

Колебания изолированного вихря Абрикосова в жестких сверхпроводниках II рода

В.Ф. Русаков¹, В.В. Чабаненко², А. Nabiałek³, А.Н. Чумак^{2,3}

¹Донецкий национальный университет им. Василя Стуса, ул. 600-летия, 21, г. Винница, 21021, Украина

²Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины

пр. Науки, 4б, г. Киев, 03680, Украина

E-mail: vikchabanenko@gmail.com

³Institute of Physics, Polish Academy of Sciences, Al. Lotników 32/46, Warsaw 02-668, Poland

Статья поступила в редакцию 3 августа 2016 г., опубликована онлайн 25 апреля 2017 г.

В последнее десятилетие с помощью экспериментальной техники в объемных сверхпроводниках проведена регистрация и манипулирование отдельными вихревыми линиями. Электродинамический отклик запиннигованных вихрей в высокочастотном диапазоне позволил изучать особенности их поведения. Проведен анализ современного состояния проблемы колебаний изолированных вихрей Абрикосова в сверхпроводниках II рода. Проанализированы решения уравнений, описывающих собственные и вынужденные колебания изолированной упругой вихревой нити при учете различных сил, влияющих на ее движение: Лоренца, пиннинга, упругости и вязкости. В уравнениях учтены инерционные свойства вихря, обусловленные различными механизмами массивности. Обсуждается природа и величина эффективной массы вихря, обусловленная некоторыми из них. В спектре собственных колебаний роль каждой силы и инерционности вихревой нити детально проанализированы. В моде De Gennes–Matricon (порядка мегагерца) с параболическим законом дисперсии при учете силы пиннинга возникает активационный порог. Учет в уравнении движения эффективной массы вихря приводит к возникновению в спектре колебаний высокочастотной моды (порядка терагерца), которая также имеет активационный характер. Для двух распространенных сверхпроводников (NbTi и анизотропного YBaCuO материала) приведены оценки характерных частот для этих мод. Представлены особенности резонансного поведения упругой массивной вихревой линии, возникающие под действием внешней вынуждающей однородной и затухающей вглубь образца гармонической силы, с учетом всех перечисленных выше сил. Проанализированы частотная и температурная зависимости поглощения энергии вихревой нитью. Максимум поглощения в низкочастотной ветви соответствует пороговой частоте, а в высокочастотной — циклотронной частоте вихря. Рассмотрены эксперименты по манипуляции одиночными вихрями и результаты моделирования динамики вихря.

В останнє десятиріччя за допомогою експериментальної техніки в об'ємних надпровідниках проведено реєстрацію та маніпулювання окремими вихровими лініями. Електродинамічний відгук запіннігованих вихорів у високочастотному діапазоні дозволив вивчати особливості їхньої поведінки. Проведено аналіз сучасного стану проблеми коливачь ізольованого вихору Абрикосова в надпровідниках II роду. Проаналізовано розв'язки рівнянь, що описують власні та вимушені коливання ізольованої пружної вихрової нитки при врахуванні різних сил, що впливають на її рух: Лоренца, пінінгу, пружності та в'язкості. У рівняннях враховано інерційні властивості вихору, які зумовлені різними механізмами масивності. Обговорюється природа та величина ефективної маси вихору, яка обумовлена деякими з них. В спектрі власних коливачь роль кожної сили та інерційності вихрової нитки детально проаналізовано. У моді De Gennes–Matricon (близько мегагерца) з параболическим законом дисперсії при врахуванні сили пінінгу виникає активаційний поріг. Урахування в рівнянні руху ефективної маси вихору призводить до виникнення в спектрі коливачь високочастотної моди (близько терагерца), яка також має активаційний характер. Для двох поширених надпровідників (NbTi та анізотропного YBaCuO матеріалу) наведено оцінки характерних частот для цих мод. Представлено особливості резонансної поведінки пружної масивної вихрової лінії, що виникають під дією зовнішньої змушуючої однорідної та затухаючої вглиб зразка гармонічної сили з урахуванням усіх перерахованих вище сил. Проаналізовано частотну і температурну

залежності поглинання енергії вихоровою ниткою. Максимум поглинання у низькочастотній гільці відповідає пороговій частоті, а в високочастотній — циклотронній частоті вихору. Розглянуто експерименти по маніпуляції одиночними вихорами та результати моделювання динаміки вихору.

PACS: 74.25.Uv Вихревые фазы (включая вихревые решетки, вихревые жидкости и вихревые стекла);
74.25.Wx Вихревой пиннинг (включая механизмы и течение потока);
74.25.Op Смешанное состояние, критические поля, и поверхностные слои;
74.70.Ad Металлы; сплавы и бинарные компаунды (включая Al5, MgB2, etc.).

Ключевые слова: вихрь Абрикосова, эффективная масса вихря, динамика вихревых линий, сила пиннинга, сила вязкости.

Введение

Хорошо известно, что магнитный поток входит в сверхпроводники второго рода в диапазоне между первым и вторым критическими полями ($H_{c1} < H < H_{c2}$) в виде квантованных вихревых нитей (вихрей Абрикосова [1]), образуя смешанное состояние сверхпроводника (фазу Шубникова) [2]. Это микроскопические вихри электронов, которые могут быть смоделированы как одномерные упругие объекты (рис. 1). Совокупность этих вихревых нитей, каждая из которых несет квант магнитного потока $\Phi_0 = h/2e = 2,067 \cdot 10^{-15}$ Вб, где h — постоянная Планка, e — заряд электрона, образует решетку вихрей, пронизывающую образец от одной его границы к другой. Центральная часть вихревой нити (кор вихря) имеет диаметр порядка длины когерентности ξ и практически находится в нормальном состоянии. Вокруг кора вихря текут круговые сверхпроводящие токи, которые занимают пространственную область порядка глубины проникновения магнитного поля λ , где распределение полей и токов описывается уравнением Лондонов. Вихри могут притягиваться к нормальным включениям или дефектам в материале и закрепляться (пиннинговаться) на них, а также взаимодействовать между собой [5].

Вихревая структура (материя) является важным элементом смешанного состояния сверхпроводников, так как взаимодействие вихрей между собой, с тепловыми флуктуациями, центрами пиннинга и т.д. определяет практически все магнитные и транспортные свойства материалов. Изменение внешних параметров приводит к сложным динамическим процессам в вихревой магнитной структуре, необъятное количество которых продолжает постоянно пополняться, удивляя своим разнообразием [6].

В сравнительно узкой области слабого внешнего магнитного поля, незначительно превышающего первое критическое поле H_{c1} , из-за большого расстояния между вихрями можно пренебречь экспоненциально малой энергией межвихревого взаимодействия и рассматривать вихревую нить как изолированный от вихревого ансамбля объект [7].

Проблеме изучения динамики колебательного движения одиночного вихря уже более 50 лет, считая от

первой работы De Gennes и Matricon [8]. К настоящему времени вопросам как теоретического, так и экспериментального изучения статических и динамических свойств изолированного вихря, как структурной единицы смешанного состояния, посвящено достаточно много работ (см., например, [9–12]).

Современное состояние экспериментальной техники позволяет конструировать наноструктурные материалы и устройства, прецизионно манипулировать их элементами и проводить исследование свойств наноконструкций. Эти возможности позволили сформулировать новое научное направление, связанное с физикой нанообъектов. Вихрь, по-видимому, можно рассматривать как нанообъект, играющий ключевую роль в современной наноинженерии [13,14].

В последнее десятилетие активно проводятся эксперименты по манипуляции отдельными вихревыми линиями в жестких сверхпроводниках II рода (см., например, [15]), вследствие чего вновь стал актуальным вопрос изучения динамики изолированной вихревой нити. Этот вопрос важен еще и потому, что он помогает пролить свет на еще одну полувековую проблему смешанного состояния жестких сверхпроводников второго рода — определение эффективной массы вихря.

В предлагаемой работе представлен анализ экспериментальных и теоретических исследований в данной области. Рассмотрена задача о движении одиночной вихревой линии с учетом сил, на нее действующих со стороны сверхпроводника, и внешних — гармонической однородной и затухающей вглубь образца сил, включая инерционность вихря, предполагаемые механизмы которой рассматриваются в ряде теоретических исследований.

1. Собственные колебания изолированной вихревой линии в сверхпроводнике II рода, траектория движения

Впервые спектр поперечных колебаний одиночного вихря в жестком сверхпроводнике II рода в 1964 г. был рассмотрен De Gennes и Matricon [8]. В этой работе были учтены сила линейного натяжения вихря и сила Лоренца. Глубина проникновения магнитного поля λ была много больше, чем длина когерентности ξ . В

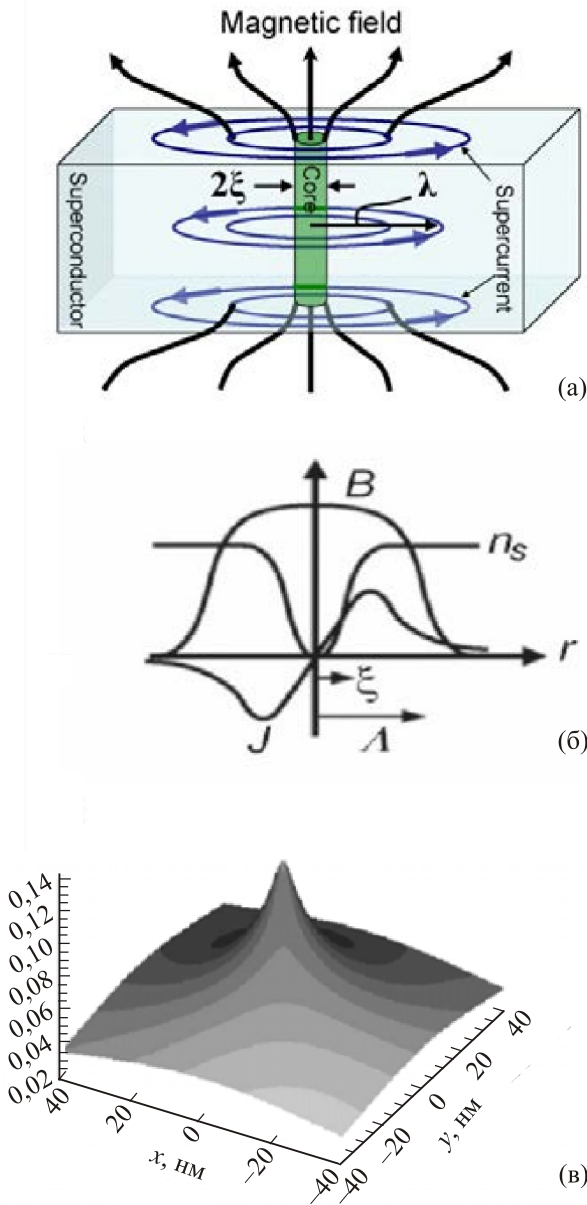


Рис. 1. (Онлайн в цвете) (а) — одиночная вихревая линия в сверхпроводнике II рода; (б) — пространственное распределение магнитной индукции $B(r)$, плотности сверхпроводящих электронов $n_s(r)$, плотность сверхпроводящего тока в вихре J_s , r — расстояние от центра вихря, ξ — длина когерентности, λ — глубина проникновения поля [3]; (в) — визуализация плотности потока изолированного вихря в YBaCuO при $H \parallel c$ [4].

этом случае вихрь состоит из нормального ядра (цилиндр радиуса ξ) и «электромагнитной области» (радиуса $\sim \lambda$). В случае слабого внешнего магнитного поля, но незначительно превышающего первое критическое поле H_{c1} , можно пренебречь, как указано выше, экспоненциально малой энергией межвихревого взаимодействия и рассматривать изолированную вихревую нить [7]. В случае малых отклонений в плоскости $\mathbf{S} = \{S_x; S_y; 0\}$ сила линейного натяжения вихря, дей-

ствующая на единицу длины вихря, имеет следующий вид: $\mathbf{F}_{str} = J(\partial^2 \mathbf{S} / \partial z^2)$, величина J согласно [8] определяется следующим выражением:

$$\mathfrak{S} = \int_{r>\xi} dx dy \left(\frac{\hbar^2}{8\pi} + \frac{1}{2} n_s m^* V_s^2 \right) = \int_{r>\xi} dx dy \frac{1}{8\pi} (h^2 + \lambda^2 \text{rot}^2 h),$$

где m^* — эффективная масса носителя заряда в куперовской паре, h — напряженность магнитного поля, n_s — концентрация сверхпроводящих электронов, V_s — их скорость. Два слагаемых в круглых скобках представляют собой энергию поля и движущихся носителей заряда. Интегрируя это выражение в рассматриваемом пределе, легко получить:

$$J = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2} \ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right),$$

где $\Phi_0 = h/2e = 2,067 \cdot 10^{-15}$ Вб — квант магнитного потока, λ — лондоновская глубина проникновения поля, ξ — длина когерентности, как указано выше, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная. Магнитное поле направлено вдоль оси OZ . Сила Лоренца, действующая на вихрь, имеет вид $\mathbf{F}_L = (\alpha V_{sy}; -\alpha V_{sx}; 0)$, $\alpha = (m^* \Phi_0) / (\mu_0 \lambda^2 e)$, где e — заряд электрона, скорость $\mathbf{V}_s = \partial \mathbf{S} / \partial t$.

В этих приближениях уравнение движения вихря, полученное De Gennes и Matricon, выглядит следующим образом:

$$J \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial z^2} + \alpha \mathbf{V}_s \times \mathbf{e}_z = 0. \quad (1)$$

В результате его решения авторы получили безактивационный параболический спектр колебаний, состоящий из одной моды

$$\omega = \left(\frac{\hbar}{4m^*} \right) k^2 \ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right). \quad (2)$$

Для значений характерных параметров сверхпроводников Nb₃Sn $m^* = 50$ электронных масс, $k^{-1} = 10^{-4}$ см и $\ln(\lambda/\xi) = 4$, частота колебаний вихря оказалась равной $\omega = 2 \cdot 10^6$ Гц. Авторами [8] также найдено затухание вихревых токов в данном режиме от электрического поля, связанного с движением вихря. Затухание оказалось независимым от частоты. Здесь же для сверхпроводников с пиннингом предсказано возникновение щели в спектре колебаний вихревой линии с характерной пороговой частотой.

В работе [16] обобщена задача De Gennes и Matricon о колебаниях одиночной вихревой линии с учетом силы пиннинга, вязкости и эффективной массы вихря. Для сверхпроводника YBaCuO проведен расчет характерных частот колебаний вихря. Рассмотрены темпера-

турные зависимости частот колебаний для случая анизотропного сверхпроводника.

В работах [7,8,17] исследовался спектр поперечных колебаний изолированной вихревой линии, однако из рассмотрения были исключены такие важные для динамики вихря эффекты, как вязкость, пиннинг и эффективная масса.

В настоящее время нам не известны эксперименты по прямому измерению инертности вихрей. В то же время имеется значительное количество теоретических работ, в которых предложено несколько достаточно прозрачных механизмов проявления инерционных свойств движущегося вихря и проведена оценка его массы.

В монографии [18] сформулированы два основных подхода к вычислению массы вихря. Первый, так называемый энергетический, состоит в вычислении энергии, обусловленной движением вихря. Коэффициент пропорциональности между энергией и половиной квадрата скорости дает массу. Второй, динамический подход, определяет массу как коэффициент пропорциональности между полной силой, обеспечивающей наблюдаемое движение вихря, и его ускорением. Это так называемая динамическая масса [19], во многих случаях именно она играет определяющую роль. Таким образом, как следует из монографии [18], масса вихря как структурного элемента смешанного состояния определяется его движением и взаимодействием с квазичастицами как внутри кора, так и в его окрестности.

1.1. Сравнительный анализ некоторых механизмов массивности вихря

Нами проведен анализ различных механизмов возникновения эффективной массы вихря. Проблема массы вихря возникла уже достаточно давно, но до настоящего времени является активно дискутируемой проблемой. Теоретическому обоснованию ее существования и расчету порядка величины посвящено большое количество работ [20–30]. Отметим, что эффективная масса не является характеристикой покоящегося вихря как структурного элемента смешанного состояния [29,30], скорее, она определяется состоянием его движения и взаимодействием с окружающими нормальный кор квазичастицами, кроме того, как указано выше, она зависит от магнитного поля и температуры.

По-видимому, впервые вопрос об определении эффективной массы вихря был рассмотрен Suhl [20]. На основе зависящей от времени теории Гинзбурга–Ландау [32] авторами [19] получено значение инертной массы вихря на единицу его длины. Результирующее ускорение вихря было сравнено с диссипативным членом, предложенным Strnad, Hempstead и Kim [32] и исследованным Stephen и Bardeen [33]. Автором [20] было получено два вклада в эффективную массу вихря: *масса*

квазичастиц вихревого кора (core mass, μ_{core}) и *электромагнитная масса* (electromagnetic mass, μ_{em}):

$$\mu_{\text{core}} = m^* \frac{3\pi n_0 \xi^2}{2} \left(\frac{\Delta}{E_f} \right)^2, \quad (3)$$

$$\mu_{\text{em}} = \begin{cases} \frac{\mu_{\text{core}}}{3} \left(\frac{\lambda}{\xi} \right)^2 \left(\frac{V_f}{c} \right)^2, & T < T_c, \\ \frac{\mu_{\text{core}}}{3} \left(\frac{\lambda}{\xi} \right)^2 \left(\frac{V_f}{c} \right)^2 \left(\frac{\Delta}{kT} \right)^2, & T > T_c, \end{cases} \quad (4)$$

где n_0 — концентрация носителей в нормальном состоянии, Δ — величина сверхпроводящей щели, c — скорость света в вакууме, E_f , V_f — энергия и скорость Ферми соответственно. Так как величина щели и длина когерентности имеют одинаковую асимптотику в окрестности T_c , масса вихревого кора не обращается в нуль при температуре сверхпроводящего перехода. Таким образом, выражение (3) справедливо лишь в ограниченной области $T/T_c \ll 1$. В дальнейшем все численные оценки массы приведены для $T = 0$ К. Для YBaCuO масса вихревого кора, с учетом параметров материала, составляет $\mu_{\text{core}}^c = 1,3 \cdot 10^{-21}$ кг/м и $\mu_{\text{core}}^{ab} = 1 \cdot 10^{-22}$ кг/м, когда вихрь параллелен оси c и лежит в плоскости ab соответственно. Электромагнитная масса оказывается существенно меньше и составляет $\mu_{\text{em}}^c = 5 \cdot 10^{-25}$ кг/м и $\mu_{\text{em}}^{ab} = 8 \cdot 10^{-24}$ кг/м.

Следующий механизм, дающий вклад в эффективную массу вихря, был предложен Baum и Chandler [21]. В работе [21] показано, что эффективную массу вихря можно определить из хорошо известной классической модели обтекания сверхтекучей компонентой непроницаемого цилиндра (кора вихря) радиуса ξ , движущегося с заданной скоростью в жидкости, покоящейся на бесконечности. В случае вихря Абриковского предполагается, что нормальный кор обтекается сверхтекучей электронной жидкостью. В этой модели эффективная масса равна массе жидкости на единицу длины кора вихря. Таким образом, получается

$$\mu_{BC} = \rho \xi^2 = \frac{\pi m^*}{\mu_0 e^2} \left(\frac{\xi}{\lambda} \right)^2, \quad (5)$$

где ρ — массовая плотность сверхтекучей жидкости. Это так называемая масса противотока (back flow mass) (рис. 2(a)). Эта масса также не исчезает при критической температуре, следовательно, выражение (5) справедливо лишь в области температур значительно ниже T_c . Оценки этой массы для YBaCuO следующие: $\mu_{BC}^c = 1,6 \cdot 10^{-20}$ кг/м и $\mu_{BC}^{ab} = 7 \cdot 10^{-23}$ кг/м.

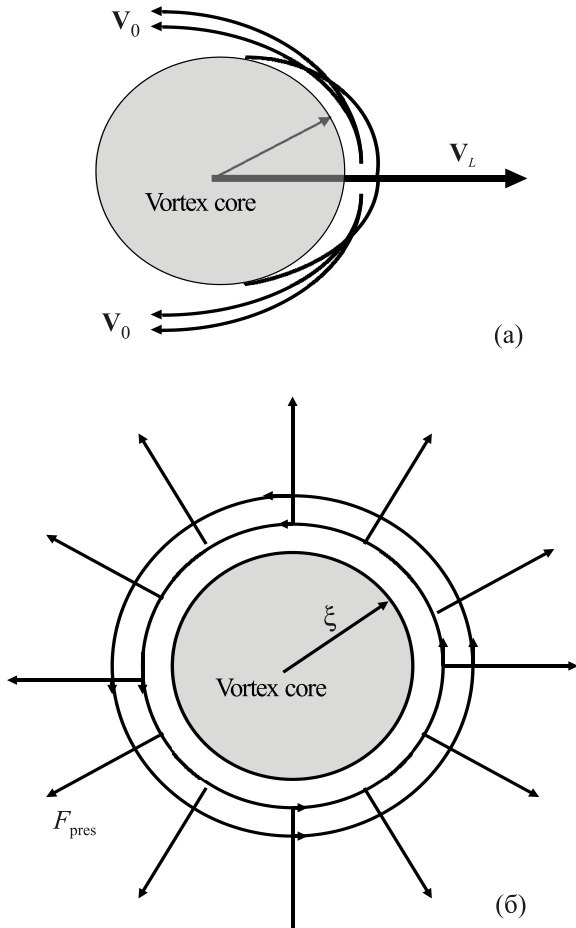


Рис. 2. Схематическое изображение механизма возникновения массы противотока (а) и компрессионной массы (б) вихря. V_L , V_0 — скорости движения вихря и сверхтекучей компоненты соответственно; F_{pres} — сила давления, возникающая вследствие разности объемов нормальной (кор вихря) и сверхпроводящей фаз.

Coffey и НАО в работе [22] нашли вклад в эффективную массу вихря, связанный с создаваемым движущимся вихрем электрическим полем (dipolar electric field), и получили следующие выражения:

$$\mu_{CH}^c = \frac{\Phi_0 B_{c2}}{16\pi c^2} \left[3 + \frac{1}{\nu} \right],$$

$$\mu_{CH}^{ab} = \frac{\Phi_0 B_{c2}}{16\pi c^2} [3 + \nu], \quad (6)$$

где ν — коэффициент анизотропии массы носителей заряда. Этот механизм эффективной массы имеет разумное физическое поведение во всем температурном диапазоне вплоть до критической температуры, и при $T = T_c$ данная эффективная масса обращается в нуль. Вычисления по формуле (6) для YBaCuO дают следующие величины эффективных масс: $\mu_{CH}^c = 1,7 \cdot 10^{-25}$ кг/м

и $\mu_{CH}^{ab} = 1 \cdot 10^{-24}$ кг/м, что по порядку величины совпадает с электромагнитной массой [20].

Движение вихря приводит как к продольным, так и поперечным деформациям в кристаллической решетке. В работах [26–28,34] был рассчитан вклад в массу вихря, обусловленный продольными упругими деформациями решетки. В работе Coffey [27] был рассчитан вклад в массу вихря энергии упругих деформаций (рис. 2(б)). Основная часть полученного вклада при деформационном механизме массивности оказалась равной $\mu_d = 10^6$ электронных масс на метр. Автором [26] этот же вклад был оценен, как 10^7 электронных масс на метр.

Наиболее важной частью массы вихря является масса, обусловленная квазичастицами, локализованными в коре (*bound states in the vortex core*), определение вклада которых требует микроскопического анализа. Такой анализ впервые был проведен Корнин [23], который решил кинетическое уравнение для тех квазичастиц, которые захвачены в коре вихря.

В работе Корнин [23] рассчитана масса вихря в чистых сверхпроводниках II рода в бездиссипативном режиме и показано, что в таком сверхпроводнике возникают собственные колебания решетки вихревых нитей с квадратичным законом дисперсии.

Volovik [24] проанализировал результаты работ [21,23] и пришел к выводу, что массы Корнин–Баум и Chandler имеют одно и то же происхождение. Обе связаны с нормальной компонентой вихря.

Эффективная масса вихря, обусловленная наличием связанных состояний в коре вихря для d -волнового сверхпроводника, полученная Volovik [24] и Корнин [23], определяется следующей зависимостью от величины внешнего магнитного поля и температуры:

$$\mu_{KV}^{d-wave} = n_0 m^* \xi^2 \left\{ \left(\sqrt{\frac{B_{c2}}{B}} + \frac{T}{T_c} \frac{B_{c2}}{B} \right) \right\}, \quad (7)$$

$$\frac{T^2}{T_c^2} \ll \frac{B}{B_{c2}} \ll 1$$

где T — температура, B — величина индукции внешнего магнитного поля, B_{c2} — второе критическое поле. Для YBaCuO расчет по формуле (7) при $T = 0$ К дает следующие значения для эффективных масс:

$$\mu_{KV}^c = 5 \cdot 10^{-19} \text{ кг/м}, \quad \mu_{KV}^{ab} = 2.4 \cdot 10^{-19} \text{ кг/м},$$

$$T = 0, \quad B \sim B_{c1}. \quad (8)$$

Из всех рассмотренных механизмов, определяющих инертность вихря, механизм, предложенный в [23,24], дает доминирующий вклад в эффективную массу вихря (см. табл. 1).

Существуют и другие механизмы возникновения эффективной массы вихря и способы оценки ее величины (например, [28,29,35]), однако оценка их вклада во

Таблица 1. Сравнение эффективных масс вихря в YBaCuO сверхпроводнике, полученных из разных моделей

	$\mu_{\text{eff}} \parallel c$, кг/м	$\mu_{\text{eff}} \parallel ab$, кг/м	
μ_{core}	$1,3 \cdot 10^{-21}$	$1 \cdot 10^{-22}$	Suhl [20]
μ_{em}	$5 \cdot 10^{-25}$	$8 \cdot 10^{-24}$	Suhl [20]
μ_{BC}	$1,6 \cdot 10^{-20}$	$7 \cdot 10^{-23}$	Baym–Chandler [21]
μ_{CH}	$1,7 \cdot 10^{-25}$	$1 \cdot 10^{-24}$	Coffey–Hao [22]
μ_{VK}	$5 \cdot 10^{-19}$	$2,4 \cdot 10^{-19}$	Kopnin–Volovik [23,24]

всех случаях дает величину, меньшую результата (8). В частности, в работе [29] на основе анализа отклика вихревой системы на высокочастотное воздействие эффективная масса вихря, как структурного элемента вихревой решетки, была оценена как 10^{10} электронных масс на метр. В этой работе магнитное поле было значительно выше первого критического поля H_{c1} , но меньше H_{c2} . Рассмотрение базировалось на концепции потенциала пиннинга, который определялся взаимодействием центров пиннинга в образце с вихревой решеткой. Следует отметить, что указанная величина отличается от потенциальной энергии изолированного вихря, расположенного в окрестности центра пиннинга [29]. Кроме того, при расчете массы вихря учитывалось межвихревое взаимодействие.

Таким образом, из приведенного анализа можно сделать вывод, что эффективная масса вихря в высокотемпературном сверхпроводнике, по крайней мере, не меньше, чем 10^{-19} кг/м при $T = 0$ К. С другой стороны, вполне очевидно, что она должна обращаться в нуль при температуре сверхпроводящего перехода.

1.2. Спектр колебаний массивной, упругой вихревой линии в параболическом потенциале пиннинга

В работах [16,36] был проанализирован спектр колебаний одиночной вихревой линии, обладающей инерционными свойствами, с учетом сил Лоренца, пиннинга и вязкого трения. В качестве потенциала пиннинга был рассмотрен изотропный в плоскости XY потенциал параболического типа, создаваемый, например, колоннообразным дефектом, расположенным вдоль оси OZ [37] (рис. 3). Такого типа дефекты возникают в ВТСП образцах при облучении нейтронами [37]. В этом случае сила пиннинга может быть записана в виде: $F_p = -dU_p/dS = -\beta S$, где β — параметр, определяющий макроскопическую величину плотности критического тока J_c ; предполагается, что $\beta \sim J_c$. Сила вязкого трения была учтена в линейном приближении по скорости: $F_v = -\eta V$, где η — коэффициент вязкости, который, согласно [32], имеет вид $\eta = (B_{c2}\sigma_n)/2$, σ_n — проводимость в нормальном со-

стоянии. Такой подход справедлив для изотропных сверхпроводников. В анизотропных материалах коэффициент вязкости зависит от ориентации вихря в кристалле и направления его движения, вязкость в этом случае характеризуется тензором эффективной массы [38]. В настоящее время нет единого, общепризнанного микроскопического механизма возникновения вязкости. Один из механизмов связан с индуцируемым электрическим полем в коре вихря при его движении и, как следствие, появлением нормальных вихревых диссипативных токов. Другой, предложенный Tinkham [39], связан с фазовыми переходами (в процессе движения вихря) сверхпроводник–нормальный металл на переднем фронте кора и обратно — на заднем. В силу указанных причин часто сила вязкого трения вводится феноменологически, без уточнения микроскопического механизма ее возникновения. Кроме указанных сил, в работах [16,36] была учтена инертность вихря, т.е. влияние на динамику

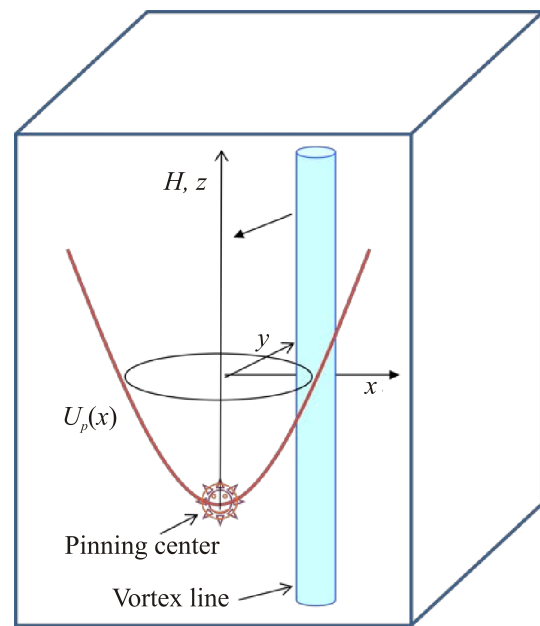


Рис. 3. (Онлайн в цвете) Вихрь Абрикосова вблизи центра пиннинга с параболическим потенциалом.

вихря его эффективной массы (μ_{eff}). Обсуждение порядков величин в различных моделях эффективной массы и ее поведения приведено выше. С учетом наличия сил пиннинга, вязкости и эффективной массы вихря уравнение (1) примет следующий вид:

$$J \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial z^2} + \alpha \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z - \beta \mathbf{S} - \eta \mathbf{V} = \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \quad (9)$$

Решение этого уравнения в виде плоских волн $S_x, S_y \sim \exp\{i(kz - \omega t)\}$ приводит к спектру, содержащему две ветви колебаний, которые в пределе

$$\left| \frac{Jk^2 + \beta}{(\alpha - i\eta)^2} \mu_{\text{eff}} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{Jk^2 + \beta}{(\alpha - i\eta)^2} \right| \sim 10^{13} - 10^{14} \frac{\text{М}}{\text{кг}}$$

могут быть записаны в виде

$$\omega_1(k) \approx \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \eta^2} + \frac{\alpha Jk^2}{\alpha^2 + \eta^2} + i \frac{\eta(Jk^2 + \beta)}{\alpha^2 + \eta^2},$$

$$\omega_2(k) \approx \frac{\alpha}{\mu_{\text{eff}}} + \frac{\alpha(Jk^2 + \beta)}{\alpha^2 + \eta^2} + i \left[\frac{\eta}{\mu_{\text{eff}}} - \frac{\eta(Jk^2 + \beta)}{\alpha^2 + \eta^2} \right]. \quad (10)$$

Из (10) видно, что спектр колебаний состоит из *низкочастотной* — $\omega_1(k)$ и *высокочастотной* — $\omega_2(k)$, ветвей. Учет силы пиннинга привел к появлению энергии активации в спектре, определяемой пороговой частотой $\Omega_{\text{tr}} = \alpha\beta/(\alpha^2 + \eta^2)$, которая по порядку величины близка к частоте депиннинга [29], $\Omega_{\text{dp}} = \beta/\eta$. Частота депиннинга — это критическая частота, по определению [40], выше которой отклик сверхпроводника на высокочастотное возмущение становится откликом «идеального» смешанного состояния, т.е. независимым от силы пиннинга даже в жестких сверхпроводниках. Этот факт позволяет изучать свойства

«идеального» смешанного состояния с помощью электромагнитного высокочастотного воздействия [29]. При этом переменный ток имеет очень маленькую амплитуду, что позволяет избежать эффектов перегрева, возникающих при исследованиях на постоянном токе из-за значительной его величины. Учет силы вязкости привел к затуханию колебательных мод. В беспиннинговом и бездиссипативном пределе, ($\beta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$), низкочастотная мода совпадает с выражением, полученным ранее De Gennes и Matricon [8]. Введение в рассмотрение эффективной массы вихря привело к более радикальным последствиям: появилась новая высокочастотная мода $\omega_2(k)$ с активационной частотой $\Omega_0 = \Omega_{\text{vcr}} + \Omega_{\text{tr}}$, где $\Omega_{\text{vcr}} = \alpha/\mu_{\text{eff}}$ — «циклотронная» частота вихря. Учитывая факт, что $\Omega_{\text{vcr}} \gg \Omega_{\text{tr}}$, легко видеть, что энергия активации высокочастотной моды определяется «циклотронной» частотой вихря.

1.3. Влияние анизотропии сверхпроводника на спектр его колебаний

Поведение характеристик спектра при изменении температуры проанализировано на примере одиночного вихря в высокотемпературном сверхпроводнике YBaCuO с учетом анизотропии его сверхпроводящих свойств, анализ проведен для двух случаев:

- 1) вихрь параллелен оси c (магнитное поле вдоль c);
- 2) вихрь лежит в плоскости ab (магнитное поле в плоскости ab).

Для расчета спектра колебаний вихря в YBaCuO использована эффективная масса (8). Другие значения параметров, характеризующие силы, действующие на вихрь при температуре $T = 0$ К, приведены в табл. 2.

В работе [16] построены зависимости частоты колебаний и затухания $\Gamma(k)$ от волнового вектора для низкочастотной моды, из которых следует, что при температуре $T = 0$ К частота, по крайней мере, вдвое выше в случае, когда вихрь параллелен оси c , а затухание на

Таблица 2. Параметры для оценки сил, действующих на вихрь в YBaCuO сверхпроводнике

Параметры	$H \parallel c$	$H \parallel ab$
$J = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2} \ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right), \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$	$5,5 \cdot 10^{-11}$	$5,5 \cdot 10^{-12}$
$\alpha = \frac{m\Phi_0^2}{\mu_0 e \lambda^2} \ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right), \text{ кг}/\text{с}\cdot\text{м}$	$4,1 \cdot 10^{-7}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$
$\eta = \frac{1}{2} \sigma B_{c2}, \text{ кг}/(\text{с}\cdot\text{м})$	$2,4 \cdot 10^{-9}$	$3,5 \cdot 10^{-9}$
$\beta, \text{ Н}/\text{м}^2$	3	0,1
$\mu_{\text{eff}}, \text{ кг}/\text{м}$	$5 \cdot 10^{-19}$	$2,4 \cdot 10^{-19}$

порядок больше для вихря, лежащего в плоскости ab . Кроме того, логарифмический декремент затухания

$$D(k) = 2\pi \frac{\text{Im}[\omega(k)]}{\text{Re}[\omega(k)]}$$

для низкочастотной моды не зависит от волнового вектора и определяется отношением «силы вязкости» к «силе Лоренца»: $D = 2\pi\eta/\alpha$. Для двух различных ориентаций его значение составляет $D_c = 0,038$ и $D_{ab} = 0,8$. Видно, что при ориентации вихря в плоскости ab логарифмический декремент затухания близок к единице, а это значит, что экспериментальное наблюдение низкочастотных колебаний вихря, лежащего в плоскости ab , крайне затруднительно. Рассчитана групповая скорость вихря и показано, что ее температурная зависимость является очень слабой и в основном определяется зависимостью $\ln[\lambda(T)/\xi(T)]$ от температуры.

Пороговая частота имеет порядок 10^5 Гц в случае, когда магнитное поле параллельно оси c и 10^6 Гц в случае перпендикулярного оси c магнитного поля. Для анализа температурной зависимости пороговой частоты был учтен тот факт, что коэффициент β пропорционален плотности критического тока, температурная зависимость которого имеет вид $J_c(t) = J_0(1-t)^n$, где t — приведенная температура $t = T/T_c$, $n = 1,5$ согласно теории Гинзбурга–Ландау [41]. Другие параметры зависят от температуры через лондоновскую глубину проникновения и длину когерентности, температурные зависимости которых имеют вид: $\lambda(t) = \lambda_0/\sqrt{1-t^4}$ и $\kappa(t) = \lambda(t)/\xi(t) = \kappa_0(1+0,119(1-t))$ [42], $\kappa(t)$ — параметр Гинзбурга–Ландау. Учитывая, что $B_{c2} \sim 1/\xi^2$, найдены температурные зависимости пороговой частоты для двух различных ориентаций вихря, они имеют схожее поведение — убывают с возрастанием температуры и обращаются в нуль при $T = T_c$. Температурные зависимости пороговой частоты и силы пиннинга, нормированные на их значения при нулевой температуре, представлены на рис. 4. При температурах $T < 0,4T_c$ их поведение совпадает, т.е. экспериментальное исследование температурной зависимости пороговой частоты позволяет восстановить температурную зависимость плотности критического тока в диапазоне, в котором ее прямое измерение весьма затруднительно из-за значительной величины.

Циклотронная частота вихря при $T = 0$ К для двух ориентаций оказывается равной

$$\Omega_{\text{vcr}} = \frac{\alpha}{\mu_{\text{eff}}} = \begin{cases} 820 \text{ ГГц} - H \parallel c \\ 110 \text{ ГГц} - H \parallel ab \end{cases}$$

что соответствует нижнему терагерцевому диапазону. Температурные зависимости циклотронной частоты вихря и частоты распаривания $\omega_{\Delta}(t)$ ($\hbar\omega_{\Delta}(T) = 2\Delta(T)$), где $\Delta(T)$ — температурная зависимость сверхпроводя-

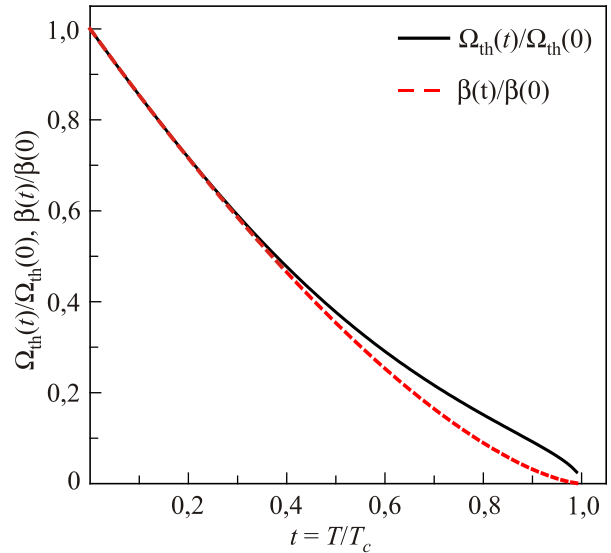


Рис. 4. (Онлайн в цвете) Температурная зависимость нормированных пороговой частоты Ω_{th} и коэффициента силы пиннинга β .

щей щели, приведены на рис. 5. Температуры, при которых циклотронная частота вихря совпадает с частотой распаривания, составляют $t^{\parallel ab} = 0,99$ и $t^{\parallel c} = 0,97$, что обозначает возможность экспериментального наблюдения данных мод практически во всем сверхпроводящем температурном диапазоне.

Таким образом, исследование зависимости высокочастотной моды от температуры позволяет установить не только порядок эффективной массы вихря, но и определить ее температурную зависимость.

1.4. Траектория движения изолированного вихря.

Кроме изучения дисперсионных соотношений, представляет интерес исследование уравнений движения, определяющих смещение вихря с учетом его инертно-

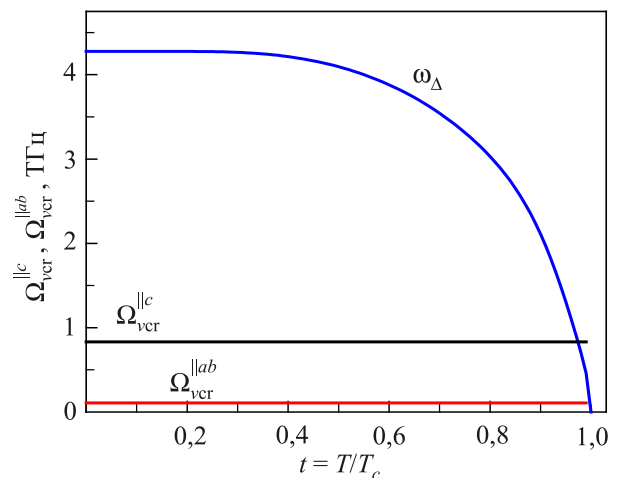


Рис. 5. Температурная зависимость частоты распаривания $\omega_{\Delta}(t)$ и циклотронной частоты Ω_{vcr} для двух ориентаций поля.

сти. Эти уравнения определяют как временную зависимость смещения вихря, так и траекторию его движения, $S_x(t)$ и $S_y(t)$ определяют траекторию вихря в параметрическом виде; из-за сложности этих выражений получение уравнения траектории в явном виде не представляется возможным. Проведенный анализ показывает, что движение вихря представляет затухающие осцилляции, которые возникают благодаря либо начальному смещению некоторого сегмента вихря из положения равновесия, либо начальной скорости этого сегмента. На рис. 6 представлена траектория вихря, полученная численным расчетом в работе [43] для сверхпроводящего NbTi при условии смещения вихря из положения равновесия в начальный момент времени. Движение вихревой линии является довольно сложным и характеризуется двумя сильно отличающимися временными масштабами в соответствии с диапазонами частот низко- и высокочастотной ветвей спектра и амплитуд колебаний. Поэтому рисунок, представляющий траекторию движения, содержит два графика, отдельно начальный и завершающий этапы движения. Мода с более высокой частотой к тому же очень быстро затухает ($\gamma_2 \approx 10^{10} \text{ с}^{-1}$). Благодаря очень большому различию в частотах ($\omega_1 \approx 10^5 \text{ Гц}$ и $\omega_2 \approx 10^{11} \text{ Гц}$) и в амплитудах этих мод, траектория движения вихря может быть представлена, как это показано на рис. 6. На основном рисунке представлена траектория движения вихря в течение времени $t_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$, т.е. порядка $2\pi/\omega_1$, на вставке (рис. 6) показана траектория движения вихря в течение времени $t_2 \approx 6 \cdot 10^{-11} \text{ с}$, т.е. порядка $2\pi/\omega_2$. Траектория на масштабе $t_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$, как видно на рисунке, представляет собой сходящуюся спираль, как и должно быть для свободных затухающих колебаний. Поведение траектории на начальном участке определяется высокочастотной модой, появление которой, как указано выше, обусловлено конечной величиной эффективной массы вихря, т.е. инерционностью вихря.

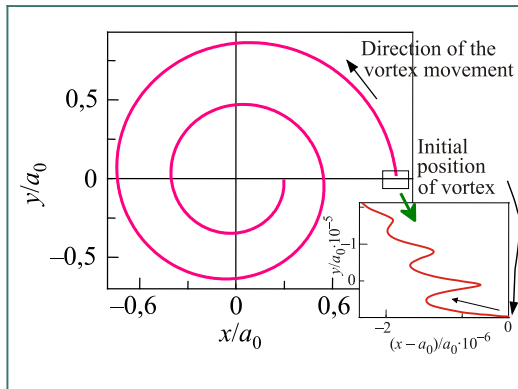


Рис. 6. (Онлайн в цвете) Траектория вихревой линии в случае учета сил пиннинга, Лоренца и вязкости для $\kappa = 0$. Начальное положение вихря задается координатами $x = a_0$, $y = 0$. Начальная скорость предполагается равной нулю: $V_x = V_y = 0$.

2. Движение вихря под действием внешней периодической однородной силы, резонансные особенности

В работах [44,45] было рассмотрено движение вихря под действием внешней однородной вынуждающей силы $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$, где f_0 — амплитуда, ω — частота внешней силы, т.е. были рассмотрены его вынужденные колебания. Амплитуда f_0 связана с амплитудой внешнего переменного тока J_0 соотношением $f_0 = J_0 \cdot \Phi_0$. В этом случае движение вихря определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} m \frac{\partial^2 S_x}{\partial t^2} = J \frac{\partial^2 S_x}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial S_y}{\partial t} - \eta \frac{\partial S_x}{\partial t} - \beta S_x + f(t), \\ m \frac{\partial^2 S_y}{\partial t^2} = J \frac{\partial^2 S_y}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial S_x}{\partial t} - \eta \frac{\partial S_y}{\partial t} - \beta S_y. \end{cases} \quad (11)$$

Решая полученную систему, авторы [45] вычислили среднее значение мощности поглощения энергии вихревой нитью. При этом, поскольку внешняя сила не зависит от z -координаты, вихрь колеблется как целое, не деформируясь. Это может иметь место в случае, когда толщина образца (пленки) порядка или меньше глубины проникновения магнитного поля или толщины высокочастотного скин-слоя. В установившемся режиме это поглощение связано исключительно с наличием силы вязкости:

$$\langle P_{\text{в}} \rangle = \frac{1}{2} \eta \left[\langle \dot{S}_x^2 \rangle + \langle \dot{S}_y^2 \rangle \right],$$

или

$$\langle P_{\text{в}} \rangle = \frac{1}{2} \eta \omega^2 \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}{Z}. \quad (12)$$

Входящие сюда параметры определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} a &= \alpha F_0 \omega \left[(\beta - m\omega^2)^2 - \omega^2 (\alpha^2 + \eta^2) \right], \\ b &= 2\eta \alpha \omega^2 F_0 \left[(-m\omega^2 + \beta) \right], \\ c &= F_0 (\beta - m\omega^2) \left[(\beta - m\omega^2)^2 + \omega^2 (\eta^2 - \alpha^2) \right], \\ d &= -\eta \omega F_0 \left[(\beta - m\omega^2)^2 + \omega^2 (\eta^2 + \alpha^2) \right], \\ Z &= 4\alpha^2 \eta^2 \omega^4 + \left[(\beta - m\omega^2)^2 - \omega^2 (\alpha^2 - \eta^2) \right]^2. \end{aligned}$$

Для сверхпроводящих материалов NbTi и YBaCuO была проанализирована зависимость поглощаемой энергии от частоты внешней силы (внешнего переменного тока) и температуры. Значения параметров, использованных для расчета, и их температурные зависимости, приведены в [45].

Поглощение как функция частоты переменного тока имеет два резонансных максимума, обусловленных низко- и высокочастотной ветвями спектра. Один из максимумов обусловлен пороговой частотой, а другой — циклотронной частотой вихря. Показано, что резонансная частота уменьшается с повышением температуры для низкочастотного резонансного пика. Этот факт объясняется уменьшением силы пиннинга (β) с повышением температуры. Положение второго максимума практически не зависит от температуры. Физически это объясняется тем, что эта резонансная частота в основном определяется циклотронной частотой вихря $\Omega_{\text{врт}} = \alpha/\mu_{\text{eff}}$, которая не зависит от температуры. Для разных материалов температурная зависимость абсорбционных максимумов идентична для обоих резонансных пиков, что представлено на рис. 7.

В этой же работе исследована температурная зависимость полуширины резонансных пиков поглощения, которая оказалась различной для низко- и высокочастотной ветвей (рис. 8), что проявляется в различной температурной зависимости Q -фактора ($Q \sim \omega_R/\Delta\omega$, где ω_R — резонансная частота и $\Delta\omega$ — полуширина резонансного пика). Поскольку резонансная частота высокочастотной моды практически не зависит от температуры, Q -фактор для нее с ростом температуры монотонно убывает. Для низкочастотной моды резонансная частота и полуширина резонансного пика одинаковым образом зависят от температуры и Q -фактор оказывает

ся независимым от температуры. В работе [45] отмечено, что в NbTi и YBaCuO в случае ориентации магнитного поля $H \perp c$, величина Q -фактора относительно мала ($Q \approx 6-8$), что приводит к значительным трудностям в экспериментальном изучении поглощения. Для ориентации $H \parallel c$ в сверхпроводящем YBaCuO — $Q \approx 130$, т.е. такая конфигурация является более благоприятной для экспериментального изучения поглощения энергии колеблющимся вихрем.

В работе [46] экспериментально наблюдался резонансный пик поглощения в MgB₂ микроволновом резонаторе, однако в этой работе поглощение было обусловлено колеблющейся вихревой системой, содержащей большое число вихрей. В работе [29] на основе микроволновых экспериментов была предпринята попытка экспериментального определения эффективной массы вихря Абрикосова, поскольку экспериментальные результаты по затуханию микроволнового поля содержат информацию об инерционных свойствах вихрей. Микроволновое поле обуславливает энергию диссипации, приводя в движение вихревую решетку. В [45] расчет выполнен для изолированного вихря; следует отметить, что такой подход, как указано выше, справедлив только в слабых магнитных полях, превышающих первое критическое поле ($H > H_{c1}$).

3. Движение вихря под действием внешней периодической, затухающей вглубь образца, силы

Учтем тот факт, что ток, наведенный внешним переменным полем, затухает вглубь сверхпроводящего образца. Тогда и вынуждающая сила, действующая на вихрь, будет экспоненциально затухать вглубь образца [47].

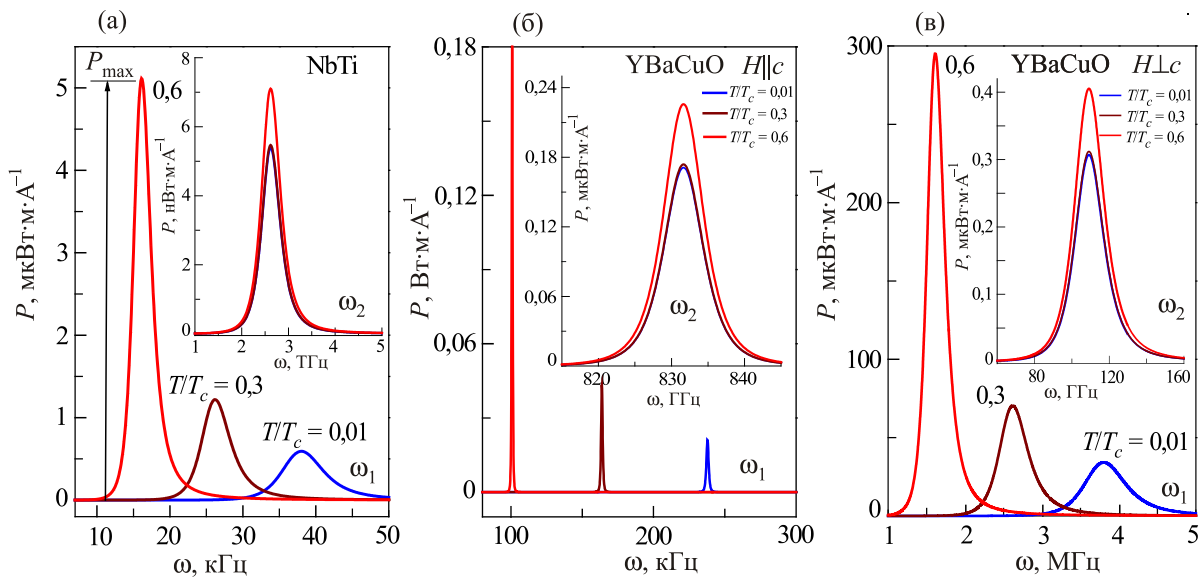


Рис. 7. (Онлайн в цвете) Температурная зависимость пика поглощения $P_{\text{max}}(\omega)$ низкой (ω_1) и высокочастотной (ω_2) моды в NbTi и YBaCuO (а), для ориентаций $H \parallel c$ (б) и $H \perp c$ (в).

Пусть внешняя вынуждающая сила имеет вид

$$f(z, t) = f_0 e^{-z/\lambda} \cos \omega t. \quad (13)$$

Выражение (13) необходимо подставить в (11) вместо $f(t)$.

Поступая как в предыдущем случае, можно найти смещение вихря и поглощаемую мощность как функцию частоты и глубины проникновения. Из вида силы (13) понятно, что теперь в процессе движения вихрь

будет деформироваться, т.е. в этом случае вклад будет давать и сила упругости:

$$\langle P_{\vartheta}(\omega, z) \rangle = \frac{1}{2} \eta \omega^2 e^{-\frac{2z}{\lambda}} \frac{[n_a^2 + n_b^2 + n_c^2 + n_d^2]}{G^2}, \quad (14)$$

где

$$n_a = -\alpha f_0 \lambda^2 \left[(J - \beta \lambda^2)^2 + \lambda^2 (2J\mu_{\text{eff}} + \lambda^2 (\eta^2 - \alpha^2 - 2\mu_{\text{eff}}\beta)) \omega^2 + \mu_{\text{eff}}^2 \lambda^4 \omega^4 \right] \left[J + \lambda^2 (\mu_{\text{eff}} \omega^2 - \beta) \right],$$

$$n_b = f_0 \eta \lambda^4 \left[(J - \beta \lambda^2)^2 + \lambda^2 (2J\mu_{\text{eff}} + \lambda^2 (\eta^2 + \alpha^2 - 2\mu_{\text{eff}}\beta)) \omega^2 + \mu_{\text{eff}}^2 \lambda^2 \omega^4 \right],$$

$$n_c = 2f_0 \alpha \eta \lambda^6 \omega^2 \left[J + \lambda^2 (\mu_{\text{eff}} \omega^2 - \beta) \right], \quad n_d = -f_0 \lambda^8 \alpha \omega \left[\omega^2 (\alpha^2 + \eta^2) - \left(-\beta + \mu_{\text{eff}} \omega^2 + \frac{J}{\lambda^2} \right)^2 \right],$$

$$G = \left(J^2 - 2J\beta\lambda^2 + \beta^2\lambda^4 - 2J\alpha\lambda^2\omega + 2\alpha\beta\lambda^4\omega + 2J\mu_{\text{eff}}\lambda^2\omega^2 + \alpha^2\lambda^4\omega^2 - 2\mu_{\text{eff}}\beta\lambda^4\omega^2 + \eta^2\lambda^4\omega^2 - 2\mu_{\text{eff}}\alpha\lambda^4\omega^3 + \mu_{\text{eff}}\lambda^4\omega^4 \right) \times \\ \times \left(J^2 - 2J\beta\lambda^2 + \beta^2\lambda^4 + 2J\alpha\lambda^2\omega - 2\alpha\beta\lambda^4\omega + 2J\mu_{\text{eff}}\lambda^2\omega^2 + \alpha^2\lambda^4\omega^2 - 2\mu_{\text{eff}}\beta\lambda^4\omega^2 + \eta^2\lambda^4\omega^2 + 2\mu_{\text{eff}}\alpha\lambda^4\omega^3 + \mu_{\text{eff}}\lambda^4\omega^4 \right).$$

Из выражения (14) видно, что мощность поглощения, как и внешняя вынуждающая сила, экспоненциально убывает вглубь образца (рис. 9). Однако, в отличие от силы, основная мощность поглощается на половине глубины проникновения.

Чтобы рассчитать мощность поглощения всей вихревой нити, необходимо проинтегрировать выражение (14) по всей длине нити:

$$P = \int_0^{\infty} \langle P_{\vartheta}(\omega, z) \rangle dz = \frac{1}{4} \eta \omega^2 \lambda \frac{[n_a^2 + n_b^2 + n_c^2 + n_d^2]}{G^2}. \quad (15)$$

Реальный сверхпроводник имеет конечный размер, однако продлевая предел интегрирования до бесконечности, из-за быстрого затухания вынуждающей силы, добавляемый при этом вклад в поглощаемую мощность практически равен нулю.

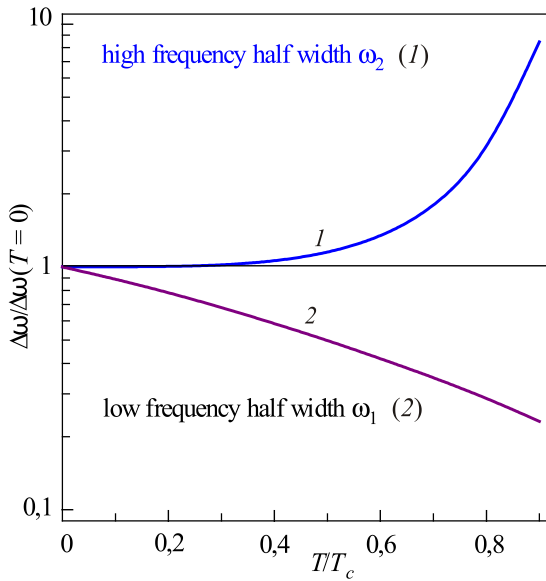


Рис. 8. Температурная зависимость полуширины низко- (2) и высокочастотного (1) нормированных пиков поглощения.

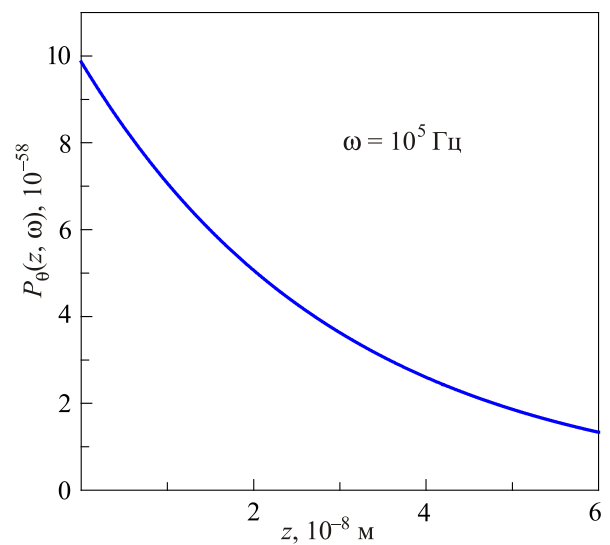


Рис. 9. Зависимость средней мощности поглощения $\langle P_{\vartheta}(z) \rangle$ от координаты z при частоте $\omega = 10^5$ Гц.

Далее можно построить зависимость мощности поглощения от частоты. Спектр имеет два пика поглощения. На рис. 10 изображены низкочастотный (а) и высокочастотный (б) пики. Деформация вихря привела к некоторому смещению резонансных частот по сравнению с частотами в случае действия однородной периодической силы. Как и раньше, максимумы поглощения связаны с пороговой и циклотронной частотами вихря.

Таким образом, для ситуации, когда внешняя вынуждающая сила экспоненциально убывает вглубь образца, были найдены: смещение вихревой линии (которое также экспоненциально уменьшается с увеличением координаты z), средняя мощность поглощения вихревой нитью на единицу длины, зависящая от частоты и координаты, полная мощность поглощения вихревой линией, зависящая только от частоты. Очевидно, что наблюдались два пика поглощения, которые соответствуют низко- и высокочастотной модам спектра собственных колебаний вихря. Резонансные частоты выше, чем в случае однородной силы, по-

скольку, как указано выше, в этом случае дают вклад силы упругости.

В пределе $\lambda \rightarrow \infty$ решение переходит в ранее полученное в работе [45], когда внешняя вынуждающая сила не зависит от координаты.

4. Механические манипуляции изолированным вихрем

Попытки проводить изучение смешанного состояния сверхпроводников через воздействие на одиночный вихрь предпринимались уже достаточно давно. Так, в [48] с использованием техники SQUID была измерена сила Лоренца, необходимая для депиннинга одиночного вихря в ниобиевой полоске, а в [49] реализована контролируемая, обратимая манипуляция вихрем, которая позволила создавать пары вихрь–антивихрь и измерять усилие при перемещении одиночного вихря в ВТСП монокристалле. Особенности картины аннигиляции вихрь–антивихрь удалось наблюдать в NbSe₂ кристалле с помощью высокочувствительной МО системы, позволяющей фиксировать динамику одиночного вихря во времени [50].

В работе [6] на основе манипуляций отдельными вихрями исследована динамика вихрей и их пиннинг на дефектах материала. Показано, что взаимодействие вихрей с центрами пиннинга определяет электромагнитные свойства сверхпроводников, в частности, их способность переносить недиссипативные токи. Используя сканирующий наноразмерный сверхпроводящий квантовый интерферометр (SQUID), авторы исследовали динамику вихрей в пленках свинца с субангстремным пространственным разрешением и очень высокой чувствительностью. Впервые была измерена фундаментальная зависимость элементарной силы пиннинга множественных дефектов при смещении вихря, которая проявила значительно более сложное поведение, чем ранее предсказывалось, в том числе ослабление силы упругости в центре потенциальной ямы, асимметрию и внутреннюю структуру потенциальной ямы. Если величина действующей на вихрь силы превышает максимальное значение возвращающей силы, действующей со стороны потенциальной ямы, образованной центром пиннинга, вихрь переходит в другую потенциальную яму. В то время как траектория вихря внутри потенциальной ямы является обратимой, переход между различными потенциальными ямами — гистерезисный.

Для того чтобы избежать сложности, связанной с рассмотрением вихря как упругой струны, закрепленной на множественных дефектах [6,15], длина вихря должна быть порядка ξ . Для реализации такой ситуации, рассматривались тонкие сверхпроводящие свинцовые пленки толщиной $d \cong \xi$ в перпендикулярном магнитном поле.

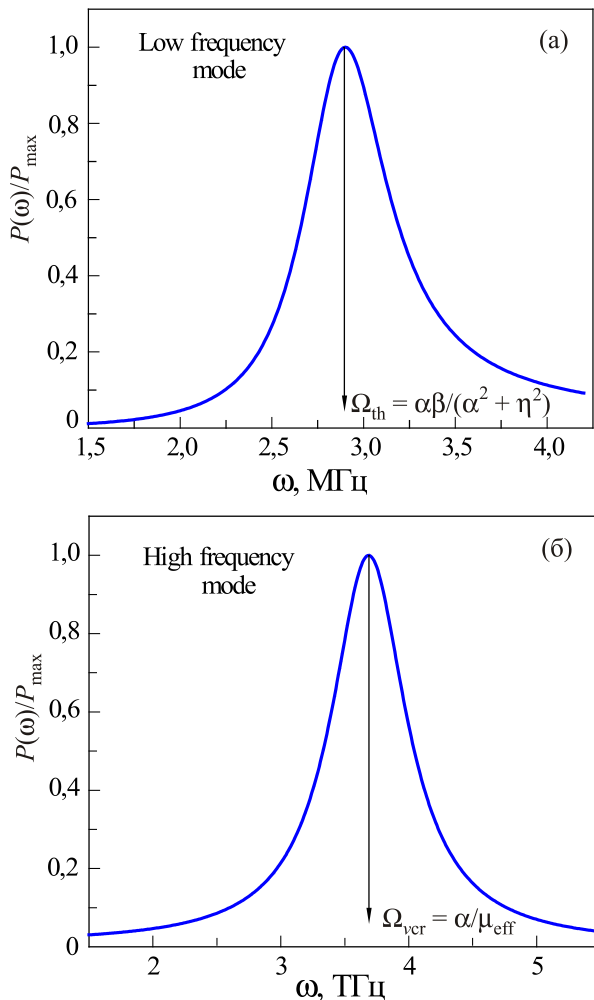


Рис. 10. Зависимость мощности поглощения вихревой нитью от частоты: (а) – низкочастотный пик $P_{\Omega}(\omega)$, высокочастотный пик $P(\omega)$ (б).

Полученные в работе [6] результаты могут быть использованы при создании проводников с высоким критическим током с искусственными наноструктурами пиннинга. Эта работа также демонстрирует интересные возможности в контролируемой манипуляции отдельными вихрями на нанометровых масштабах.

В экспериментальной работе [15] была осуществлена манипуляция одиночным вихрем Абрикосова в высокотемпературном монокристалле $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6,991}$ с помощью иглы MFM (magnetic force microscopy). MFM использует острый магнитный наконечник, помещенный вблизи поверхности сверхпроводника. Намагниченный наконечник (концентратор силовых линий) действует силой притяжения F на конец вихря вблизи поверхности сверхпроводника. Эта сила сдвигает верхнюю часть вихря, когда наконечник движется. Таким образом, индуцировалось колебательное движение вихря под действием внешней переменной неоднородной силы. Был обнаружен повышенный отклик вихря на воздействие поперечной, изменяющейся в двух направлениях силы, и значительная анизотропия силы пиннинга, которая может быть обусловлена кластеризацией кислородных вакансий. В работе [15] продемонстрированы возможности MFM метода для изучения вихревых структур и микроскопических дефектов, которые обуславливают возникновение сил пиннинга.

Выполненные авторами [15] манипуляции представляют особый интерес, когда необходимо учитывать силы пиннинга и силу упругости вихревой линии. Кроме того, метод позволяет учесть взаимодействие вихря с дефектами, расположенными в глубине образца, в отличие от других методов, дающих информацию о дефектах, расположенных в непосредственной близости к поверхности [51].

На рис. 11 из работы [15] показаны типичные примеры для отдельных, хорошо изолированных, вихрей. На рис. 11(a) показана геометрия эксперимента, сплошной линией показан вихрь, точками — центры пиннинга, магнитное поле направлено вдоль оси z , вверху показана MFM игла. Рис. 11(б) изображает движение вихря при движении иглы MFM влево–вправо вдоль оси x . Рисунки 11(в), (г) показывают, что существует некоторая пороговая высота положения иглы MFM и, соответственно, силы, действующей на вихри, при которых они начинают двигаться, причем здесь растр совершал колебания вдоль оси x и медленно двигался вдоль оси y . На рис. 11(г) хорошо видно, что при таком перемещении MFM иглы вихрь в процессе движения описывает эллипсообразную область. Рисунки 11(д), (е) схематически изображают поведение отдельного вихря, соответствующее рис. 11(в), (г). Сходство в поведении вихрей, закрепленных в разных местах, указывает на однородность структуры пиннинга в данном образце. В работе [15] также продемонстрировано, что манипуляции изо-

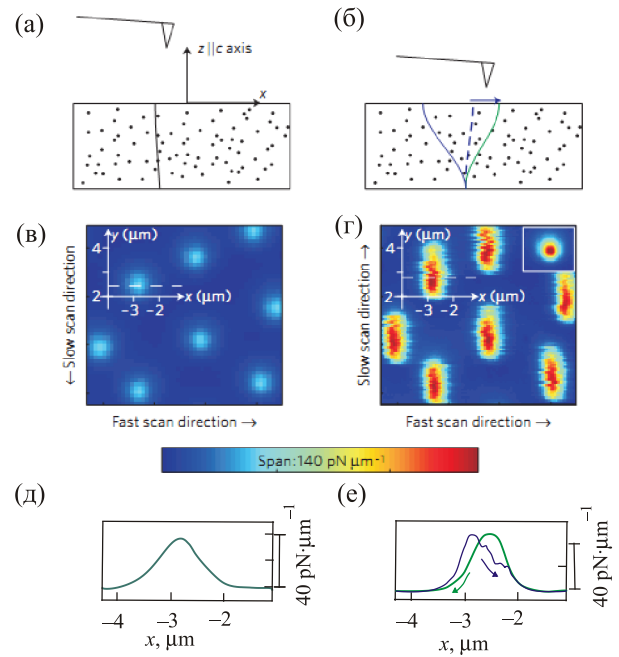


Рис. 11. (Онлайн в цвете) MFM изображение и манипуляция одиночными вихрями в YBCO при $T = 22.3$ К (из работы [15]).

лированным вихрем являются хорошим локальным зондом как для изучения динамики вихрей, так и центров пиннинга.

В работах [52–55] получены уравнения, описывающие деформации индивидуального вихря в анизотропном двухосном сверхпроводнике второго рода под действием иглы MFM, в которых учтена движущая сила, действующая на вихрь со стороны иглы микроскопа, сила упругости, обусловленная деформацией вихря, и сила пиннинга, действующая со стороны точечных дефектов. Используя эти уравнения, на основе численного расчета авторы [54,55] объяснили основные экспериментальные результаты, полученные в работе [15].

Brandt и др. рассмотрели двухосный анизотропный сверхпроводник с кристаллической осью c , перпендикулярной плоскости симметрии (оси a и b в этой плоскости). Внешнее магнитное поле было перпендикулярно этой плоскости, так что вихрь направлен вдоль оси c в образце. Система координат была выбрана следующим образом: ось z параллельна оси c , и оси x и y направлены вдоль осей a и b кристалла. Плоскость $z = 0$ совпадает с поверхностью кристалла, вихрь расположен в области $z \leq 0$. Магнитный наконечник MFM помещен на высоте Z вблизи поверхности пластины. Сила, действующая на вихрь со стороны магнитного наконечника, была аппроксимирована следующим выражением:

$$\mathbf{F} = q \frac{\mathbf{R} + (Z + h_0)\mathbf{e}_z}{(R^2 + (Z + h_0)^2)^{3/2}} \quad (16)$$

где двумерный вектор $\mathbf{R} = (X - x_0, Y - y_0)$ описывает смещение конца вихря от положения равновесия $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, величина $h_0 \approx \lambda$ (λ — величина порядка лондоновской глубины проникновения), $q = \mathbf{m}\Phi_0/2\pi$, Φ_0 — квант потока, \mathbf{m} — напряженность магнитного монополя наконечника и \mathbf{e}_z — единичный вектор вдоль оси z . Такая зависимость получается, если смоделировать наконечник и конец вихря как магнитные монополи силой \mathbf{m} и $2\Phi_0/\mu_0$ [56]. Поперечная составляющая силы (16) дает силу, действующую на вихрь. Авторы [54,55] использовали для силы выражение (16) и когда вихрь изогнут, но в этом случае для поперечной компоненты внешней движущей силы $\mathbf{f}_{ex} dz$, приложенной к сегменту вихря и имеющему проекцию dz на ось z , использовалось модельное выражение, экспоненциально затухающее вглубь образца:

$$\mathbf{f}_{ex} = q \frac{\mathbf{R}}{(R^2 + (Z + h_0)^2)^{3/2}} \frac{\exp(-|z|/\lambda)}{\lambda}. \quad (17)$$

В работе [55] показано, что, если сдвиг вихря значительно превосходит лондоновскую глубину проникновения, он практически не зависит от конкретной зависимости \mathbf{f}_{ex} от z . Таким образом, для силы, действующей на вихрь со стороны MFM иглы, во всех случаях были использованы выражения (16) и (17).

Рассматривая вихрь как упругую струну в двухосном сверхпроводнике, авторы [53] вычислили линейное натяжение вихря $\varepsilon_l(\theta, \phi, \psi)$ и силу пиннинга, действующую на единицу его длины, $f_p(\theta, \phi, \psi)$. Углы θ и ϕ определяют направление вихря в выбранной системе координат, угол ψ определяет направление силы пиннинга или искривление вихря в плоскости, перпендикулярной к вихрю. Для силы упругости было использовано линейное приближение, справедливость которого при малых значениях ε была обоснована в работе [57]. Сила пиннинга моделировалась следующим выражением:

$$f_p(\theta, \phi, \psi) = f_p^c \frac{\xi_{ab} \cos \theta}{\xi(\theta, \phi, \psi)}, \quad (18)$$

здесь f_p^c — сила пиннинга, действующая на вихрь, расположенный вдоль оси c в одноосном сверхпроводнике с такими же λ_{ab} и $\xi_{ab} = \sqrt{\xi_a \xi_b}$, где ξ_a и ξ_b — соответствующие длины когерентности.

На рис. 12, взятом из работы [55], представлены отклонения вихря от положения равновесия в процессе осцилляций магнитного наконечника вдоль оси x и медленного плавного движения вдоль оси y . Максимальное отклонение в направлении оси y , равное $y_0 = 1,19$ мкм, достигается при $x_0 \approx 0$. Видно, что при $z \leq -1,1$ мкм вихрь практически не деформируется. Пунктирные линии дают положение вихря в предыдущие моменты времени. В работе [55] показано, что при движении MFM

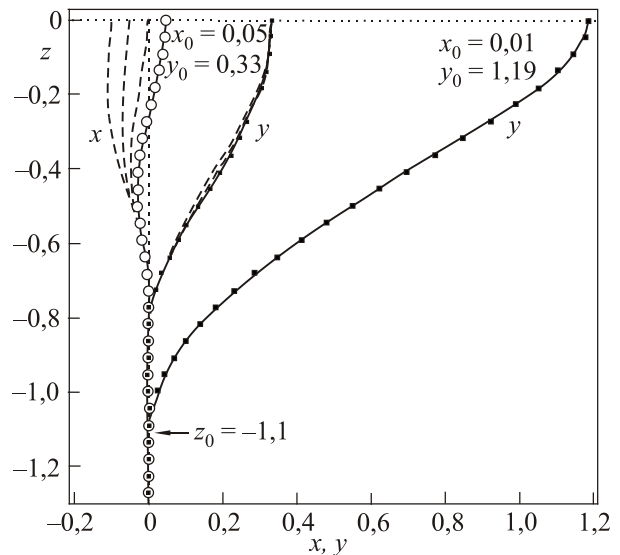


Рис. 12. Форма вихря в процессе движения магнитного наконечника [55].

иглы под углом 45° к оси x в движении конца вихря наблюдается гистерезис, обусловленный анизотропией сверхпроводника. На рис. 13 представлены траектории конца вихря, полученные для того же сверхпроводника, что и на рис. 12. Осциллирующий наконечник здесь приближается к вихрю со стороны больших положительных y , движется в сторону больших отрицательных значений и обратно. Такой подход максимально соответствует условиям эксперимента [55], когда положение конца вихря заранее предсказать было невозможно. Траектория вихря, представленная на рис. 13, хорошо сов-

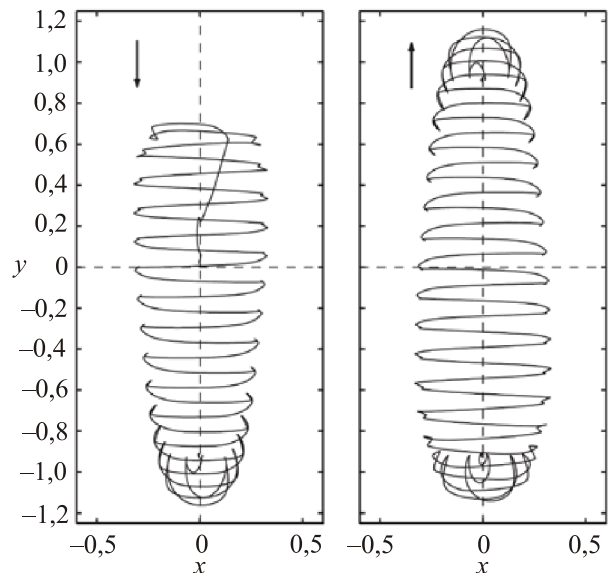


Рис. 13. Траектория конца вихря, когда магнитный наконечник осциллирует с большой амплитудой вдоль оси x и медленно движется от больших положительных значений y до больших отрицательных значений и обратно [55].

падает с экспериментальным результатом [15], представленным на рис. 11(г). В работе [54] также показано, что существует пороговое значение движущей силы (высота положения наконечника над поверхностью образца), при которой движение вихря не возбуждается, рис. 11(в). Таким образом, в работах [52–55] дано достаточно полное объяснение экспериментальных результатов, полученных при манипулировании одиночным вихрем. Различие в формах траектории вихря, представленных на рис. 6 и 13, обусловлено тем, что на рис. 13 представлена траектория вихря, совершающего вынужденные колебания, тогда как на рис. 6 — свободные затухающие колебания.

На основании приведенных результатов можно сделать вывод о том, что изучение динамики изолированного вихря является актуальной задачей, поскольку позволяет изучать не только упругие свойства и структуру вихря, но и взаимодействие с центрами пиннинга и их распределение по объему сверхпроводника, определить спектр его колебаний и энергию, поглощаемую вихрем в поле переменного тока.

Выводы

Проведен анализ современного состояния проблемы осцилляционной динамики изолированных вихрей Абрикосова в сверхпроводниках II рода. Рассмотрены решения уравнений, описывающих собственные и вынужденные колебания упругой вихревой линии в сверхпроводнике при учете различных сил, влияющих на ее движение: Лоренца, пиннинга и вязкости. В уравнение включены инерционные свойства вихрей, появляющиеся в результате различных механизмов массивности, природа и величина некоторых из них обсуждается в работе. В спектре собственных колебаний роль каждой силы, инерционности и упругих свойств вихревой нити проанализированы отдельно. Так, колебания упругого вихря при учете силы Лоренца в уравнении движения содержат моду *De Gennes u Matricon* [8] с параболическим законом дисперсии (рис. 14). В этой моде при учете силы пиннинга, возникает активационный порог Ω_{th} . По оценкам авторов [8], частота колебаний вихря порядка мегагерца. Учет в уравнении движения эффективной массы вихря ($\mu_{eff} \sim 5 \cdot 10^{-19}$ кг/м, обусловленной, например квазичастицами, локализованными в коре вихря) приводит к возникновению *высокочастотной ветви* в спектре колебаний. Ее частота, например в YBaCuO, при $T = 0$ К лежит в нижнем терагерцевом диапазоне [16]. Для двух распространенных сверхпроводников (NbTi и YBaCuO) приведены для этих мод значения характерных частот, которые определяются их параметрами. Логарифмический декремент затухания для низкочастотной моды не зависит от волнового вектора и определяется отношением силы вязкости к силе Лоренца.

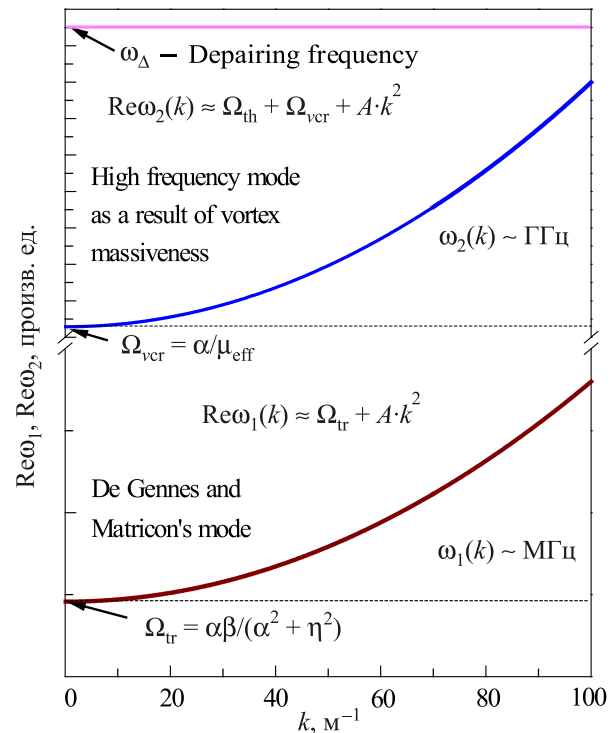


Рис. 14. (Онлайн в цвете) Реальная часть расчетного спектра колебаний $\omega(k)$ вихря Абрикосова с эффективной массой μ_{eff} (низко- и высокочастотная моды); α — параметр силы Лоренца, β — параметр пиннинга, η — параметр вязкости, Ω_{vcr} — циклотронная частота вихря; Ω_{tr} — пороговая частота, связанная с учетом силы пиннинга, $A = \alpha k^2 / (\alpha^2 + \eta^2)$; $T = 0$ К.

Проанализирована форма траектории одиночного вихря, совершающего затухающие колебания [43].

В работе представлены особенности поглощения энергии упругой массивной вихревой линией под действием внешней вынуждающей однородной и затухающей вглубь образца гармонической силы с учетом всех перечисленных ранее воздействий. Частотная зависимость поглощения энергии вихревой нитью имеет два характерных пика поглощения, соответствующих низко- и высокочастотной ветвям спектра колебаний.

Минимум в низкочастотной ветви соответствует пороговой частоте, в высокочастотной — циклотронной частоте вихря. В анизотропных сверхпроводниках, например в YBaCuO, эти характерные частоты зависят от направления магнитного поля в кристалле. Проанализированы температурные особенности поглощения. В случае низкочастотной моды резонансная частота пика поглощения уменьшается с повышением температуры, что определяется ослаблением силы пиннинга. Положение второго, высокочастотного максимума, практически не зависит от температуры. Зависимость полуширины резонансных пиков поглощения от температуры оказалась различной для низко- и высокочастотной ветвей спектра. В завершение рассмотрены

эксперименты по манипуляции одиночными вихрями с помощью (SQUID) [6], магнитного силового микроскопа (MFM) [15] и результаты моделирования динамики вихря для этой ситуации [53–55]. При расчетах были учтены, магнитная сила, действующая на вихрь со стороны иглы MFM, сила пиннинга и упругость вихревой линии. Обсуждается сложная траектория вихря, совершающего вынужденные колебания [55].

1. А.А. Абрикосов, *ЖЭТФ* **32**, 1442 (1957).
2. Л.В. Шубников, В.И. Хоткевич, Ю.Д. Шепелев, Ю.И. Рябинин, *ЖЭТФ* **7**, 221(1937).
3. J.C. Loudon and P.A. Midgley, *Ultramicroscopy* **109**, 700 (2009).
4. Ch. Jooss, J. Albrecht, H. Kuhn, S. Leonhardt, and H. Kronmuller, *Rep. Prog. Phys.* **65**, 651 (2002).
5. G. Blatter, M.V. Feigel'man, V.B. Geshkenbein, A.I. Larkin, and V.M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125 (1994).
6. L. Embon, Y. Anahary, A. Suhov, D. Holbertal, J. Cuppens, A. Yakovenko, A. Uri, Y. Myasoedov, M.L. Rappaport, M.E. Huber, A. Gurevich, and E. Zeldov, *Sci. Rep.* **5**, 07598 (2015).
7. A.L. Fetter, P.C. Hollenberg, and P. Pincus, *Phys. Rev. B* **147**, 140 (1966).
8. P.G. de Gennes and J. Matricon, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 45 (1964).
9. J. Bardeen and M. J. Stephen, *Phys. Rev.* **140**, A1197 (1965).
10. E.H. Brandt, *Rep. Prog. Phys.* **58**, 1465 (1995).
11. D.-X. Chen, J. J. Moreno, A. Hernando, A. Sanchez, and B.-Z. Li, *Phys. Rev. B* **57**, 5059 (1998).
12. Н.Б. Копнин, В. Е. Кравцов, *ЖЭТФ* **71**, 1644 (1976).
13. *Nanoscience and Engineering*, in: *Superconductivity*, V.V. Moshchalkov, R. Wördenweber, and M. Lang (eds.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2010).
14. *Nanostructured Superconductors*, V.V. Moshchalkov and J. Fritzsche, World Scientific, Singapore (2011).
15. O.M. Auslaender, L.Luan, E.W.J. Straver, J.E. Hoffman, N.C. Koshnick, E. Zeldov, D.A. Bonn, R. Liang, W.N. Hardy, and K.A. Moler, *Nature* **5**, 35 (2009).
16. С.В. Васильев, В.В. Чабаненко, Н.В. Кузовой, В.Ф. Русаков, *ФНТ* **39**, 139 (2013) [*Low Temp. Phys.* **39**, 102 (2013)].
17. А.А. Абрикосов, М.П. Кемоклидзе, И.М. Халатников, *ЖЭТФ* **48**, 765(1965).
18. N.V. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity*, Oxford University Press, Oxford (2001).
19. N.V. Kopnin and V.M. Vinokur, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3952 (1998).
20. H. Suhl, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 226 (1965).
21. G. Baym and E. Chandler, *J. Low. Temp. Phys.* **50**, 57 (1982).
22. M.W. Coffey and Z. Hao, *Phys. Rev. B* **44**, 5230 (1991).
23. Н.Б. Копнин, *Письма в ЖЭТФ* **27**, 417 (1978); *Rep. Prog. Phys.* **65**, 1633 (2002).
24. Г.Е. Воловик, *Письма в ЖЭТФ* **65**, 201 (1997).
25. E.B. Sonin, V.B. Geshkenbein, A. Oterlo, and G. Blatter, *Phys. Rev. B* **57**, 575 (1998).
26. E. Šimánek, *Phys. Lett. A* **154**, 309 (1991).
27. M.W. Coffey, *Phys. Rev. B* **49**, 9774 (1994).
28. J.M. Duan and E. Šimánek, *Phys. Lett. A* **190**, 118 (1994).
29. J.I. Gittleman and B.J. Rosenblum, *J. Appl. Phys.* **39**, 2617 (1968).
30. J.H. Han, P. Ao, and X.-M. Zhu, arXiv: Cond-mat/9903125 (1999).
31. M.J. Stephen and H. Suhl, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 797 (1964).
32. A.R. Strnad, C.F. Hempstead, and Y.B. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 26 (1964).
33. M.I. Stephen and I. Bardeen, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 112 (1965).
34. E.M. Chudnovsky and A.B. Kuklov, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 067004-1 (2003).
35. В.Д. Филь, Т.В. Игнатова, Д.В. Филь, Н.Г. Бурма, А.И. Петришин, Н.Ю. Шицевалова, *ФНТ* **33**, 1342 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 1019 (2007)].
36. V. Rusakov, S. Vasiliev, V. Chabanenko, A. Yurov, A. Nabialek, S. Piechota, and H. Szymczak, *Acta Phys. Pol.* **109**, 641 (2006).
37. M. Konczykowski and F. Rullier-Albenque, *Phys. Rev. B* **44**, 7167 (1991).
38. Z. Hao and J.R. Clem, *Transact. Magn.* **27**, 1086 (1991).
39. M. Tinkham, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 804 (1964).
40. Y. Shapiro and L.J. Neuringer, *Phys. Rev.* **154**, 375 (1966).
41. H. Darhmaoui and J. Jung, *Phys. Rev. B* **53**, 14621 (1996).
42. E.W. Collings, *Applied Superconductivity, Metallurgy, and Physics of Titanium Alloys*, New York and London (1986).
43. V. Rusakov, S. Vasiliev, V.V. Chabanenko, A. Yurov, A. Nabialek, S. Piechota, and H. Szymczak, *Acta Phys. Pol. A* **109**, 641 (2006).
44. S. Vasiliev, V. Chabanenko, V. Rusakov, A. Nabialek, A. Yurov, and H. Szymczak, *Physica C* **460**, 1198 (2007).
45. S. Vasiliev, V.V. Chabanenko, N. Kuzovoi, V.F. Rusakov, A. Nabialek, and H. Szymczak, *J. Supercond. Novel Magn.* **26**, 2033 (2013).
46. G. Ghigo, F. Laviano, I. Gozzelino, R. Gerbaldo, and E.J. Mezzetti, *J. Appl. Phys.* **102**, 113901 (2007).
47. А.Н. Чумак, В.Ф. Русаков, В.В. Чабаненко, Н.В. Кузовой, *Актуальні проблеми фундаментальних наук: матеріали I Міжнар. наук. конф., Луцьк* (2015).
48. G.S. Park, Ch.E. Cunningham, B. Cabrera, and M.E. Huber, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1920 (1992).
49. B.W. Gardner, J.C. Wynn, D.A. Bonn, R. Liang, W.N. Hardy, J.R. Kirtley, V.G. Kogan, and K.A. Moler, *Appl. Phys. Lett.* **80**, 1010 (2002).
50. M. Baziljevich, P.E. Goa, H. Hauglin, E. Il'yashenko, and T.H. Johansen, in: *Advances in Science and Technology, Science and Engineering of HTC Superconductivity IV*, P. Vincenzini and S. Cerasara (eds.), Techna Srl, Faenza (2003), vol. 38, p. 377; *Proceedings of 10th International Ceramics Congress & 3rd Forum on New Materials (CIMTEC2002), Florence, Italy, July 14–18 (2002)*.
51. M. Breitwisch and D.K. Finnemore, *Phys. Rev. B* **62**, 671 (2000).
52. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev. B* **67**, 104511 (2003).

53. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev. B* **79**, 020506 (R) (2009).
54. E.H. Brandt, G.P. Mikitik, and E. Zeldov, *Phys. Rev. B* **80**, 054513 (2009).
55. E.H. Brandt, G.P. Mikitik, and E. Zeldov, *Physica C* **470**, 782 (2010).
56. G. Carneiro and E.H. Brandt, *Phys. Rev. B* **61**, 6373 (2000).
57. E.H. Brandt, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1105 (1992).

The oscillation of the single Abrikosov's vortex in hard superconductors type II

V.F. Rusakov, V.V. Chabanenko, A. Nabiałek, and O.M. Chumak

During the last decade registration and manipulation of single vortex lines in bulk superconductors have been investigated with the aid of experimental techniques. Electrodynamical response of pinned vortices in high frequency range allows studying some of their characteristic. In the submitted survey the analysis of the problem of contemporary status of the single Abrikosov vortex oscillation in type II superconductors has been performed. The solutions of the free and forced oscillations of the single elastic vortex line have been analyzed considering different affecting on movement forces: pinning, elasticity, viscosity and Lorenz force. Also vortex inert properties due to the different mechanisms of massiveness have been taken into account. The nature and magnitude of the vortex effective mass caused by some of them are discussed in the paper. The roles of every force and inert in the free oscillation spectrum have been detailed investigated. In *De Gennes* and *Matricon* mode (about megahertz) with parabolic dispersion dependence and con-

sidering the pinning force an activation threshold appears. The account of the effective vortex mass in the equation of motion leads to the occurrence of *high-frequency mode* (about terahertz) in the oscillation spectrum which also has an activation character. Estimations of the characteristic frequencies for these modes have been given for two widespread superconductors (NbTi and anisotropic YBaCuO material). The paper also presents the features of the resonant behavior of elastic massive vortex line arising under the influence of the external driving uniform damped into the sample depth harmonic force taking into account all the forces mentioned above. The frequency and temperature dependences of the energy absorption by the vortex line have been analyzed. Maximum absorption in the low-frequency mode corresponds to the threshold frequency, in the high-frequency mode one corresponds to the cyclotron frequency of the vortex. At the end the single vortices manipulation experiments and vortex dynamics simulation have been considered.

PACS: 74.25.Uv Vortex phases (includes vortex lattices, vortex liquids, and vortex glasses);
 74.25.Wx Vortex pinning (includes mechanisms and flux creep);
 74.25.Op Mixed states, critical fields, and surface sheaths;
 74.70.Ad Metals; alloys and binary compounds (including A15, MgB2, etc.).

Keywords: Abrikosov vortex, effective mass of vortex, the dynamics of vortex lines, pinning force, viscosity force.