *уравнение Смолуховского*. Это уравнение имеет очень широкую область применения, в частности, оно эффективно использовалось И.М. Лифшицем в работах по кинетике твердых растворов [1]. Данный обзор посвящен применениям этого уравнения для анализа ФМ галактик и их эволюции. Он ориентирован на физиков, поэтому ссылки на

различные астрономические применения ограничены (см. обсуждение и ссылки в [2]).

2. Уравнение Смолуховского и взрывная эволюция

Кинетическое уравнение Смолуховского (УС), учитывающее парные слияния*, имеет вид

$$\frac{\partial f(m, t)}{\partial t} = \int dm_1 dm_2 [U_{m|12} \delta_m f_1 f_2 - \text{cycle} - \text{bicycle}], \quad (2.1)$$

где $f_1 = f(M_1, t)$ и так далее, ФМ, $\delta_M \equiv \delta(M - M_1 - M_2)$ — дираковская δ -функция, выражающая закон сохранения массы M при слияниях, cycle означает циклическую перестановку аргументов («масс») M, M_1 и M_2 ; bicycle — двойную их перестановку в сравнении с первым слагаемым. Аналогично, в случае обобщенного УС для распределения по массам и моментам (см. ниже), мы будем считать выполняющимся также закон сохранения момента количества движения**.

В астрофизике традиционно используется УС с постоянным коэффициентом коагуляции U для описания слияния межзвездных облаков. В случае галактик весьма существенной оказывается зависимость U от масс, которая приводит, в частности, к взрывной эволюции ФМ, если показатель однородности коэффициента коагуляции u (в простейшем случае $U \propto M^u$) превышает единицу (см. обзоры [3–5]).

Это необычное поведение решения УС в случае, когда вероятность слияния растет быстрее первой степени массы (так звучит это условие в удобных для нас терминах), было открыто в замечательной работе В. Стокмайера [6], посвященной золь-гель переходу (в которой он, между прочим, благодарит за обсуждение Марию Гепперт-Майер), а затем последовательно перекрывалось в других областях физики, геофизики, метеорологии и т.п. (см. монографию [3] и ссылки в ней, а также [7,8]).

В этом случае в системе происходит нечто близкое к кинетическому фазовому переходу: за конечное время t_{cr} устанавливается квазистепенное $\Phi \propto M^{-\alpha}$ распределение вплоть до формально бесконечных масс («взрывная» эволюция). У галактик на такое поведение, в связи с проблемой активности галактик и возникновения квазаров, было впервые указано в работах римской и харьковской групп [9,10].

Приведем в качестве иллюстрации, следуя [3], примеры точных решений, демонстрирующих взрывное поведение. При вероятности слияний, пропорциональ-

ной произведению масс $U = cM_1M_2$ (Стокмайер 1943, Трубников 1971, МакЛеод 1972) начальное распределение, локализованное на малых массах порядка $M_* \ll M$, при $t \rightarrow t_{cr}$ приводит к асимптотике (полное решение и значение t_{cr} приведено в [3])

$$f(M, t) = \frac{M^{(2)}(0)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{M_*} \left(\frac{t_{cr}}{t} \right)^{3/4} M^{-5/2} e^{-\frac{M}{4M_*} \left(1 - \frac{t}{t_{cr}} \right)^2},$$

$$f_0(M) = \frac{M^{(2)}(0)}{MM_*} e^{-\frac{M}{M_*}}, \quad (2.2)$$

причем в точке «взрыва» $t = t_{cr}$ распределение становится чисто степенным вплоть до бесконечных масс, а второй момент распределения $M^{(2)}(t) = \int_0^\infty dM M^2 f(M, t)$

расходится: $M^{(2)}(t) = \frac{M^{(2)}(0)}{1-t/t_{cr}}$ ($t < t_{cr}$). Возникающее

степенное распределение с показателем $\alpha = 5/2$ соответствует постоянному потоку массы по спектру.

Приведем также в качестве иллюстрации важный пограничный случай, когда вероятность слияния пропорциональна сумме масс $U(M_1 + M_2) = c(M_1 + M_2)$ и показатель однородности u равен 1 (Головин 1968, Трубников 1971) при начальном распределении вида $f_0(M) = (N_0/M_*)e^{-M/M_*}$. Асимптотика точного решения при $t \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty$

$$f(M, t) = \frac{N_0}{M_*} \frac{(1-\tau)}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{M_*}{M\sqrt{\tau}} \right)^{3/2} e^{-\frac{M}{M_*}(1-\sqrt{\tau})^2},$$

$$\tau \equiv 1 - \frac{N(t)}{N_0} \quad (2.3)$$

показывает переход к чисто степенной функции при $\tau \rightarrow 1$ за счет стремления числа частиц $N(t)$ к нулю при $t \rightarrow \infty$. Эта степень с показателем $\alpha = 3/2$ отвечает постоянному потоку числа частиц в область бесконечных масс. Можно считать такое поведение тоже взрывным с $t_{cr} = \infty$, что вполне отвечает пограничному значению показателя однородности $u = 1$. Получаемые асимптотики имеют вид функции Шехтера, в терминах параметров которой обычно описывается наблюдаемая ФС и которыми мы будем пользоваться для описания ФМ.

* Выход за эти рамки требует использования значительно более изощренного математического аппарата, который применительно к интересующему нас кругу задач еще только развивается.

** Эти условия отнюдь не очевидны, но в определенной мере подтверждаются численными экспериментами [2].

3. Вероятность слияния галактик

Эта величина неоднократно обсуждалась в разных приближениях и аналитически, и в численных экспериментах. Поскольку за неупругость столкновения, приводящую к слиянию, ответственны быстро убывающие приливные силы в бесстолкновительной звездной подсистеме галактик, для слияния необходимо их тесное сближение (вплоть до перекрытия). При большой относительной скорости галактики пройдут друг сквозь друга даже при полном пересечении. Сечение слияния* используем в виде $\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2(1 + \gamma)\phi(\gamma)$, где $\gamma \equiv v_g^2/v^2$ — параметр фокусировки, а $\phi(\gamma) \rightarrow 1$ при $\gamma \rightarrow \infty$; $\phi(\gamma) \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$. Простейший вариант критерия слияния, которым будем пользоваться в приводимых примерах (влиянием собственных моментов будем пренебрегать), таков: 1) минимальное расстояние между сталкивающимися галактиками меньше суммы их радиусов $(R_1 + R_2)$; 2) относительная скорость на бесконечности меньше скорости убегания v_g . Последнее означает выбор функции ϕ в сечении σ в виде ступеньки, что соответствует убыванию ϕ быстрее, чем γ^{-2} . Это приводит к следующему выражению для коэффициента коагуляции $U \equiv \overline{\sigma v}$, где черта означает усреднение по скоростям:

$$U = \begin{cases} c_1 (M_1 + M_2) (M_1^\beta + M_2^\beta) & \text{(большие массы)} \\ c_2 (M_1 + M_2)^2 & \text{(малые массы)} \end{cases} \quad (3.1)$$

(см. ссылки в [2]). Здесь радиус галактики R связан с массой M соотношением $R = CM^\beta$ ($\beta = 1/3$ соответствует постоянной плотности, $\beta = 1/2$ — наблюдаемым законам Фабера–Джексона и Талли–Фишера); $c_1 = (9/2)(3\pi)^{1/2} \times G^2/v_{rms}^3$, $c_2 = 2(3\pi)^{1/2} CG/v_{rms}$, где v — относительная скорость, а G — гравитационная постоянная. Для функции $U(M_1, M_2)$ удобно ввести ее степень однородности u и показатели $u_{1,2}$, описывающие ее асимптотики при сильно отличающихся массах: $U \propto M_1^{u_1} M_2^{u_2}$, $M_1 \ll M_2$, $u_1 + u_2 = u$. Очевидно, для (3.1) $u_1 = 0$, $u_2 = u = 2$ для $M \ll M_b$ и $u_2 = 1 + \beta$ для $M \gg M_b$, где $M_b \sim (Cv_{rms}^2/G)^{1/(1-\beta)}$ разделяет области больших и малых масс.

* Из численных экспериментов следуют условия слияния для скорости при сближении и прицельного параметра p (R — сумма радиусов на уровне половинной массы): $[(v/av_g)^2 + (p/bR)^2] \leq 1$, где коэффициент a близок к единице, а b варьирует в зависимости от наличия моментов и их взаимной ориентации в пределах порядка возле единицы, согласно данным Аарсета и Фолла, Фаруки и Шапиро и других авторов. Критерий чувствителен к распределению вещества в галактиках. Для сферических галактик равных масс импульсное приближение приводит к аналитическому критерию слияния Триэйна. Обсуждение ряда деталей и ограничений можно найти в монографиях Горбацкого и Саслау и цитируемых в них источниках, но в целом зависимости от параметров соударения и свойств галактик (в частности, от распределения в них массы и углового момента) изучены еще недостаточно.

4. «Взрывная» эволюция галактик

Достаточно подробное исследование взрывной эволюции в связи с образованием центральных массивных сD-галактик в группах, эпохой рождения квазаров, эффектом «покраснения» Бутчера–Эмлера галактик, приписываемого их взаимодействию, и т. п. было проведено в работах римской и харьковской групп (см. [9,10]). Появление при этом относительно крутой промежуточной асимптотики ($\alpha \approx 2$) легко может быть понято из следующих аргументов. Оба полученные значения для индексов ($\alpha \approx 1,9$ для $u = 4/3$ и $\alpha \approx 2,1$ для $u = 3/2$) находятся между $(u + 2)/2$ и $(u + 3)/2$. ФМ с $\alpha = (u + 3)/2$ соответствует постоянному потоку массы вдоль спектра до бесконечности, т.е. к сD-галактике в нашем случае. (Решения с постоянным потоком сохраняющейся величины аналогично колмогоровским спектрам в теории слабой турбулентности). Однако благодаря нелокальности распределений с $|u_1 - u_2| > 1$ (расходимость интеграла в УС на степенном распределении [11]), такое решение не реализуется точно. Нелокальность приводит к существенной роли взаимодействий между галактиками малых и больших масс. При этом число массивных галактик приблизительно сохраняется, и постоянный поток их числа по спектру соответствует $(u + 2)/2$. Так как ни один из данных предельных случаев не реализуется в точности, индекс расположен между этими значениями: $1,67 < \alpha \approx 1,9 < 2,17$ ($u = 4/3$), $1,75 < \alpha \approx 2,1 < 2,25$ ($u = 3/2$) и весьма близок к их среднему арифметическому (как можно видеть из численного решения УС). Мы ограничились здесь случаем больших масс. При малых массах нелокальность еще существенней. В этом случае естественной является попытка перехода к дифференциальному в [12] уравнению от интегрального [12]. Решение, полученное методом характеристик, обладало основными свойствами взрывной эволюции.

5. Взрывная эволюция далеких галактик

Представления о «далеких галактиках» долгое время было весьма относительным. Сейчас ситуация в корне отличается: наблюдения подводят нас к пределу, за которым галактик (и звезд) еще не существовало. Если во времена первых наблюдений Э. Хаббла далекими считались галактики с красным смещением $z < 0,003$ (в скоплении галактик Дева), а затем $z < 0,006$ (в скопле-

нии галактик Волосы Вероники), то современные методы накопления слабых сигналов от далеких галактик* позволили в глубоких «проколах» крупнейших телескопов за десятки лет накопления достичь красных смещений, превышающих $z = 10$.

Значения индекса Шехтера α , определяющего наклон степенного участка ФС, полученные из этих наблюдений, показывает существенную зависимость от красного смещения.

Модель иерархического сгущивания в ее нынешнем общепринятом виде приводит к автомоделным решениям. Между тем исследования далеких галактик показывают явно неавтомоделное поведение, в том числе зависимость наклона α степенного участка шехтеровской функции светимости

$$\varphi(M) = \varphi^* M^\alpha \exp(-M/M^*) \quad (5.1)$$

от красного смещения [18,19]. Под M в случае ФС понимают так называемую звездную величину — логарифм мощности излучения. Мы же, описывая с помощью (5.1) функцию масс ФМ, будем понимать под M массу галактики.

Наблюдаемая эволюция наклона ФС, понимаемого как наклон ФМ галактик, может быть описана как результат *взрывной эволюции* за счет слияний галактик. В настоящее время именно слияния считаются ответственными за эволюцию типов и масс галактик. Хотя в действительности ситуация намного более сложна (см. недавние обзоры [19, 20]), мы покажем, что наблюдаемые параметры ФМ получают здесь удовлетворительное объяснение.

Ниже мы приведем решения кинетического уравнения Смолуховского, описывающего слияния, в дифференциальном приближении, когда основную роль играют слияния массивных галактик с маломассивными (minor mergers). При этом наклон α ФМ массивных галактик $\propto M^\alpha$ (шехтеровский индекс) выражается только через показатель однородности u вероятности слияния как функции массы. Взрывная эволюция реализуется при $u > 1$, что заведомо выполняется для слияния галактик. При эволюции начальной ФМ достаточно общего вида это приводит к степенной асимптотике с $\alpha = -u$, а при преобладающем влиянии локализованного по массам источника в УС — к индексу $\alpha = -(u+1)/2$. Роль источника играют галактики, отщепляющиеся от глобального расширения Вселенной. При этом на больших $z = 6-8$ показатель u определяется слияниями галактик небольших масс и близок к

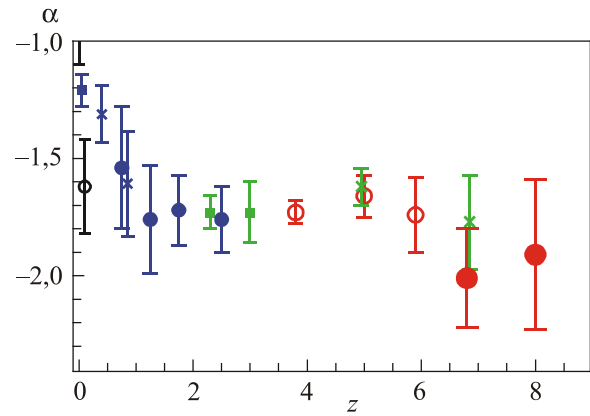


Рис. 1. Эволюция индекса наклона степенного участка ФС по данным работ Боуенса, Иллингворса и их коллег [17,18] в сверхглубоком поле Хаббла в зависимости от красного смещения (с благодарностью авторам).

$u = 2$. На малых z , когда сливаются более массивные галактики, требуется учет гравитационной фокусировки, что при $z \rightarrow 0$ и использовании зависимости между радиусом и массой вида $R \propto \sqrt{M}$, следующей из законов Талли–Фишера и Фабер–Джексона**, приводит к известному современному значению шехтеровского индекса $\alpha = -1,25$. Для промежуточных красных смещений как эволюция ФМ за счет источника (в области малых масс), так и эволюция начального распределения по массам (в области достаточно больших масс) приводят к шехтеровскому индексу $\alpha = -1,5$, что также согласуется с данными наблюдений (рис. 1).

В процессе эволюции упомянутые механизмы формирования ФМ (с учетом предполагаемого вклада темной материи) сменяют друг друга. При этом предполагается, что взрывная эволюция на каждом этапе успевает произойти за времена, меньшие хаббловского времени эволюции Вселенной, а результирующая ФМ служит начальным распределением для следующего этапа. Условия, необходимые для этого, мы кратко обсудим ниже.

Для $u = 2$ ниже приведено точное решение УС с локальным источником в широком интервале масс. В общем случае произвольных значений $u > 1$ приведена асимптотика решения УС на больших массах при временах, близких к моменту «взрыва». Это позволяет качественно объяснить наблюдательные данные для наклона ФС при красных смещениях от $z = 0$ до $z = 8$ [18,19].

Полученная в рассматриваемом приближении ФМ имеет вид, сходный с видом функции Шехтера, однако

* Успехи в наблюдениях галактик на больших z связаны в значительной мере с использованием многоцветной фотометрии [13] и наблюдениями далеких галактик через гравлинзы [14]. Можно привести в качестве яркого примера наблюдения с помощью гравлинзы слияния галактик при $z = 2,9$ [15,16].

** Этот показатель, как оказалось, сам зависит от красного смещения, что мы здесь не учитываем.

спад в сторону больших масс является не экспоненциальным, а корневым (последнее зависит от выбранной модели). Нами получены значения максимальной массы, ограничивающей ФМ сверху, как функции времени и параметров системы вблизи от момента «взрыва». Данный подход позволяет в принципе получить также значения моментов «взрывов», зависящие от начальных условий, параметров взаимодействия и механизма слияний. Проведенное нами рассмотрение ограничено дифференциальным приближением и парными слияниями (при которых учитывается зависимость вероятности слияния от масс галактик). Несмотря на эти ограничения, получаемые наклоны ФМ при взрывных решениях удовлетворительно согласуются с наблюдениями в широком диапазоне красных смещений.

Решение методом характеристик

Мы рассмотрим дифференциальный вариант УС для слияний галактик с малым приращением массы. Оно имеет вид [21,22]:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(M, t) + \text{СП} \frac{\partial}{\partial M} [M^u f(M, t)] = \Phi(M, t),$$

$$\Pi = \int_0^M dM_2 M_2 f(M_2, t). \quad (5.2)$$

Здесь использовано выражение для вероятности слияния галактик вида $CM^u/2$, где показатель $u > 1$. Величина Π представляет собой суммарную массу маломассивных галактик ($M_2 \ll M$), которая в процессе слияний, по предположению, не претерпевает существенных изменений (ниже мы будем принимать $\Pi = \text{Const}$, считая резервуар маломассивных галактик «неисчерпаемым»). Существенно наличие источника Φ в УС, который описывает вклад массивных галактик, отделяющихся от глобального расширения Вселенной по мере развития гравитационной неустойчивости.

Поскольку под знаком производной по массе входит искомая функция масс f , умноженная на M^u (ввиду зависимости коэффициента коагуляции от массы), удобно умножить уравнение на этот множитель и ввести функции

$$F(M, t) = M^u f(M, t), \quad \Phi(M, t) = M^u \phi(M, t).$$

Перепишем УС для $R(M, t)$ в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} F(M, t) + \text{СП} M^u \frac{\partial}{\partial M} F(M, t) = \Phi(M, t) \quad (5.3)$$

и используем метод характеристик для его решения. Уравнение в частных производных (5.3) при этом сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dM/dt = \text{СП} M^u, \quad dF/dt = \Phi, \quad (5.4)$$

произвольной функцией от независимых первых интегралов, которой, как известно [23], и будет его решение. Эту функцию найдем из начальных условий. Интегрирование первого дифференциального уравнения системы (5.4) дает первый интеграл $a(M, t) = \text{const}$, где

$$a(M, t) = \tau(t) + \frac{1}{(u-1)M^{u-1}}, \quad \tau(t) \equiv C \int_0^t dt \Pi(t) \rightarrow \text{СП} \cdot t. \quad (5.5)$$

Для интегрирования второго уравнения системы сделаем вначале предположение о локальном по массе характере источника Φ . А именно, будем считать

$$\Phi(M, t) = \delta(M - \bar{M}(t)) \Phi(t), \quad (5.6)$$

где $\Phi(t)$ — некоторая функция времени, вид которой для нас не существен. Такое предположение означает, что в момент времени t от расширения отделяется галактика со вполне определенной массой $\bar{M}(t)$. Массу M в (5.6) мы выразим через найденный выше первый интеграл a (5.5) как

$$M = \mu(a, t); \quad \mu(a, t) = \left[(u-1)(a - \tau(t)) \right]^{-\frac{1}{u-1}}. \quad (5.7)$$

Это позволяет найти второй независимый интеграл $b(M, t)$ системы (5.4)

$$b(M, t) = F - K(a, t) = \text{const},$$

где $K(a, t)$ равно

$$K(a, t) = \int_0^t dx \delta[\mu(a, x) - \bar{M}(x)] \Phi(x) =$$

$$= \sum_n \Phi(x_n) \theta(t - x_n) \left| \frac{d}{dx} [\mu(a, x) - \bar{M}(x)] \right|_{x=x_n}^{-1} \quad (5.8)$$

и, используя начальное условие

$$f(M, 0) = f_0(M),$$

построить общее решение УС. Относительно $f_0(M)$ мы будем предполагать, что оно локализовано в области малых масс. Входящая в решение функция $\theta(x)$ есть ступенчатая функция Хэвисайда.

Решение для локализованного источника

В силу линейности УС решение (2.1) будет суммой двух независимых слагаемых

$$f(M, t) = f_{in}(M, t) + f_s(M, t). \quad (5.9)$$

Первое слагаемое f_{in} выражается через начальное распределение $f_0(M)$ и содержит только интеграл a . Второе слагаемое f_s связано с источником (ему соответствует нулевое начальное условие) и содержит описывающую источник функцию $\bar{M}(t)$, которую мы конкретизируем ниже:

$$f_{in}(M, t) = \left[(u-1)\tau M^{u-1} + 1 \right]^{-\frac{u}{u-1}} \times$$

$$\times f_0 \left\{ M \left[(u-1)\tau M^{u-1} + 1 \right]^{\frac{1}{u-1}} \right\},$$

$$f_s(M, t) = M^{-u} K \left(\tau + \frac{1}{(u-1)M^{u-1}}, t \right). \quad (5.10)$$

Здесь x_n — корни уравнения (см. определение функции к (5.8))

$$\mu(a, x) = \bar{M}(x), \quad (5.11)$$

определяющего нули δ -функции. Существенно, что $\bar{M}(t)$ является монотонно растущей функцией времени. Выбирая для простоты в качестве $\bar{M}(t)$ линейную функцию

$$\bar{M}(t) = t/A,$$

мы получаем возможность для $u = 2$ построить точное решение УС явно. Решение, как и следовало ожидать для $u > 1$, носит «взрывной» характер: локализованное вначале в области малых масс распределение $f(M, t)$ достигает формально бесконечных масс за конечное время.

Точное решение при квадратичной зависимости вероятности слияния от масс

В этом случае уравнение для корней аргумента δ -функции становится квадратным СП $x^2 - ax + A = 0$ с корнями

$$x_{\pm} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - a_{cr}^2}}{2СП}, \quad a_{cr} \equiv 2\sqrt{АСП}. \quad (5.12)$$

Вещественное решение существует при $a \geq a_{cr}$, причем кратному корню соответствует касание гиперболы (левая часть уравнения (5.11)) и прямой (правая часть того же уравнения). Появление кратного корня под знаком δ -функции математически недопустимо, и мы не должны слишком близко приближаться к критическому значению параметра $a = a_{cr}$, при котором решение обращается в бесконечность. Ниже мы избавимся от этого ограничения с помощью регуляризации, заменив δ -функцию на функцию с конечной шириной. В то же время для нас будут важны как раз малые значения разности $a - a_{cr}$, поскольку именно они соот-

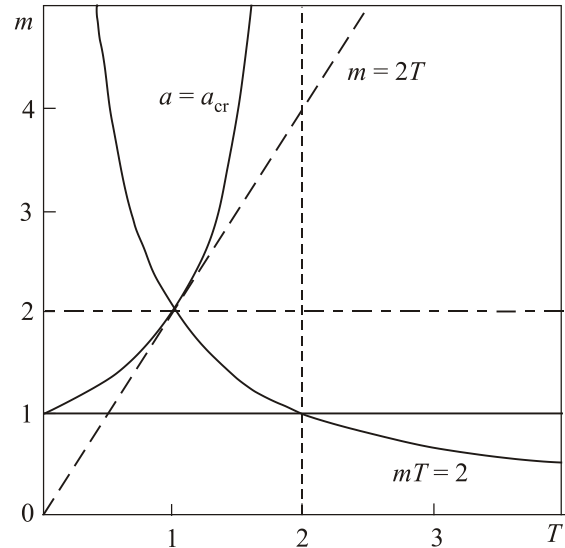


Рис. 2. Интересующая нас область больших масс $m \equiv a_{cr}M > 2T$, $2/T$ лежит выше прямой $m = 2T$ между гиперболой $a = a_{cr}$ и вертикальной асимптотой этой же гиперболы $T \equiv t/t_{tan} = 2$, соответствующей моменту взрыва. В этой области вклад в ФМ дают оба корня δ -функции [14].

ветствуют интересующим нас достаточно большим массам и близости времени к моменту «взрыва». Вклад в интеграл от δ -функции сложного аргумента $\delta(y(x))$ выражается, как известно, суммой по корням аргумента (индекс нумерует корни)

$$\delta(y(x)) = \sum_i \delta(x_i) \left| \frac{dy}{dx} \right|_{x_i}^{-1}.$$

Если $y(x)$ представляет собой квадратный трехчлен, который запишем в виде $y(x) = (x - x_+)(x - x_-)$, где x_{\pm} — корни уравнения $y(x) = 0$, то очевидно, что

$$\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_{\pm}} = |x_+ - x_-| \propto \sqrt{a^2 - a_{cr}^2}.$$

Не имеющий нулей множитель под знаком δ -функции дифференцировать не следует, так как подстановка корней обратит дополнительные слагаемые в нуль. Это существенно упрощает вычисления.

Таким образом, решение при δ -функциональном источнике и квадратном уравнении для ее корней приобретает вид:

$$K(a, t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - a_{cr}^2}} \sum_{\pm} \tilde{\Phi}(x_{\pm}) \theta(a - a_{cr}) \theta(t - x_{\pm}), \quad (5.13)$$

где волна над Φ означает включение постоянных сомножителей, возникающих в виде коэффициентов при разности корней. Явное выражение см. в [22,24]. При

малой разности $a - a_{cr}$ под знаком корня в знаменателе остается именно эта разность.

$$K(a, t) \propto \frac{1}{\sqrt{a - a_{cr}}} . \quad (5.14)$$

В общем случае асимптотика решения на больших массах вблизи от момента взрыва имеет сходную структуру.

Степенная асимптотика решения на больших массах

Полученное решение позволяет найти степенную часть распределения, т.е. индекс функции Шехтера на больших массах вблизи от момента «взрыва» $t = t_{cr}$, если считать отношение масса–светимость постоянным. Для этого заметим, что, как видно из той части решения f_{in} , которая обусловлена начальной ФМ, на больших массах возникает степенная асимптотика

$$f_{in} \propto M^{-u} . \quad (5.15)$$

Физический смысл этой части решения очевиден: оно соответствует постоянному потоку числа массивных галактик вдоль спектра масс:

$$J = J(M, t) = 2f \int_0^{\infty} dM_2 M_2 U(M, M_2) f_2 \rightarrow \\ \rightarrow f(M, t) C M^u \Pi = \text{Const} . \quad (5.16)$$

Что касается части решения, связанной с источником f_s , то для определения индекса Шехтера достаточно рассмотреть источник в виде δ -функции. Существенной особенностью асимптотики полученного решения при малой разности $a - a_{cr}$ является наличие квадратного корня $\sqrt{a - a_{cr}}$ в знаменателе. Нас интересует только эта асимптотика с подстановкой $a = a(M, t)$ согласно (5.5), соответствующая большим массам и времени, близкому к моменту взрыва, хотя в данном случае при $u = 2$ и линейной правой части (5.11) можно выписать полное решение. С учетом $a(M, t) = M^{-1} + C\Pi t$, имеем для $K(a(M, t), t)$ при $t \rightarrow t_{cr} \equiv a_{cr}/C\Pi$

$$K \propto \frac{1}{\sqrt{a(M, t) - a_{cr}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{M} - C\Pi(t_{cr} - t)}} , \quad (5.17)$$

где t_{cr} соответствует вертикальной асимптоте гиперболы (5.7) при $a = a_{cr}$. Отсюда с учетом $f_s \propto M^{-u} K(a, t)$ при достаточно больших массах и достаточной малости $t_{cr} - t$ следует степенная зависимость решения от массы вида

$$f_s \propto M^{-3/2} . \quad (5.18)$$

В общем случае $u \neq 2$ для координат точки касания и точек пересечения гиперболы (5.7) с кривыми, соответствующими правой части уравнения (5.11), получаются более сложные (трансцендентные) уравнения. Однако в интересующей нас асимптотической области вблизи от кратного корня (5.11) для малых величин $\delta a \equiv a - a_{cr} \ll a_{cr}$ по-прежнему возникает квадратное уравнение. Поэтому остаются в силе приведенные выше рассуждения, а выражение для $K(a, t)$ по-прежнему содержит в знаменателе корень из δa

$$K(a(M, t), t) \propto \frac{1}{\sqrt{a(M, t) - a_{cr}}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{(u-1)^{-1} M^{-(u-1)} - C\Pi(t_{cr} - t)}} . \quad (5.19)$$

Отсюда следует, что вычисленный нами индекс Шехтера определяется только зависимостью вероятности слияний от масс, т.е. только ее показателем однородности u

$$f_s = M^{-u} K(a(M, t), t) \propto M^{-\frac{u+1}{2}} . \quad (5.20)$$

Степень однородности вероятности слияний галактик считается известной в двух предельных случаях. Если массы галактик относительно невелики, то $u = 2$. При достаточно больших массах необходимо учитывать гравитационную фокусировку. В этом случае вероятность слияний $\propto (M_1 + M_2)(R_1 + R_2)$, где R — характерный радиус галактики. Поэтому становится существенной зависимость радиуса галактики от ее массы: $R \propto M^\beta$. Степень однородности в области больших масс, таким образом, равна $u = 1 + \beta$. В соответствии с наблюдательными законами* Фабера–Джексона и Талли–Фишера $\beta = 1/2$.

Таким образом, для индекса Шехтера α получаем в области больших z , где массы галактик невелики и влияет начальная ФМ, $-\alpha = u = 2$. Это значение совпадает с наблюдениями при $z = 6-8$ (см. рис 1). В области промежуточных z становится существенным вклад источника на малых массах с $u = 2$, что дает $-\alpha = (u + 1)/2 = 1,5$. Для той части распределения, которая формируется начальной ФМ, на этих z мы оказываемся в области достаточно больших масс, где уже должна сказываться гравитационная фокусировка. Это также приводит к $-\alpha = u = 1 + \beta = 1,5$ и приблизительно соответствует наблюдениям для $z = 3-5$. Наконец, при малых крас-

* Это значение, возможно, отличается от приведенного при больших z . Появились сообщения о более сильной зависимости радиуса от массы (см. ссылки в книге Комберга и Репина [38]).

ных смещениях, когда источник порождает наибольшие массы, $\alpha = (u + 1)/2 = 1 + \beta/2 = 1,25$, что в точности совпадает с хорошо известным индексом Шехтера [25].

6. Максимальные массы и регуляризация решения

Решение с δ -функцией обладает очевидным недостатком: оно отсутствует (формально обращается в бесконечность), если мы выходим на значение кратного корня аргумента δ -функции. Между тем максимально возможному значению массы при фиксированном t соответствует как раз кратный корень. Формально найденная ФМ при этом стремится к бесконечности. Таким образом, ФМ, которая степенным образом убывает на больших массах, проходит через минимум, положение которого легко найти в простейших случаях. Так, при $u = 2$ условие минимума реализуется при $M = M_{\min}(t) = 3M_{\max}(t)/4$, где $M_{\max}(t) = 1/[СП(t_{\text{cr}} - t)]$ — значение «максимальной» массы*, при которой $a = a_{\text{cr}}$ и найденная ФМ обращается в бесконечность. Сама максимальная масса, как и должно быть при взрывной эволюции, обращается в бесконечность в момент «взрыва» $t = t_{\text{cr}}$. На самом деле эта масса также ограничена, но это ограничение связано с неприменимостью исходного линейного УС (см. разд. 7) и выходом за рамки сделанных физических допущений вблизи от $t = t_{\text{cr}}$.

Сказанное означает необходимость регуляризации решения, что можно достичь тем или иным «размытием» δ -функции. При этом учитывается физически очевидное условие того, что отделение галактики от общего расширения происходит не мгновенно (в силу конечного времени нарастания гравитационной неустойчивости). Это же условие удобно сформулировать в терминах масс, положив, что в данный момент времени от общего расширения отделяются галактики в малом, но конечном интервале значений масс $\Delta \ll M$ вблизи $\bar{M}(t)$. Критическое значение параметра a_{cr} при этом расщепляется на два $a_{\text{cr}} \rightarrow a_{\text{cr}}^{\pm}$ ($a_{\text{cr}}^- > a_{\text{cr}}^+$), соответствующих касаниям гиперболы и двух прямых (\pm), ограничивающих ненулевую правую часть уравнения (5.11), где

$$a_{\text{cr}}^{\pm} = \frac{u}{u-1} (АСП)^{(u-1)/u} \mp АСП \frac{\Delta}{2}. \quad (6.1)$$

Решение с учетом регуляризации позволяет находить максимальную массу распределения $M_{\max}(t)$ как функцию времени (в данном рассмотрении мы ограничиваемся собственным временем). Для упрощения примем $\Phi(t) = \Phi$. Вклад в интеграл K дают участки, на которых правая часть (2.11) отлична от нуля. Реше-

* При $t \rightarrow t_{\text{cr}}$ эта максимальная масса сама обращается в бесконечность, что является следствием взрывной эволюции, при которой бесконечная масса достигается за конечное время.

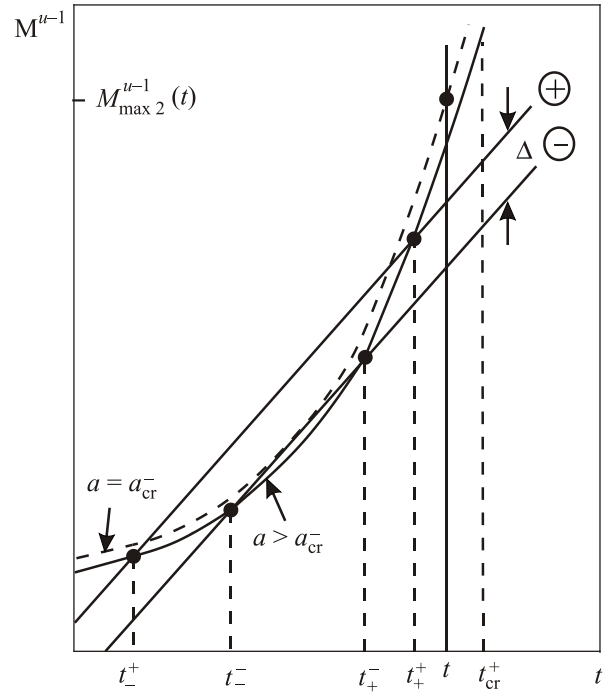


Рис. 3. Случай четырех точек пересечения гиперболы с (\pm) прямыми, ограничивающими ненулевой источник в УС при $a > a_{\text{cr}}^-$. Δ — ширина размытия по массе локализованного источника. Значение интеграла $a = a_{\text{cr}}^-$ соответствует касанию гиперболы с нижней прямой. Моменты t_{\pm}^+ соответствуют пересечению гиперболы при $a > a_{\text{cr}}^-$ с верхней прямой (+), моменты t_{\pm}^- соответствуют пересечению гиперболы с нижней ограничивающей прямой (-). Рассматриваемый случай допускает переход к $\Delta = 0$ [22].

ние УС с источником в области $a > a_{\text{cr}}^- > a_{\text{cr}}^+$ (см. рис. 3) имеет при этом вид для $t > t_{\pm}^+$ [22]

$$K(a, t) = \frac{2\Phi\zeta}{\Delta} \left\{ \sqrt{a - a_{\text{cr}}^+} - \sqrt{a - a_{\text{cr}}^-} \right\}, \quad (6.2)$$

где $\zeta = \sqrt{(-d\mu/da)/(d^2\mu/dt^2)}$ при $a = a_{\text{cr}}$. Отсюда при $\Delta \rightarrow 0$ получаем прежний результат с особенностью, соответствующей источнику в виде δ -функции:

$$K(a, t) \rightarrow \Phi\zeta \frac{АСП}{\sqrt{a - a_{\text{cr}}}}. \quad (6.3)$$

При $\Delta \neq 0$

$$K(a, t) = \frac{2\zeta\Phi}{\Delta} \frac{a_{\text{cr}}^- - a_{\text{cr}}^+}{\sqrt{a - a_{\text{cr}}^+} + \sqrt{a - a_{\text{cr}}^-}} = \frac{2\zeta\Phi \cdot АСП}{\sqrt{a - a_{\text{cr}}^+} + \sqrt{a - a_{\text{cr}}^-}}. \quad (6.4)$$

При $a \rightarrow a_{cr}^-$ достигается наибольшее в этой области $t_{cr}^- > t > t_{cr}^+$ ($t_{cr}^\pm \equiv a_{cr}^\pm / CП$) значение массы и соответствующее ему наибольшее значение ФМ

$$K_{max} = \frac{2\zeta \Phi \sqrt{ACП}}{\sqrt{\Delta}}, \quad M_{max}^-(t) = \frac{1}{[(u-1)CП \cdot (t_{cr}^- - t)]^{\frac{1}{u-1}}}. \quad (6.5)$$

Таким образом, при конечном размытии Δ мы получаем конечный результат для ФМ в точке, соответствующей максимальной массе для данной области. Это значение ФМ зависит от величины размытия, которое становится, следовательно, измеряемым физическим параметром.

Перейдем теперь в область параметров, соответствующих еще большим массам, а именно, к случаю двух пересечений $a_{cr}^- > a > a_{cr}^+$ (см. рис. 4). При $t > t_{cr}^+$

$$K = \frac{2\zeta \cdot \Phi}{\Delta} \sqrt{a - a_{cr}^+}. \quad (6.6)$$

Наибольшее значение массы $M_{max}(t)$ соответствует верхней границе области $a = a_{cr}^+$, на которой ФМ об-

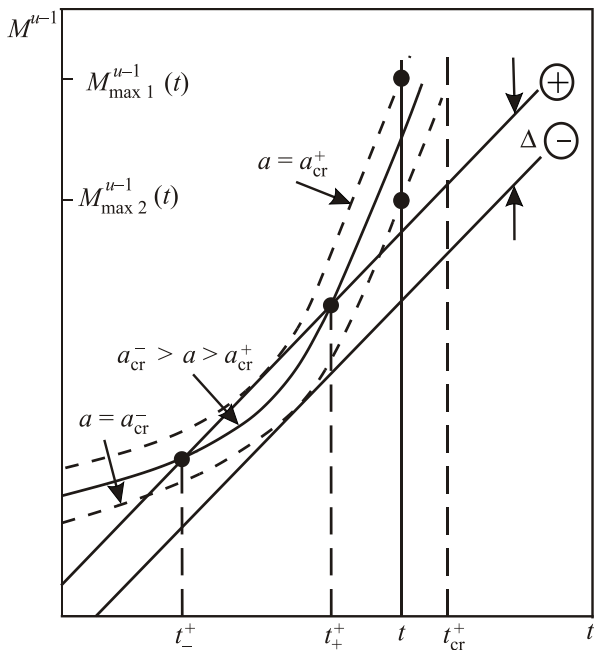


Рис. 4. Случай двух точек пересечения гиперболы с (\pm) прямыми, ограничивающими ненулевой источник в УС при $a_{cr}^- > a > a_{cr}^+$. Значения интеграла $a > a_{cr}^+$ соответствуют касанию гиперболы с (\pm) прямыми. Моменты t_{\pm}^+ соответствуют пересечению гиперболы при $a > a_{cr}^-$ с верхней прямой (+), моменты t_{\pm}^+ соответствуют пересечению гиперболы с верхней ограничивающей прямой (+) [22].

ращается в нуль. Это обращение в нуль, как видно из (5.26), происходит корневым образом, на который накладывается степенное убывание в силу связи $f = M^{-u} F(M, t)$. Таким образом, для ФМ получаем аналог функции Шехтера, в которой экспоненциальное убывание на больших массах заменяется модифицированным корневым. Максимальная масса равна

$$M_{max}(t) = \frac{1}{[(u-1)CП(t_{cr}^+ - t)]^{\frac{1}{u-1}}}. \quad (6.7)$$

Корневая зависимость, однако, очевидно связана с моделью регуляризации. Простейшее усреднение по величине размытия Δ изменит этот результат. Однако локальный максимум в области самых больших масс, отражающий физическую малость интервала масс, отделяющихся в каждый момент от расширения [26], возможно, является весьма общим и желательны поиски такой немонотонности на наблюдаемых ФС.

Приведенные выражения явно описывают взрывное поведение ФМ. При $t \rightarrow t_{cr}^+ - 0$ максимальная масса $M_{max}(t)$ стремится к бесконечности. Это свойство взрывной эволюции, и чтобы получить конечные значения необходимо включить в рассмотрение ограничивающие ее факторы (см. следующий раздел).

Мы получили решение, которое имеет вид модифицированной функции Шехтера со степенным участком на «легком» конце и корневым обращением в нуль на «тяжелом».

Заметим, что как функция параметра a ФМ убывает как $1/\sqrt{a}$, что делает актуальной как раз ту область наименьших возможных значений параметра, которую мы исследовали. Полученное решение подтверждает, что взрывная эволюция ФМ за счет малых слияний (minor mergers) в принципе может объяснить наблюдаемую эволюцию ее легкого края вплоть до $z = 8$. Вычисление остальных параметров ФМ требует привлечения значительно большего количества астрономических данных. Наиболее важное требование к полученному решению: время взрывной эволюции должно быть меньше хаббловского. Этому критерию можно удовлетворить лишь при определенных ограничениях на массы, радиусы и скорости галактик с учетом преобладающего вклада темной материи. В частности, средняя плотность массы, заключенная в галактиках (гало), должна более чем на два порядка превышать среднюю плотность вещества во Вселенной. Таким образом, слияния происходят, по всей видимости, в группах и протоскоплениях внутри гало больших масштабов, а также в стенках, филаментах и узлах крупномасштабной структуры.

Отметим характерное отличие вида найденной ФМ от функции Шехтера: возникновение подъема на общем спаде ФМ перед максимальными массами (рис. 5),

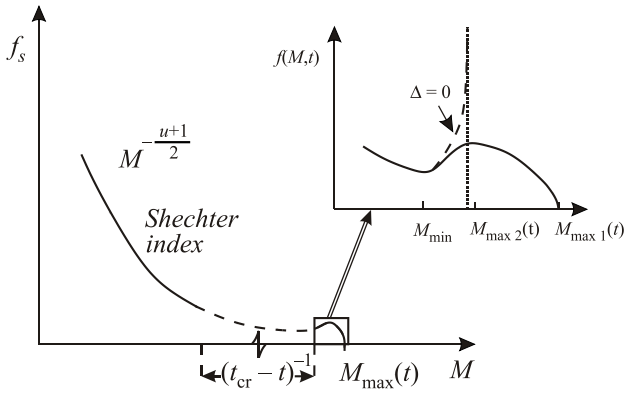


Рис. 5. ФМ, устанавливающаяся в результате слияний с малым приращением массы. Пунктиром показана особенность ФМ при дельта-функциональном источнике. Обращение ФМ в нуль при $M = M_{\max 1}(t)$ связано с принятой ступенчатой моделью [22].

параметры которого связаны с масштабами гравитационной неустойчивости и коллапса при отделении от общего расширения.

7. Разукрупнение (downsizing) с точки зрения модели слияний [27]

В модели слияний галактик, построенной на основе кинетического уравнения Смолуховского, учитываются только процессы (парных) слияний, т.е. процессы с участием трех «частиц». Однако возникающая при этом «взрывная» эволюция приводит к неограниченному росту максимальной массы по мере приближения к моменту «взрыва». Конечные результаты требуют учета четырехчастичных процессов, вступающих в игру вблизи от особенности и описывающих рассеяние с передачей массы. При этом существенную роль начинают играть процессы разукрупнения, при которых масса наиболее массивных галактик может уменьшаться. Рассмотрены простейшие модельные схемы, описывающие разукрупнение. На этом пути предполагается дать объяснение наблюдаемому явлению «даунсайзинга», когда с течением времени возрастание характерной наибольшей массы сменяется ее убыванием.

Довольно необычный с точки зрения парадигмы слияний, но уже давно обсуждаемый факт, что максимальные массы галактик (параметр Шехтера M^*), которые росли с уменьшением красного смещения на больших удалениях, начинают, начиная с некоторого красного смещения, убывать по мере приближения к настоящему времени (см. рис. 6), казалось бы противоречит модели слияний. Покажем, что это не так.

В модели слияний галактик, построенной на основе кинетического уравнения Смолуховского, учитываются только процессы (парных) слияний, т.е. процессы с участием трех «частиц» (рис.7).

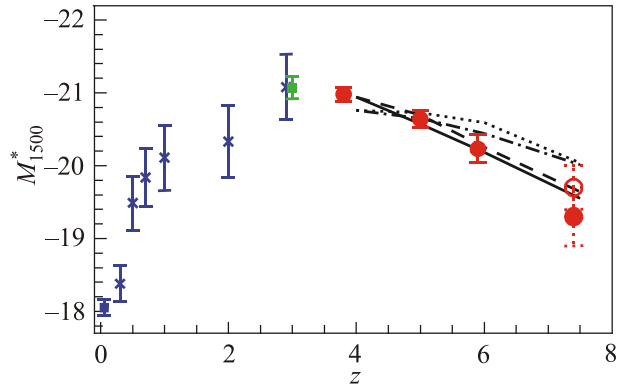


Рис. 6. Наблюдательные данные сверхглубокого поля Хаббла [17,18], относящиеся к параметру Шехтера M^* , в нашем рассмотрении соответствующему характерной максимальной массе. (С благодарностью авторам.)

Получаемые решения позволяют найти наклоны функции масс в широком диапазоне красных смещений [22], удовлетворительно объясняющие наблюдательные данные сверхглубокого поля Хаббла [17,18] (эволюцию наклонов вплоть до предельных красных смещений). Однако возникающая при этом «взрывная» эволюция приводит к неограниченному росту максимальной массы по мере приближения к моменту «взрыва» [22]. «Взрывная» особенность в решении проявляет себя также в неограниченном росте ФМ по мере приближения к моменту «взрыва» $t = t_{cr}$. Асимптотика решения $K(M,t)$ вблизи от особенности (вне физической области степенного поведения) имеет вид

$$K(M,t) \rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{\frac{1}{M} - \frac{1}{M_{\max}(t)}}}}, \quad M_{\max}(t) = \frac{1}{c(t_{cr} - t)}. \quad (7.1)$$

Этого артефакта, связанного с использованием мгновенного δ -образного источника в уравнении Смолуховского, удастся избежать физически очевидной регуляризацией [22], смысл которой состоит в учете конечного времени нарастания гравитационной неустойчивости, приводящей к отделению галактик от общего расширения Вселенной. Математически это было учтено размытием δ -функции в правой части УС и заменой ее П-образной ступенькой с конечной малой

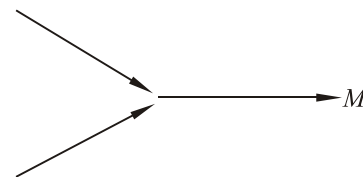


Рис. 7. Процесс парных слияний, порождающий галактику с массой M . Подобные процессы слияний за счет тройных процессов приводят к УС (2.1).

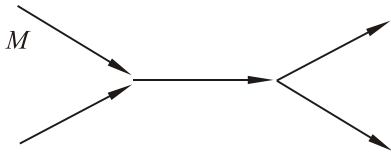


Рис. 8. Процесс слияний с возникновением промежуточной неустойчивой галактики, которая тут же распадается. (Эффективное рассеяние за счет тройных процессов во втором порядке.) При этом наибольшая масса у галактик может уменьшаться, что и приводит к разукрупнению.

шириной Δ . При этом значения ФМ остаются конечными и в области максимальных масс. Однако, по-прежнему, сама максимальная масса в регуляризованном решении также неограниченно нарастает при приближении к моменту взрыва [22].

Как и в других аналогичных задачах с учетом трехчастичных процессов (в нашем случае — процессов слияний галактик), приводящих к взрывной эволюции, конечные результаты возникают при учете четырехчастичных процессов, вступающих в игру вблизи от особенности, и в нашем случае описывающих рассеяние с передачей массы. При этом, в отличие от слияний, при которых масса может только увеличиваться, существенную роль начинают играть процессы рассеяния, при которых масса наиболее массивных галактик может и уменьшаться (рис. 8, 9).

Ниже рассмотрена простейшая модельная схема, описывающая разукрупнение. На этом пути предполагается дать объяснение наблюдаемому явлению «даунсайзинга» (рис. 3), когда с течением времени возрастание характерной наибольшей массы сменяется ее убыванием.

Мы ограничиваемся дифференциальным приближением, описывающим малую передачу массы. Но теперь кинетическое уравнение из линейного превращается в нелинейное (квазилинейное), наиболее простая форма которого состоит в возникновении в УС нелинейного слагаемого $-\tilde{\gamma}w(\partial w/\partial M)$, где коэффициент $\tilde{\gamma}$ обозначает вероятность процесса «неупругого» рассеяния. При этом процесс рассеяния должен сопровождаться потерей массы*.

Рассмотрим вначале вероятность слияний, пропорциональную M^2 . В этом случае в простейшей модели естественно выбрать такую же зависимость от массы и вероятности рассеяния: $\tilde{\gamma} = \gamma M^2$. Для этого имеются физические основания, которые мы здесь не обсуждаем. Вводя переменную $z = 1/M$, перепишем квазилинейный член $-\gamma M^2(\partial w/\partial M)$ в виде $\gamma(\partial w/\partial z)$. Хотя источник в

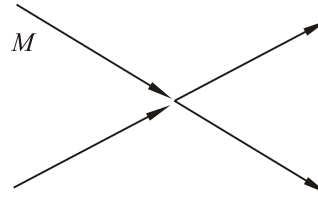


Рис. 9. Процесс прямого рассеяния за счет четверных процессов с разукрупнением галактик. Через M на всех рисунках обозначена масса наиболее массивной галактики. Процессы, изображенные на рис. 3 и 4, при условиях малой передачи массы приводят к рассмотренному нелинейному УС (7.2), описывающему разукрупнение.

УС весьма существен, упомянутая асимптотика (1) удовлетворяет однородному кинетическому уравнению, которым мы и ограничимся.

Интересующая нас задача** таким образом сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial x} + f(w) \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (7.2)$$

где $f(w) = \gamma w - \text{СП}$ линейна по функции масс w . Уравнение (7.2) представляет собой обобщенное уравнение Хопфа и хорошо изучено. Решение задачи Коши этого УС для функции масс $w(M, t)$ с квазилинейным членом, имеющим коэффициент $f(w)$ [28], сводится к кубическому уравнению (x — время $t - t_0$, где t_0 — момент сшивки со взрывным решением, играющей роль начального условия в задаче Коши, $z = 1/M$, где M — масса галактики):

$$\gamma(t - t_0)w^3 - \left\{ \left[\frac{1}{M} - \frac{1}{M_0} \right] - \text{СП} \cdot (t - t_0) \right\} w^2 + \beta^2 = 0. \quad (7.3)$$

Здесь γ — параметр нелинейности, СП — параметр, вошедший от решения линейного УС, а именно, S — коэффициент в вероятности слияний галактик SM^2 , $\Pi = \int_0^M dM_2 M_2 w(M_2)$ — полная масса маломассивных галактик, $M_0 \equiv M_{\max}(t_0)$ — максимальная масса галактик в линейной теории в момент t_0 , β — параметр асимптотики решения линейной задачи (7.1), которое используется в качестве начального условия при решении УС с нелинейным членом.

* Рассмотрим процесс рассеяния при столкновении галактик с близкими массами M и $M - \epsilon$, в результате которого возникают галактики с массами $M - \epsilon_1$ и $M - \epsilon_2$. Раскладывая соответствующий член в УС по малой передаче масс, получаем $w(M)w(M - \epsilon) - w(M - \epsilon_1)w(M - \epsilon_2) \approx (\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon)(\partial w/\partial M)w(M)$; $\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon \neq 0$; $\epsilon_{1,2} \ll M$.

** Используются обозначения справочника Зайцева и Полянина [32], задача 12.4.2.1 пункт 2 (стр. 271)

При $t = t_0$ ФМ $w(M, t)$, как следует из (7.3), удовлетворяет начальному условию (7.1)

$$w^2(M, t_0) = \frac{\beta^2}{\frac{1}{M} - \frac{1}{M_0}} \quad (7.4)$$

(соответствующему асимптотике нашего взрывного решения линейного УС), причем момент t_0 выбран нами близким к t_{cr} , чтобы можно было воспользоваться простой аналитической формой асимптотики (7.1)). При M , близком к M_0 — максимальной массе линейного решения в момент t_0 , — это большая величина. (Без учета нелинейности она стремится к бесконечности при времени, стремящемуся к моменту взрыва $t \rightarrow t_{cr}$).

Нас интересует вещественное решение кубического уравнения (3) для $w(M, t)$ на больших временах $t \gg t_0$ как функция M , в частности, поведение новой нелинейной «максимальной массы», которую еще предстоит определить, и ее зависимость от времени t .

Ограничимся демонстрацией асимптотики решения кубического уравнения (7.3) для ФМ при временах $t \gg t_0$ и массах $M \ll M_0$. Для $\gamma > 0$ имеется единственное решение, соответствующее положительной фигурной скобке в (3)

$$w = \frac{\frac{1}{M} - \text{СП} \cdot t}{\gamma \cdot t}. \quad (7.5)$$

При этом масса ограничена сверху условием (обращение в нуль фигурной скобки в (7.3))

$$M_{\max}(t) \leq \frac{1}{\text{СП} \cdot t}. \quad (7.6)$$

Видно, что максимальная масса убывает с течением времени, в чем и состоит явление даунсайзинга. В полученном решении все величины конечны, что подтверждается численным расчетом. От взрывной эволюции сохранилось лишь локальное по массам нарастание решения вблизи от бывшей особенности. Заметим, что такое нарастание может свидетельствовать об этапе взрывной эволюции ФМ.

Таким образом, полное решение представляет собой спадающую степенную функцию, типа функции Шехтера, которая перед спадом на больших массах начинает возрастать при временах, близких ко времени «взрыва». Вмешательство процессов разукрупнения

(рассеяния с уменьшением наибольшей массы) приводит как к убыванию ФМ с ростом массы, которая проходит через локальный максимум, так и к убыванию максимальной массы с течением времени. Это вполне соответствует наблюдаемому эффекту разукрупнения.

От зависимости M^2 в вероятности слияний легко перейти к любой степенной зависимости M^u заменой $z = M^{1-u}/(u-1)$, т.е. заменой в полученном решении $M^{-1} \rightarrow M^{1-u}/(u-1)$.

Мы решали предельно упрощенную модельную задачу*. Но даже в такой постановке возникает явление разукрупнения. В действительности, процесс разукрупнения должен описываться интегральным кинетическим уравнением с учетом рассеяния с потерей массы.

Приложение

Преобразования Захарова в кинетическом уравнении Смолуховского [29,30]

Исходим из кинетического уравнения Смолуховского (2.1), описывающего парные слияния

$$\frac{\partial f(m, t)}{\partial t} = \int dm_1 dm_2 [U_m |_{12} \delta_m f_1 f_2 - \text{cycle-bicycle}], \quad (\text{П.1})$$

где $f_1 \equiv f(m_1, t)$ и так далее ФМ, $\delta_m \equiv \delta(m - m_1 - m_2)$ — дираковская δ -функция, выражающая закон сохранения массы при слияниях, cycle означает циклическую перестановку аргументов («масс») m, m_1, m_2 ; bicycle — двойную их перестановку в сравнении с первым слагаемым.

В том случае, когда вероятность слияний является однородной функцией масс с показателем однородности u :

$$U(am | am_1, am_2) = a^u U(m | m_1, m_2), \quad (\text{П.2})$$

весьма эффективны преобразования Захарова, которые впервые были им применены в связи с решением уравнений слабой турбулентности для волн на поверхности жидкости.

Эти преобразования в терминах масс имеют вид**:

$$\begin{aligned} G_1 &= m_1 \rightarrow \frac{m}{m_1} m_2, \quad m \rightarrow \frac{m}{m_1} m_1, \quad m_2 \rightarrow \frac{m}{m_1} m, \\ G_2 &= m_1 \rightarrow \frac{m}{m_2} m, \quad m \rightarrow \frac{m}{m_2} m_2, \quad m_2 \rightarrow \frac{m}{m_2} m_1. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

* Процессы «неупругого» рассеяния были включены во взрывную эволюцию в момент, близкий к моменту «взрыва». Используется соответствующая асимптотика нерегуляризованного решения в качестве начального условия при решении УС с учетом рассеяния.

** В случае обобщенного уравнения Смолуховского для функции распределения по массам и моментам вращения полезными оказываются векторные преобразования Каца–Конторовича (см. [31], а также [32] и изложение в обзоре [33]), являющиеся нетривиальным обобщением преобразований Захарова на неоднородный случай. Как и преобразования Захарова, они образуют группу [34].

Они учитывают, что в интегральном кинетическом уравнении одна из масс фиксирована.

Применение этих преобразований позволяет факторизовать интеграл столкновений и найти точные степенные решения, соответствующие постоянному потоку массы по спектру.

Преобразования рассматриваем как замены переменных интегрирования в интегралах.

$$G_1: m_1 \rightarrow \frac{m}{m_1} m_2, \quad m_2 \rightarrow \frac{m}{m_1} m \rightarrow \frac{m}{m_1} \left(\frac{m}{m_1} m_1 \right) = \left(\frac{m}{m_1} \right)^2 m_1,$$

$$G_2: m_2 \rightarrow \frac{m}{m_2} m_1, \quad m_1 \rightarrow \frac{m}{m_2} m \rightarrow \frac{m}{m_2} \left(\frac{m}{m_2} m_2 \right) = \left(\frac{m}{m_2} \right)^2 m_2. \quad (\text{П.3а})$$

При этих преобразованиях пути интегрирования по бесконечным лучам в m_1, m_2 — плоскости (см. рис. П.1) трансформируются в интегрирование по конечному отрезку, а уравнение приобретает форму интегро-дифференциального уравнения с интегрированием в конечных пределах с переменным верхним пределом:

С учетом $x \rightarrow m-x$ симметрии оно приобретает вид

$$\frac{\partial f(m, t)}{\partial t} = 2 \int_0^{m/2} dx U_{m|x, m-x} \{ \}, \quad (\text{П.4})$$

$$\{ \} = f(m-x)f(x) - \left(\frac{m}{x} \right)^{2+u} f\left(\frac{m}{x}(m-x) \right) f(m) - \left(\frac{m}{m-x} \right)^{2+u} f\left(\frac{mx}{m-x} \right) f(m).$$

Если допустить степенной вид решения $f \propto m^s$, то фигурная скобка факторизуется

$$\{ \} = f(m-x)f(x) \left\langle 1 - \left(\frac{m}{x} \right)^v - \left(\frac{m}{m-x} \right)^v \right\rangle, \quad v = 2 + u + 2s. \quad (\text{П.5})$$

Вклад в показатель v дает якобиан преобразования, вероятность слияния с учетом дельта-функции и квадратичная комбинация функций масс в уравнении (П.1). В силу сохранения массы значение $v = -1$ обращает угловую, а с ней и фигурную скобку в нуль. Возвращаясь к исходному уравнению, мы видим, что получили его стационарное решение.

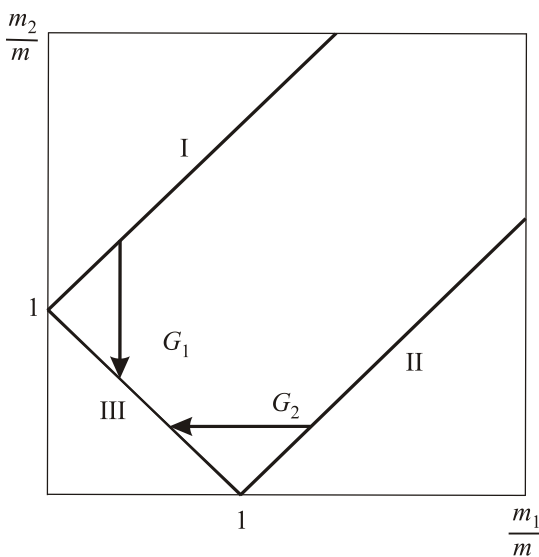


Рис. П.1. Преобразования (П.1, П.2) переводят пути интегрирования по лучам I и II в путь по отрезку III.

$$f \propto m^{s_1}, \quad v = -1, \quad s_1 = -\frac{3+u}{2}. \quad (\text{П.6})$$

Нетрудно убедиться, что оно соответствует постоянному потоку массы P по спектру, причем, как это ясно из физических соображений и из расчета (см. [35]), поток направлен в сторону больших масс.

$$f_P = c_1 P^{1/2} m^{s_1}. \quad (\text{П.7})$$

Распределения эти однако, как правило нелокальны, т.е. соответствующие интегралы «столкновений» на них расходятся. Оказывается, что такая расходимость имеет место на малых массах. Это означает преобладание слияний с маломассивными галактиками. При этом становится возможен переход к дифференциальному кинетическому уравнению. Возникает дополнительный приближенный закон сохранения числа массивных галактик и, соответственно, приближенное стационарное решение с постоянным потоком числа массивных галактик по спектру. Остановимся на этом более подробно.

Если допустить, что преобладает взаимодействие с малыми массами в силу нелокальности интегралов, а на тяжелом конце распределения спектр достаточно

крутой, то тогда второй член в уравнении (П.4) дает малый вклад и его можно опустить.

Фигурная скобка сводится к

$$\left\{ \right\} = f(m-x)f(x) \left\langle 1 - \left(\frac{m}{m-x} \right)^v \right\rangle, \quad (\text{П.8})$$

откуда видно, что она обращается в нуль при $v = 0$.

Этому соответствует решение с постоянным потоком числа массивных галактик по спектру:

$$f \propto m^{s_0}, \quad v = 0, \quad s_0 = -\frac{u+2}{2}. \quad (\text{П.9})$$

Действительно, поток числа массивных галактик по спектру можно представить в виде

$$J_0(m) = -\int dx I_{st}. \quad (\text{П.10})$$

Здесь через I_{st} обозначен «интеграл столкновений» — правая часть кинетического уравнения, которому придается, таким образом, вид уравнения непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial J_0(m)}{\partial m} = 0. \quad (\text{П.11})$$

На степенном распределении $f \propto m^s$ поток галактик (П.10) тогда равен

$$J_0(m) = -\int dx x^{v-1} F_0(v) = -m^v \frac{F_0(v)}{v}, \quad (\text{П.12})$$

где

$$F_0(v) = 2 \int_0^{1/2} d\zeta U_{|\zeta, 1-\zeta} f(\zeta) f(1-\zeta) \left\langle 1 - \left(\frac{1}{1-\zeta} \right)^v \right\rangle. \quad (\text{П.13})$$

Поскольку решение с постоянным потоком, согласно (П.8), соответствует $v = 0$, а $F_0(v)$ при $v = 0$, как видно из (П.13), обращается в нуль, то необходимо рас-

крыть неопределенность в выражении для потока (П.12). Следует также учесть при этом односторонний предел $v \rightarrow +0$, что соответствует интегрируемости исходного уравнения. Используя правило Лопиталья, получаем решение с постоянным потоком (массивных) галактик. Поток стремится к константе, с помощью которой нормируем полученное распределение (см. [36])

$$J_0 \rightarrow Q = -\frac{\partial F_0}{\partial v} \Big|_{v=+0}. \quad (\text{П.14})$$

В итоге находим выражение для потока галактик, являющегося функционалом распределения и вероятности слияний

$$Q = 2 \int_0^{1/2} dx U_{|x, 1-x} f(x) f(1-x) \ln \frac{1}{1-x} > 0. \quad (\text{П.15})$$

Используя определение потока, нормируем полученное распределение

$$f_Q = c_0 Q^{1/2} m^{s_0}. \quad (\text{П.16})$$

Заметим, что проведенная процедура соответствует источнику в УС вида $Q\delta(m)$, что легко проверить, используя представление δ -функции через степенную функцию [37].

В силу существования дополнительного приближенного интеграла начинают играть роль распределения с двумя потоками, что приводит к спектрам с изломами и разными степенными асимптотиками на легком и тяжелом концах спектра масс. Убедимся, что полученные решения представляют собой асимптотики решения с изломом при $P/m_{br} Q \sim 1$.

В исходном уравнении имелись расходимости как на малых, так и на больших (бесконечных) массах. Эти особенности частично компенсируют друг друга на степенных решениях. После преобразования Захарова уравнение упрощается в том смысле, что теперь имеется только одна сингулярная точка в нуле. Раскладывая вблизи нее, получаем

$$\frac{\partial f(m,t)}{\partial \tau} = -A \left(\frac{\partial f(m)}{\partial m} + \frac{2+u}{m} f(m) \right) - f(m) \int_0^1 dx \left(\frac{m}{x} \right)^{2+u} f \left(\frac{m^2}{x} \right) - \frac{f(m)}{m} \int_0^1 dx x^2 \frac{\partial f(x)}{\partial x}; \quad A = \int_0^1 dx x f(x), \quad (\tau = t \cdot 2U_{m|0m}). \quad (\text{П.17})$$

Указанная выше компенсация учитывается здесь автоматически. Для степенных распределений, регуляризованных вблизи нуля в том смысле, что в интегралах нуль заменен малой конечной величиной, приходим к уравнению

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = A \frac{\partial \Phi}{\partial m} + B \Phi^2, \quad \Phi \equiv m^\mu f(m,t), \\ B = \int_0^1 dx/x^\mu, \quad \mu = 2+u+s. \quad (\text{П.18})$$

В силу сказанного, A и B — конечные величины, содержащие параметр обрезания. Ему нетрудно придать физический смысл, так как не существует галактик нулевой массы. Формальное решение уравнения (П.18)

$$1/\Phi = Cm + D (C = B/A) . \quad (\text{П.19})$$

имеет две степенные асимптотики, разделенные условием $Cm \sim D$, что соответствует $P/m_{br}Q \sim 1$, где m_{br} — масса излома спектра

$$\begin{aligned} 1/\Phi &= Cm \quad (f \propto m^{s_1}, Cm \gg D); \\ 1/\Phi &= D \quad (f \propto m^{s_2}, Cm \ll D). \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Средний степенной индекс лежит между s_1 и s_2 и, таким образом, в данной модели зависит от связи размеров галактик с их массой, определяющей эти индексы*.

Эпилог

Черная дыра в центре, сложно устроенное ядро, структурированная звездная и не менее сложная газовая составляющая, дисковая и сфероидальные составляющие, спиральные рукава различных масштабов, и многое другое. От всего этого мы отвлеклись, сосредоточив внимание только на одной важнейшей характеристике галактики — ее массе. Лишь относительно недавно стало ясно, что существеннейшую роль в эволюции играет взаимодействие галактик. Оно приводит, в частности, к их активности, а увеличение массы и изменение момента вращения (см., например, [39,40]) происходит главным образом путем слияний. Именно этот процесс, вызываемый законом всемирного притяжения, мы обсуждали, считая его лежащим в основе многочисленных следствий, определяющих свойства галактик. При этом, в необозримом море исследований мы ограничились лишь взрывной эволюцией.

Разумеется, подход, основанный на уравнении коагуляции, свободен для критики. Однако с его помощью удастся удивительно простым образом навести порядок (возможно, иллюзорный) в наших самых общих представлениях об эволюции ФС галактик вплоть до эпохи их возникновения. Поэтому в заключение мы можем лишь напомнить эпиграф Н.В. Гоголя к его «Ревизору». Уравнение коагуляции проявило себя вполне адекватным зеркалом.

Идея о существенной роли слияний галактик в возникновении радиогалактик и квазаров одним из первых высказывалась Б.В. Комбергом, многочисленные обсуждения с которым и неоценимая дружеская поддержка определили наш интерес к этой области исследований. Автор благодарен А.В. Кацу за многолетнее сотрудничество и разрешение использовать фрагменты из совместных работ, а также А. Донец за помощь в подготовке данной статьи.

1. И.М. Лифшиц, В.В. Слезов, *ФТТ* **1**, 1401 (1959); *ЖЭТФ* **35**, 479 (1958).
2. В.М. Конторович, *Влияние слияний на динамические свойства галактик*, В материалах международной конференции «Динамика гравитирующих систем» под ред. О.О. Железняк, С.А. Силича и П.И. Фомина, Украина, Умань, 19–21 мая 1998; КФНТ, Приложение 2, (1999), с. 47
3. В.М. Волощук, *Кинетическая теория коагуляции*, Гидрометеиздат, Ленинград (1984).
4. M.H. Ernst, *Kinetics of Cluster Formation at Irreversible Aggregate*, In: *Fractals in Physics*, L. Pietronero and E. Tosatti (eds.), North-Holland, Amsterdam (1986), p.399.
5. A.V. Kats and V.M. Kontorovich, *Astron. Astrophys. Trans.* **2**, 183 (1992).
6. W.H. Stockmayer, *J. Chem. Phys.* **11**, 45 (1943).
7. Б.А. Трубников, *ДАН СССР* **196**, 1316 (1971).
8. V.M. Kontorovich, D.S. Krivitsky, and A.V. Kats, *Physica D* **87**, 290 (1995).
9. A. Cavaliere, S. Colofrancesco, and N. Menci, *Astrophys. J.* **376**, N 2, L37 (1991).
10. А.В. Кац, В.М. Конторович, *Письма в астрон. журн.* **17**, 229 (1991).
11. Л.И. Винокуров, А.В. Кац, *Физика атмосферы и океана* **16**, 601 (1980).
12. В.М. Конторович, А.В. Кац, Д.С. Кривицкий. *Письма в ЖЭТФ* **55**, 3 (1992)
13. C. Steidel, *Proc. NAS USA* **96**, 42321 (1999)
14. А.В. Кац, В.М. Конторович, *Радиофизика и радиоастрономия* **18**, № 3, 220 (2013).
15. C. Borys, S. Chapman, M. Donahue, C. Borys, S. Chapman, M. Donahue, G. Fahlman, M. Halpern, J.-P. Kneib, P. Newbury, D. Scott, and G.P. Smith, *MNRAS* **352**, 759 (2004).
16. A. Berciano Alba, L. Koopmans, M. Garrett, Alba A. Berciano, L.V.E. Koopmans, M.A. Garrett, O. Wucknitz, and M. Limousin, *A&A*, **A54**, 1 (2010).

* Реальное определение слабого конца ФС представляет большие трудности даже для близких (в космологическом смысле) объектов. Между тем от значения степенного индекса на слабом конце зависит важный вывод о вкладе малых галактик в общую массу Вселенной. При $s < -2$ на слабом конце полная масса галактик расходится. Значению $s = -2$ соответствует логарифмическая расходимость. Уже ранние работы показали, что индекс Шехтера близок к -2 , современные исследования продолжаются. Поскольку данная статья написана для физиков, более подробно на этом мы не останавливаемся. Галактики сами по себе уже являются сложнейшими объектами, наблюдения которых проводятся все ускоряющимися темпами (см. свежий обзор Б. Комберга и С. Репина об исследовании галактик [38], где число упоминаемых работ столь велико, что авторы отказались от их традиционного цитирования, не указывая, как правило, ни имен, ни названия, а только ссылку на архив или журнал).

17. R.J. Bouwens, G.D. Illingworth, M. Franx, and H. Ford, *ApJ*, **670**, 928 (2007); Arxiv: 0707.2080.
18. R.J. Bouwens, G.D. Illingworth, P.A. Oesch, I. Labbe, M. Trenti, P. van Dokkum, M. Franx, M. Stiavelli, C.M. Carollo, D. Magee, and V. Gonzalez, *ApJ*, **709L**, 133 (2010); Arxiv: 1006.4360v4
19. R. Ellis and J. Silk, *New Frontiers in Cosmology and Galaxy Formation: Challenges for the Future*. In: *Structure formation in Astrophysics*, G. Chabrier (ed.), Cambridge University Press (2008); astro-ph/0712286.
20. J. Silk and G. Mamon, *Research in Astron. Astrophys*, **12**, 917 (2012); Arxiv:1207.3080.
21. В.М. Конторович, А.В. Кац, Д.С. Кривицкий. *Письма в ЖЭТФ* **55**, 3 (1992).
22. A.V. Kats and V. M. Kontorovich. *Astrophysical Bulletin* **68**, No. 3, 273 (2013); astro-ph/1309.0957.
23. В.В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, ГИФМЛ, Москва (1959).
24. A.V. Kats and V.M. Kontorovich, *Advances in Astronomy and Space Physics* **3**, 131 (2013).
25. B. Binggeli, A. Sandage, and G.A. Tammann, *Ann. Rev. Astron. Ap.* **26**, 509 (1988).
26. W.H. Press and P. Shechter, *Astrophys. J.* **187**, No. 3, 425 (1974).
27. В.М. Конторович, *ВАНТ* **4** 157 (2015); Arxiv:1507.00192.
28. В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин, *Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка*. Справочник. Физматлит, Москва (2003).
29. V.M. Kontorovich, *Merging Galaxies in Compact Groups: Analytical Theory*, In : *Small Galaxy Groups ASP Conference Series*, M. Valtonen and C. Flynn (eds.), **209**, 423 (2000).
30. V.M. Kontorovich, *Physica D* **152**, 676 (2001).
31. А.В. Кац, В.М. Конторович, *ЖЭТФ* **64**, 15 (1973); *ЖЭТФ* **65**, 206 (1973).
32. L.I. Vinokurov, A.V. Kats, and V.M. Kontorovich, *J. Statist. Phys.* **38**, 217 (1985).
33. Б.Б. Кадомцев, В.М. Конторович, *Изв. ВУЗов. Радиофизика* **17**, 511 (1974).
34. A.V. Kats and V.M. Kontorovich, *Physica A* **86**, 471 (1977).
35. А.В. Кац, *ЖЭТФ* **71**, 2104 (1976).
36. В.И. Карась, С.С. Моисеев, В.Е. Новиков, *ЖЭТФ* **71**, 1421 (1976).
37. А.В. Кац, В.М. Конторович, *Взаимосвязь равновесных и потоковых слаботурбулентных распределений*, в сб. *Нелинейные волны*, под ред. А.В. Гапонова-Грехова, Наука, Москва (1979), с. 151.
38. Б.В. Комберг, С.В. Репин, *Звездные острова Вселенной с релятивистскими гейзерами в центрах. Галактики на рабочем столе*. Янус-К, Москва (2014).
39. А.В. Кац, В.М. Конторович, *ВАНТ* №4 (68), 137 (2010).
40. D.S. Krivitsky and V.M. Kontorovich, *Astron. & Astrophys.* **327**, 921 (1997).

The evolution of galaxies in the mirror of coagulation equation

V.M. Kontorovich

Smoluchowski equation and its generalizations, describing the merger of the particles, allow us to understand the basic stages formation of galaxy mass functions, established as a result of mergers, and their evolution and, thus, provide an explanation for the results of long-term observations on the Hubble Space Telescope and the large ground-based telescopes.

PACS: 05.20.Dd Kinetic theory;
 98.62.Ai Origin, formation, evolution, age, and star formation;
 98.62.Dm Kinematics, dynamics, and rotation.

Keywords: galaxies: evolution, mergers, large redshifts; coagulation equation.