Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2017, т. 43, № 5, с. 707–713

Сингулярная оптика спиновых волн в двухподрешеточном антиферромагнетике с одноосной магнитной анизотропией

Ю.И. Горобец[1], О.Ю. Горобец[1,2]

[1] *Институт магнетизма НАН и МОН Украины, г. Киев, 03142, Украина*
E-mail: gorobets@imag.kiev.ua

[2] *Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев, 03056, Украина*
E-mail: pitbm@ukr.net

Статья поступила в редакцию 30 сентября 2016 г., опубликована онлайн 24 марта 2017 г.

На основе точных 3D решений уравнений Ландау–Лифшица в двухподрешеточном антиферромагнетике с одноосной магнитной анизотропией предсказано существование нелинейных спиновых волн с особыми точками на волновом фронте, которые являются спин-волновыми аналогами оптических сингулярностей.

На підставі точних 3D рішень рівнянь Ландау–Ліфшиця в двухгратковому антиферомагнетику з одновісною магнітною анізотропією передбачено існування нелінійних спінових хвиль з особливими точками на хвильовому фронті, які є спін-хвильовими аналогами оптичних сингулярностей.

PACS: **75.25.–j** Конфигурация спинов в магнитоупорядоченных материалах (включая нейтронные и спин-поляризованные электронные исследования, синхронное рентгеновское рассеяние и т.д.);
75.30.Ds Спиновые волны.

Ключевые слова: спиновые волны, двухподрешеточный антиферромагнетик, уравнения Ландау–Лифшица, модулированный волновой фронт, сингулярная оптика.

Введение

В последнее время успешно развиваются методики для измерения распределения интенсивности спиновых волн в образце с высокой пространственной и временной разрешающими способностями [1–4]. С их помощью исследуется поведение одно- и двумерных спин-волновых пакетов, спин-волновых солитонов типа «envelope» и «bullets», в том числе их свободное распространение, столкновения, параметрическое возбуждение и обращение волнового фронта [5–7]. Недавно также были разработаны экспериментальные подходы, которые делают доступными для измерений информацию о фазе волновых пакетов, что позволило наблюдать спин-волновой фронт с полным двумерным фазовым разрешением и детектировать фазу линейных и нелинейных спин-волновых пакетов [8]. На сегодня обращение волнового фронта спин-волновых импульсов эффективно используется для обработки сверхвысокочастотных сигналов [9]. Использование особенностей волнового фронта спиновых волн для передачи информации исследуется в основном в ферромагнитных материалах и ферритах. Однако рассматриваются и новые перспективные материалы для спин-волновой электроники — антиферромагнетики, так как они позволяют работать на более высоких частотах [10].

Кроме того, в связи с техническими возможностями регистрации фазы и наблюдения фронта спиновых волн представляется актуальным применение методов, развитых и реализованных в сингулярной оптике (другими словами в волновой оптике винтовых полей) [11], для создания сингулярностей на фронте линейных и нелинейных спиновых волн с целью записи и передачи информации. На сегодняшний день идеи сингулярной оптики успешно используются для широкого диапазона длин электромагнитных волн, а также для волновых полей другой природы. В частности, такими примерами являются сингулярная электронная оптика [12] и завихренность радиоволн [13]. В последнем случае недавно экспериментально была продемонстрирована возможность кодирования и одновременной передачи нескольких радиоканалов на одной и той же частоте путем создания радиочастотных вихрей с двумя разными состояниями орбитальных угловых моментов

[13]. Эта новейшая техника, в принципе, позволяет передавать неограниченное количество каналов на заданном фиксированном диапазоне частот [13]. В связи с появившимися новыми техническими возможностями регистрации фазы и наблюдения фронта спиновых волн в данной работе теоретически показана возможность распространения нелинейных спиновых волн с модулированными фронтами и трехмерных солитонов в двухподрешеточном антиферромагнетике с одноосной магнитной анизотропией на основе трехмерных нелинейных решений уравнений Ландау–Лифшица.

В частности, модуляция фронта таких нелинейных спиновых возбуждений может содержать сингулярности фронта волны типа оптических винтовых дислокаций разного порядка [14,15], а также плоские особые точки волнового поля типа циркуляции, источника, стока [16].

Основная часть

Рассмотрим двухподрешеточный антиферромагнетик с одноосной магнитной анизотропией и с намагниченностями подрешеток $\mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2$, $|\mathbf{M}_1| = |\mathbf{M}_2| = M_0$, где модуль намагниченности обеих подрешеток $M_0 = \mathrm{const}$. Учитывая условия постоянства модуля вектора антиферромагнетизма $|\mathbf{L}| = L_0 = \mathrm{const}$, выберем параметризацию:

$$L_x = 2M_0 \sin\theta\cos\varphi, \quad L_y = 2M_0 \sin\theta\sin\varphi,$$

$$L_z = 2M_0\cos\theta, \tag{1}$$

где θ и φ — полярный и азимутальный углы для вектора антиферромагнетизма, L_x, L_y, L_z — декартовы координаты вектора антиферромагнетизма. Тогда уравнения Ландау–Лифшица, описывающие динамику вектора $\mathbf{L}$, имеют вид [17]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\sin^2\theta\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \omega_H\right)\right] - c^2\,\mathrm{div}\left((\nabla\varphi)\sin^2\theta\right) = 0, \\ \dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\theta + \left[\omega_0^2\,\mathrm{sgn}(\beta_1) + c^2(\nabla\varphi)^2 - \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \omega_H\right)^2\right]\sin\theta\cos\theta = 0. \end{cases} \tag{2}$$

где $\omega_H = gH_0$, $g = \dfrac{2\mu_0}{\hbar}$ (μ_0 — магнетон Бора, $\hbar$ — константа Планка, H_0 — напряженность внешнего магнитного поля),

$$\mathrm{sgn}(\beta_1) = \begin{cases} 1, & \beta_1 > 0, \\ -1, & \beta_1 < 0. \end{cases}$$

$$c = \frac{4\mu_0 M_0}{\hbar}\sqrt{A\alpha_1}, \quad \omega_0 = \frac{4\mu_0 M_0}{\hbar}\sqrt{A|\beta_1|}. \tag{3}$$

A — константа энергии однородного обмена, α_1 — константа неоднородного обмена, β_1 — константа одноосной магнитной анизотропии. Уравнение (2) имеет следующие частные трехмерные нелинейные решения [18–21] (вывод уравнений (2) и метод получения частных решений рассмотрены в работе [22]):

$$\begin{cases} \theta = 2\,\mathrm{arctg}\left\{H\left[P(x,y,z)\right]\right\}, \quad P(x,y,z) = p\left(\dfrac{z - v_P t}{l_0}\right) + f\left(\dfrac{x}{l_0}, \dfrac{y}{l_0}\right), \\ \varphi = q\left(\dfrac{z - v_Q t}{l_0}\right) + g\left(\dfrac{x}{l_0}, \dfrac{y}{l_0}\right) + \int \omega_H(t)\,dt, \end{cases} \tag{4}$$

где x, y, z — декартовы координаты радиус-вектора произвольной точки в антиферромагнетике, v — скорость нелинейной спиновой волны, $l_0 = \sqrt{\dfrac{\alpha_1}{|\beta_1|}} = \dfrac{c}{\omega_0}$, параметры p и q определяются выражениями

$$p = 0, \quad q = \pm\sqrt{\frac{-\mathrm{sgn}(\beta_1)}{1 - v_Q^2/c^2}} \tag{5}$$

или

$$p = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{sgn}(\beta_1)}{1 - v_P^2/c^2}}, \quad q = 0, \tag{6}$$

функция $H(P)$ имеет вид

$$H(P) = \frac{b_0}{\mathrm{dn}\left(c_0\sqrt{|C_1|}P, k_1\right)}, \tag{7}$$

где $c_0 = \sqrt{\dfrac{1+2C_1+\sqrt{1+4C_1}}{2|C_1|}}$, $b_0 = \sqrt{\dfrac{1+2C_1-\sqrt{1+4C_1}}{2|C_1|}}$,

$$k_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{1+4C_1}}{1+2C_1+\sqrt{1+4C_1}}},\ -\frac{1}{4} < C_1 < 0,\ 0 < k_1 \le 1,$$

или
$$H(P) = \sqrt{\frac{1-\mathrm{sn}(P,k_2)}{1+\mathrm{sn}(P,k_2)}}, \tag{8}$$

где $k_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+4C_1}}$, $C_1 > 0,\ 0 < k_2 \le 1$. Функции $f(X,Y)$ и $g(X,Y)$ имеют вид

$$\begin{cases} f(X,Y) = \sum_i \tilde{\tilde{n}}_i \ln(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|) + \frac{2}{\pi} k_{1,2}\cdot K(k_{1,2}) \sum_i \tilde{n}_i \alpha_i + C_2 + \\ + \sum_i \sum_n \frac{A_n^{(i)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|^n} \left(B_n^{(i)} \cos n\alpha_i + C_n^{(i)} \sin n\alpha_i\right), \\ g(X,Y) = -\frac{2}{\pi} k_{1,2}\cdot K(k_{1,2}) \sum_i \tilde{n}_i \ln(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|) + \sum_i \alpha_i \tilde{\tilde{n}}_i + C_3 + \\ + \sum_i \sum_n \frac{A_n^{(i)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|^n} \left(C_n^{(i)} \cos n\alpha_i - B_n^{(i)} \sin n\alpha_i\right), \end{cases} \tag{9}$$

где введены обозначения

$$X = \frac{x}{l_0},\ \ Y = \frac{y}{l_0}, \tag{10}$$

здесь $\mathbf{r}$ — двумерный вектор с координатами в плоскости XOY $\mathbf{r} = (X,Y)$, $\mathbf{r}_{0i}$ — двумерный вектор с координатами в плоскости XOY, перпендикулярной направлению распространения спиновой волны, $\mathbf{r}_{oi} = (X_{0i}, Y_{0i})$, где X_{0i}, Y_{0i} — некоторые безразмерные константы, $\alpha_i = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{Y-Y_{0i}}{X-X_{0i}}\right)$, i, n, $\tilde{n}_i$, $\tilde{\tilde{n}}_i$ — целые числа,

$$\Theta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \le 0 \\ 1, & \xi > 0 \end{cases},\ \ K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}. \tag{11}$$

Заметим, что выражение для функции $f(X,Y)$ в (9) представляет собой разложение в ряд по степеням $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|$ произвольной гармонической функции двух переменных X и Y, а выражение для функции $g(X,Y)$ в (9) представляет собой разложение в ряд по степеням $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|$ гармонической функции тех же двух переменных X и Y, которая является сопряженной функцией по отношению к функции $g(X,Y)$. Это значит, что функции $f(X,Y)$ и $g(X,Y)$ связаны условиями Коши–Римана [22] и являются собственными функциями двумерного оператора Лапласа.

Заметим, что в статическом случае (т.е. при $\dfrac{\partial\theta}{\partial t} = 0$ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$) уравнения (2), описывающие координатные зависимости полярного и азимутального углов вектора антиферромагнетизма в двухподрешеточном антиферромагнетике с одноосной магнитной анизотропией, совпадают с соответствующими уравнениями для пространственного распределения полярного и азимутального углов вектора намагниченности в ферромагнетике с одноосной магнитной анизотропией в обменном приближении [17] (т.е. в случае, когда можно пренебречь магнитостатической энергией ферромагнетика [17]). Поэтому функциональный вид всех полученных в настоящей работе решений уравнений (2) при $v_P = 0$ и $v_Q = 0$ распространяется и на случай статических распределений намагниченности ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» или «легкая плоскость». В этом смысле слова при анализе частных случаев решений (4) мы будем говорить об аналогичных известных решениях в ферромагнетике.

Проанализируем полученные трехмерные нелинейные решения (4) уравнений Ландау–Лифшица в двухподрешеточном антиферромагнетике с одноосной магнитной анизотропией (2). Для примера выберем функцию $H(P)$ в виде (8) и будем считать напряженность внешнего магнитного поля $H_0 = 0$. Также для определенности рассмотрим случай магнитной анизотропии типа «легкая ось», при этом параметры p и q определяются выражениями (6). Тогда проекции вектора антиферромагнетизма на оси декартовой системы координат примут вид

$$\begin{cases} L_x = 2M_0 \mathrm{cn}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v_P^2/c^2}}\cdot\left(\frac{z-v_P t}{l_0}\right) + f\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right), k_2\right) \cos\left(g\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)\right), \\ L_y = 2M_0 \mathrm{cn}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v_P^2/c^2}}\cdot\left(\frac{z-v_P t}{l_0}\right) + f\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right), k_2\right) \sin\left(g\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)\right), \\ L_z = 2M_0 \mathrm{sn}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v_P^2/c^2}}\cdot\left(\frac{z-v_P t}{l_0}\right) + f\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right), k_2\right). \end{cases} \tag{12}$$

Выражение (12) представляет собой нелинейную спиновую волну, распространяющуюся вдоль оси Oz. При $f\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)=g\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)=0$ решение (12) является нелинейной плоской волной. Как известно, волновой фронт волновых пучков, близких по своим свойствам к плоской волне, выглядит как семейство непересекающихся поверхностей. Расстояние между соседними поверхностями равно длине волны. При этом, функции $f\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)$ и $g\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)$ представляют собой модуляции плоского волнового фронта. В оптике имеющие место в реальных пучках отклонения волновых фронтов от плоской формы называются оптическими аберрациями. Однако все аберрации, рассматриваемые в классической теории, деформируют волновой фронт без изменения его топологии. Иная картина наблюдается при наличии в монохроматической волне оптических вихрей [11–15]. Если такие вихри появились, то на поверхности волнового фронта присутствуют особые точки, которые во многих отношениях аналогичны известным в физике твердого тела дефектам кристаллической решетки — *винтовым дислокациям* и имеют такое же название [11–15]. В самой особой точке амплитуда световых колебаний обращается в нуль, а значение фазы не определено. В окрестности ее происходят резкие коллапсирующие фазовые изменения. Из-за наличия такой особенности функция фазового распределения относится к классу сингулярных функций, что и стало причиной появления упомянутого выше термина «сингулярная оптика». Спиновая волна типа (12), как будет показано далее, при специальном выборе функций $f\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)$ и $g\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)$ может содержать особые точки на поверхности волнового фронта, в том числе винтовые дислокации, если для спиновых волн типа (4) пользоваться терминологией, которая принята для электромагнитных волн оптического диапазона. Так, в оптике винтовыми дислокациями называются точки фронта волны, при обходе вокруг которых в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения, фаза световых колебаний изменяется на величину $2\pi l$, где l — целое число, отличное от нуля. Величина l называется порядком дислокации или топологическим зарядом поверхности волнового фронта. Амплитуда электрического поля $E(r,\alpha)$ вблизи оптических винтовых дислокаций $r\to 0$ порядка l описывается выражением $E(r,\alpha)=r^l\exp(\pm il\alpha)$ [14].

В зависимости от направления закрутки «винта» волновой поверхности винтовые дислокации подразделяются на левые (отрицательные) и правые (положительные). На поверхности волнового фронта может возникать как единичная винтовая дислокация, так и целая система дислокаций. Появление винтовых дислокаций кардинальным образом меняет топологию волнового фронта. Эквифазная поверхность перестает быть многолистной, и осуществляется переход к единой поверхности со специфической винтовой структурой (рис. 1) [11–15].

Для описания аналогичных сингулярностей на фронте спиновой волны в решении (12) рассмотрим колебания вектора антиферромагнетизма в окрестности особой точки в плоскости, перпендикулярной направлению распространения спиновой волны $z=v_p t$. Здесь и далее наличие индекса i в соответствующих коэффициентах фактически означает возможность описания системы особых точек с радиус-векторами $\mathbf{r}=\mathbf{r}_{0i}$ в плоскости, перпендикулярной направлению распространения спиновой волны.

При этом возьмем асимптотику при $|\mathbf{r}=\mathbf{r}_{0i}|\to 0$ в выражении (9) для полного ряда разложения гармонической функции $f\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)$ и сопряженной ей гармонической функции $g\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)$ по степеням $|\mathbf{r}=\mathbf{r}_{0i}|$. Рассмотрим такое возмущение волнового фронта, для которого коэффициенты при $\ln\left(|\mathbf{r}=\mathbf{r}_{0i}|\right)$ и при целых отрицательных степенях $|\mathbf{r}=\mathbf{r}_{0i}|$ равны нулю. Подставляя эту асимптотику в (12), получим:

$$\begin{cases} L_x=2M_0\,\mathrm{cn}\left(A_l^{(i)}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|^l\left(B_l^{(i)}\cos n\alpha_i+C_l^{(i)}\sin l\alpha_i\right),k_2\right)\cos\left(A_l^{(i)}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|^l\left(C_l^{(i)}\cos l\alpha_i-B_l^{(i)}\sin l\alpha_i\right)\right),\\ L_y=2M_0\,\mathrm{cn}\left(A_l^{(i)}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|^l\left(B_l^{(i)}\cos l\alpha_i+C_l^{(i)}\sin l\alpha_i\right),k_2\right)\sin\left(A_l^{(i)}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|^l\left(C_l^{(i)}\cos l\alpha_i-B_l^{(i)}\sin l\alpha_i\right)\right),\\ L_z=2M_0\,\mathrm{sn}\left(A_l^{(i)}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|^l\left(B_l^{(i)}\cos l\alpha_i+C_l^{(i)}\sin l\alpha_i\right),k_2\right). \end{cases} \qquad (13)$$

В формулах (13) из всего ряда (9) разложения гармонической функции по степеням $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|$ при $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|\to 0$ остается только слагаемое с $n=-l$, где $l>0$ — минимальная положительная степень $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|$ в указанном ряде. Также, учитывая условие $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|\to 0$, в формулах (13) обычные, а также эллиптические синус и косинус можно разложить в ряд Тейлора с точностью до линейных членов по аргументу этих функций:

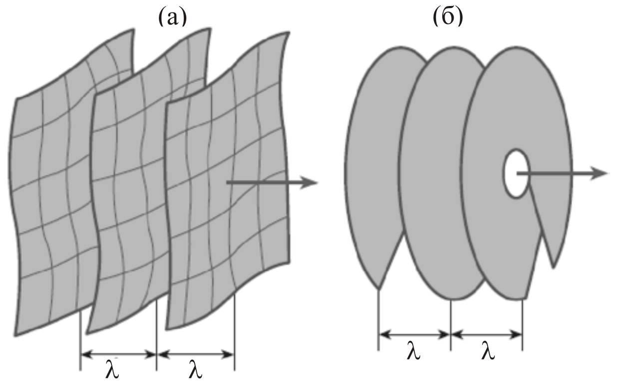

Рис. 1. Структура волновых фронтов при отсутствии (а), при наличии винтовой дислокации (б), λ — длина волны [11–15].

$$\begin{cases} L_x \approx 2M_0, \\ L_y \approx 2M_0 A_l^{(i)} \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}\right|^l \left(C_l^{(i)} \cos l\alpha_i - B_l^{(i)} \sin l\alpha_i\right), \\ L_z = 2M_0 A_l^{(i)} \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}\right|^l \left(B_l^{(i)} \cos l\alpha_i + C_l^{(i)} \sin l\alpha_i\right). \end{cases} \tag{14}$$

Разложение (14) справедливо, если

$$\left|A_l^{(i)} \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}\right|^l \left(B_l^{(i)} \cos l\alpha_i + C_l^{(i)} \sin l\alpha_i\right)\right| < \left|K\left(k_2'\right)\right| \text{ и}$$

$$\left|C_l^{(i)} \cos l\alpha_i - B_l^{(i)} \sin l\alpha_i\right| < 1,$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Если выбрать возмущение волнового фронта, для которого коэффициент $B_l^{(i)} = 0$ и обозначить $C^{(i)} = A_l^{(i)} C_l^{(i)}$, тогда из (14) следует:

$$\begin{cases} L_x \approx 2M_0, \\ L_y \approx 2M_0 C^{(i)} \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}\right|^l \cos l\alpha_i, \\ L_z \approx 2M_0 C^{(i)} \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}\right|^l \sin l\alpha_i. \end{cases} \tag{15}$$

Из формул (15) очевидно, что в окрестности особой точки с радиус-вектором $\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}$ в плоскости, перпендикулярной направлению распространения спиновой волны, амплитуда отклонения вектора антиферромагнетизма от однородного направления стремится к нулю при $\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}\right| \to 0$, а при обходе вокруг особой точки фаза нарастает на $2\pi l$. Это позволяет трактовать выражение (15) как спин-волновую аналогию оптической винтовой дислокации. В зависимости от направления вращения вектора антиферромагнетизма, которое определяется знаком топологического заряда l, выражение (15) описывает левые (отрицательные) и правые (положительные) винтовые дислокации (рис. 2).

Если же для описания модуляции фронта спиновой волны в решении (12) не полагать коэффициенты при $\ln\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}\right|\right)$ или при целых отрицательных степенях $\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}\right|$ равными нулю, то можно получить особенности с ненулевой амплитудой на фронте спиновой волны. Следующий пример спин-волновой особенности иллюстрирует случай, для которого амплитуда отклонения вектора антиферромагнетизма от однородного направления конечна при $\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}\right| \to 0$, а при обходе вокруг особой точки фаза нарастает на $2\pi l$:

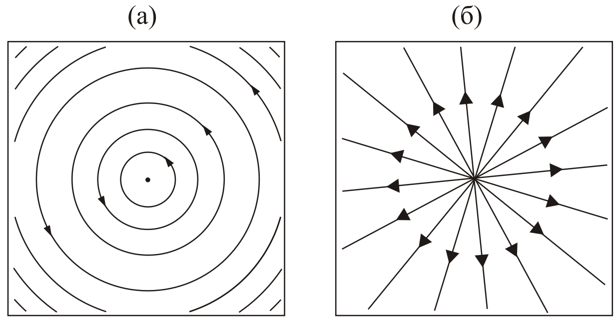

Рис. 2. Два типа сингулярностей для вращающихся компонент вектора антиферромагнетизма: циркуляция [23], согласно (16), при $C_3 = \pm(\pi/2)$ и $\tilde{\tilde{n}}_i = 1$ (а), источник или сток [23], согласно (15), при $l = 1$ или (16) при $\tilde{\tilde{n}}_i = 1$ и $C_3 = 0$ или $C_3 = \pi$ (б).

$$\begin{cases} L_x = 2M_0 \mathrm{cn}\left(\tilde{\tilde{n}}_i \ln\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}\right|\right), k_2\right) \cos\left(\alpha_i \tilde{\tilde{n}}_i + C_3\right), \\ L_y = 2M_0 \mathrm{cn}\left(A\tilde{\tilde{n}}_i \ln\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}\right|\right), k_2\right) \sin\left(\alpha_i \tilde{\tilde{n}}_i + C_3\right), \\ L_z = 2M_0 \mathrm{sn}\left(\tilde{\tilde{n}}_i \ln\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}\right|\right), k_2\right). \end{cases} \tag{16}$$

Несмотря на то, что за исключением особых случаев, принцип суперпозиции не справедлив для решений нелинейных уравнений, в решениях (4) реализован принцип суперпозиции для гармонических функций $f\left(\frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}\right)$ и $g\left(\frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}\right)$, которые стоят под знаком функции $H(P)$. А именно: сумма гармонических функций также является гармонической, их разложения в ряды (9) возможны в силу линейности оператора Лапласа, собственными функциями которого они являются. Поэтому для рассмотренной в данной работе нелинейной спиновой волны в антиферромагнетике может возникать как единичная особая точка, так и целая система особенностей с произвольным расположением на поверхности волнового фронта.

Отметим также несколько интересных частных случаев решений типа (4), рассмотренных в настоящей работе. Как известно, при значении модуля эллиптической функции, равном единице, эллиптические функции вырождаются в гиперболические, и выражение (8) для функции $H(P)$ значительно упрощается:

$$H(P) = \sqrt{\frac{1-\mathrm{th}(P)}{1+\mathrm{th}(P)}}. \tag{17}$$

При этом в параметризации (1) обычные тригонометрические синус и косинус полярного угла для вектора антиферромагнетизма задаются выражениями

$$\begin{cases} L_x = 2M_0 \sin\theta\cos\varphi = 2M_0\sqrt{1-\mathrm{th}^2(P)}\cos\varphi, \\ L_y = 2M_0 \sin\theta\sin\varphi = 2M_0\sqrt{1-\mathrm{th}^2(P)}\sin\varphi, \\ L_z = 2M_0\cos\theta = 2M_0\mathrm{th}(P), \end{cases} \quad (18)$$

где P и φ задаются формулами (4).

Выражение в последней формуле $L_z = 2M_0\mathrm{th}(P)$ напоминает кинк-подобный солитон (монополь), от английского kink — перегиб [24]. Формально кинк можно ввести как решение уравнений Кортевега–де Фриза [25], нелинейного уравнения Шредингера [26], уравнения sin-Гордона [27], описываемое гиперболическим тангенсом. Изменение знака решения типа «кинк» на противоположный дает «антикинк». При этом, в общем случае $L_z = 2M_0\mathrm{th}(P)$ представляет собой трехмерный кинк, а при $f\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)=0$ и $g\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)=0$ — одномерный.

Также выражение (8) для функции допускает значительное упрощение при значении модуля эллиптической функции, равном нулю, так как при этом эллиптические функции вырождаются в обычные тригонометрические синус и косинус. С учетом вышеуказанного предельного случая выражение (8) для функции $H(P)$ принимает вид

$$H(P) = \sqrt{\frac{1-\sin(P)}{1+\sin(P)}}. \quad (19)$$

При этом в параметризации (1) обычные тригонометрические синус и косинус полярного угла для вектора антиферромагнетизма также выражаются через тригонометрические синус и косинус:

$$\begin{cases} L_x = 2M_0\sin\theta\cos\varphi = 2M_0\cos(P)\cos\varphi, \\ L_y = 2M_0\sin\theta\sin\varphi = 2M_0\cos(P)\sin\varphi, \\ L_z = 2M_0\cos\theta = 2M_0\sin(P), \end{cases} \quad (20)$$

где P и φ также задаются формулами (4).

Проводя вышеуказанное соответствие между решениями (4) и аналогичными решениями для распределений намагниченности в ферромагнетике с одноосной магнитной анизотропией, заслуживает внимания, что при $v_P = 0$ в одномерном случае (т.е. при $f\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)=0$ и $g\left(\frac{x}{l_0},\frac{y}{l_0}\right)=0$, $P=P(z)=\frac{z}{l_0}$) подстановка (18) в (1) дает плоскую доменную границу [28,29]. В этом же смысле подстановка (12) в (1) в одномерном случае при $v_P = 0$ описывает распределение намагниченности ферромагнетика, полученное впервые Широбоковым [30]:

$$\begin{cases} L_x = 2M_0\mathrm{cn}\left(\frac{z}{l_0},k_2\right), \\ L_y = 0, \\ L_z = 2M_0\mathrm{sn}\left(\frac{z}{l_0},k_2\right). \end{cases} \quad (21)$$

Эта и следующие формулы могут использоваться при проведении аналогии между решениями (4) и статическими распределениями намагниченности ферромагнетика, если положить $\mathbf{L} = \mathbf{M}$ — вектор намагниченности ферромагнетика, $M_S = 2M_0$ — намагниченность насыщения ферромагнетика. Однако эти формулы одновременно описывают нелинейные статические решения уравнений (2) в двухподрешеточном антиферромагнетике.

Рассмотрим также вышеуказанное соответствие между решениями (4) и аналогичными решениями для распределений намагниченности в ферромагнетике с одноосной магнитной анизотропией в двумерном случае (т.е. при отсутствии зависимости углов θ и φ от координаты z, что имеет место в магнетике без анизотропии, т.е. при $\beta_1 = 0$). Тогда при $v_P = 0$ и при выборе следующих функций $f(X,Y)$ и $g(X,Y)$

$$\begin{cases} f(X,Y) = \tilde{\tilde{n}}\ln(r), \\ g(X,Y) = \alpha\tilde{\tilde{n}}, \end{cases} \quad (22)$$

подстановка (18) в (1) дает в качестве частного случая решений (4) известный двумерный солитон Белавина–Полякова в изотропном ферромагнетике [31]:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)^{\tilde{\tilde{n}}}, \\ \varphi = \tilde{\tilde{n}}\alpha, \end{cases} \quad (23)$$

или то же самое в других обозначениях:

$$\begin{cases} L_x = 2M_0\sqrt{1-\left(\frac{r^{\tilde{\tilde{n}}}-r^{-\tilde{\tilde{n}}}}{r^{\tilde{\tilde{n}}}+r^{-\tilde{\tilde{n}}}}\right)^2}\cos\alpha\tilde{\tilde{n}}, \\ L_y = 2M_0\sqrt{1-\left(\frac{r^{\tilde{\tilde{n}}}-r^{-\tilde{\tilde{n}}}}{r^{\tilde{\tilde{n}}}+r^{-\tilde{\tilde{n}}}}\right)^2}\sin\alpha\tilde{\tilde{n}}, \\ L_z = 2M_0\left(\frac{r^{\tilde{\tilde{n}}}-r^{-\tilde{\tilde{n}}}}{r^{\tilde{\tilde{n}}}+r^{-\tilde{\tilde{n}}}}\right). \end{cases} \quad (24)$$

Таким образом, для солитонных частных случаев суперпозиция отдельных членов ряда в разложении функций $f(X,Y)$ и $g(X,Y)$ по степеням $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0i}|$ фактически представляет собой «суперпозицию» модуляций формы трехмерных движущихся солитонов.

Заключение

В качестве частных случаев из рассмотренного класса решений уравнений Ландау–Лифшица при проведении соответствия со статическими решениями для распределений намагниченности одноосного ферромагнетика следуют решения типа известных двумерных солитонов Белавина–Полякова [31], одномерных Широбокова [30], блоховской доменной границы [28], солитоны Ходенкова [32], солитон типа мишени [33] и некоторые другие известные нелинейные решения. Также данный класс решений уравнений Ландау–Лифшица для антиферромагнетика с одноосной магнитной анизотропией показывает принципиальную возможность реализации вихревой оптики на нелинейных спиновых волнах [34].

This project has received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No. 644348 (MagIC).

1. M. Bauer, O. Büttner, S.O. Demokritov, B. Hillebrands, V. Grimalsky, Yu. Rapoport, and A.N. Slavin, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3769 (1998).
2. S.O. Demokritov, B. Hillebrands, and A.N. Slavin, *Phys. Rep.* **348**, 441 (2001).
3. O. Büttner, M. Bauer, S.O. Demokritov, B. Hillebrands, Yu.S. Kivshar, V. Grimalsky, Yu. Rapoport, and A.N. Slavin, *Phys. Rev. B* **61**, 11576 (2000).
4. B. Hillebrands, *Rev. Sci. Instrum.* **70**, 1589 (1999).
5. A.A. Serga, B. Hillebrands, S.O. Demokritov, A.N. Slavin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 117203 (2004).
6. A.N. Slavin, O. Büttner, M. Bauer, S.O. Demokritov, B. Hillebrands, M.P. Kostylev, B.A. Kalinikos, V. Grimalsky, and Yu. Rapoport, *Chaos* **13**, 693 (2003).
7. A.A. Serga, B. Hillebrands, S.O. Demokritov, A.N. Slavin, P. Wierzbicki, V. Vasyuchka, O. Dzyapko, and A. Chumak, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 167202 (2005).
8. A.A. Serga, T. Schneider, B. Hillebrands, S.O. Demokritov, and M.P. Kostylev, *Appl. Phys. Lett.* **89**, 063506 (2006).
9. V.I. Vasyuchka, G.A. Melkov, A.N. Slavin, A.V. Chumak, V.A. Moiseienko, and B. Hillebrands, *J. Phys. D* **43**, 325001 (2010).
10. A.V. Kimel, B.A. Ivanov, R.V. Pisarev, P.A. Usachev, A. Kirilyuk, and Th. Rasing, *Nature Phys.* **5**, 727 (2009).
11. A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger, *Nature* **412**, 313 (2001).
12. J. Bahrdt, K. Holldack, P. Kuske, R. Müller, M. Scheer, and P. Schmid, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 034801 (2013).
13. F. Tamburini, E. Mari, A. Sponselli, B. Thide, A. Bianchini, and F. Romanato, *New J. Phys.* **14**, 033001 (2012).
14. П.В. Короленко, *Оптика когерентного излучения,* Москва (1997).
15. *Twisted Photons. Applications of Light with Orbital Angular Momentum*, J.P. Torres and L. Torner (eds.), WILEY-VCH Verlag & Co. KGaA (2011).
16. P.A. Firby and C.F. Gardiner, *Surface Topology*, Ellis Horwood, Chichester (1982).
17. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности, динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
18. О.Ю. Горобець, *Вісник Донецького університету*, *Сер. А*, вип. 1, 469 (2007).
19. V.G. Baryakhtar, O.Yu. Gorobets, and V.Yu. Gorobets, *J. Magn. Magn. Mater.* **280**, 377 (2004).
20. O.Yu. Gorobets and V.Yu. Gorobets, *Chaos, Solitons and Fractals* **23**, 1121 (2005).
21. O.Yu. Gorobets, *Chaos, Solitons and Fractals* **36**, 671 (2008).
22. Yu.I. Gorobets, O.Yu. Gorobets, and V.V. Kulish, *Commun. Nonlinear Science Numer. Simulat.* **42**, 52 (2017).
23. M.R. Dennis, *Topological Singularities in Wave Fields, A thesis submitted to the University of Bristol in accordance with the requirements of the degree of Ph.D. in the Faculty of Science* (2001).
24. B. Denardo, W. Wright, and S. Putterman, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1518 (1990).
25. D.J. Korteweg and G. de Vries, *Philos. Mag.* **422**, 39 (1895).
26. V.E. Zakharov and S.V. Manakov, *J. Theor. Mathem. Phys.* **19**, 551 (1974).
27. R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland Personal Library, North-Holland (1989).
28. F. Bloch, *Z. Physic.* **74**, 295 (1932).
29. L. Néel and C.R. Acad, *Sci. Paris* **241**, 533 (1955).
30. М.Я. Широбоков, *ЖЭТФ* **15**, 57 (1945).
31. А.А. Белавин, А.М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 503 (1975).
32. Г.Е. Ходенков, *ФММ* **54**, 644 (1982).
33. A.B. Borisov, S.A. Zykov, N.A. Mikushina, and A.S. Moskvin, *Phys. Solid State* **4**, 312 (2002).
34. O.Y. Gorobets, Y.I. Gorobets, and R.V. Verba, *Abstracts of The 59th Annual Conference on Magnetism and Magnetic Materials*, Honolulu, HI, USA, HU-08, 876 (2014).

Singular optics of spin waves in a two-sublattice antiferromagnet with uniaxial magnetic anisotropy

Yu.I. Gorobets and O.Yu. Gorobets

In this paper existence of spin waves with singular points at the wavefront is predicted in a two-sublattice antiferromagnet with uniaxial magnetic anisotropy on the basis of exact 3D solutions of Landau–Lifshitz equations representing to the analogy with optical singularities.

PACS: **75.25.–j** Spin arrangements in magnetically ordered materials (including neutron and spin-polarized electron studies, synchrotron-source x-ray scattering, etc.);
75.30.Ds Spin waves.

Keywords: spin waves, two-sublattice antiferromagnet, Landau–Lifshitz equations, modulated wave front, singular optics.