Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2017, т. 43, № 9, с. 1324–1333

Спинорный параметр порядка и состояния равновесия бозе-систем со спином $s = 1$

А.В. Глущенко, М.Ю. Ковалевский

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: mik@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 25 июля 2016 г., после переработки 14 ноября 2016 г.,
опубликована онлайн 25 июля 2017 г.

Рассмотрен вопрос классификации вырожденных состояний равновесия в спин $s = 1$ системах, в которых одновременно нарушены фазовая и магнитная симметрии. Предположение об остаточной симметрии вырожденных состояний равновесия и трансформационные свойства спинорного оператора параметра порядка при преобразованиях, обусловленных аддитивными интегралами движения, приводят к уравнениям, которые классифицируют его равновесные значения. Анизотропная структура равновесных значений параметра порядка представлена в терминах параметров генератора остаточной симметрии. На основе модели с выделенным конденсатом найдена структура магнитных плотностей аддитивных интегралов движения в состоянии равновесия. Проведено сравнение с известными результатами исследований в сверхтекучих спин $s = 1$ системах.

Розглянуто питання класифікації вироджених станів рівноваги в спін $s = 1$ системах, в яких одночасно порушені фазова та магнітна симетрії. Припущення про залишкову симетрію вироджених станів рівноваги і трансформаційні властивості спінорного оператора параметра порядку при перетвореннях, обумовлених адитивними інтегралами руху, призводять до рівнянь, які класифікують його рівноважні значення. Анізотропну структуру рівноважних значень параметра порядку представлено в термінах параметрів генератора залишкової симетрії. На основі моделі з виділеним конденсатом знайдено структуру магнітних щільностей адитивних інтегралів руху в стані рівноваги. Проведено порівняння з відомими результатами досліджень в надплинних спін $s = 1$ системах.

PACS: 03.75.Mn Многокомпонентные конденсаты; спинорные конденсаты;
03.75.Hh Статические свойства конденсатов; термодинамические, статистические и структурные свойства;
11.30.Qc Спонтанные и радиационные нарушения симметрии;
75.10.–b Общая теория и модели магнитного упорядочения.

Ключевые слова: спин, симметрия, квазисредние, квадрупольная матрица, спинорный параметр порядка.

Введение

В настоящее время интенсивно исследуются многочастичные квантовые системы, структурные элементы которых обладают спином $s > 1/2$ [1–5]. Интерес к этим объектам связывают с надеждой открытия новых физических состояний в твердом теле или в разреженных газах, используя технологию оптических решеток [6,7]. Для понимания основного состояния таких квантовых объектов существенна симметрия гамильтониана, а также характер спонтанного нарушения симметрии состояний равновесия и их остаточная симметрия. В работах [8–11] исследованы магнетики со спином $s = 1$ в рамках билинейно-биквадратичной модели гамильтониана, которая выходит за рамки традиционной модели Гейзенберга. Более высокая $SU(3)$ симметрия обменного взаимодействия в системах со спином $s = 1$, в сравнении с $SU(2)\sim SO(3)$ симметрией обменного гамильтониана магнетиков со спином $s = 1/2$, приводит к расширению набора термодинамических параметров и увеличивает разнообразие фазовых состояний [12–14]. В [15] предсказана новая фаза — ортогональное нематическое состояние с локальной двухосной симметрией. В недавней работе [16] дано прямое экспериментальное подтверждение существования спинового нематика.

В работах [17–20] рассмотрены состояния равновесия, в которых спонтанно нарушены фазовая и магнитная симметрии. На основе модельного вида обменной энергии как функции спинорного параметра порядка исследован ряд сверхтекучих состояний равновесия и рассмотрены вопросы сосуществования ферромагнетизма и явления бозе-конденсации. Аналогичная задача об основном состоянии бозе-систем со спином $s = 1$ рассмотрена и в теоретико-групповом подходе [21,22], где важное значение имеет представление об остаточной симметрии вырожденного состояния равновесия [23,24]. В указанных работах, в соответствии с данными эксперимента [25], выполненными для достаточно разреженных газоподобных магнитных систем (^{23}Na, ^{7}Li, ^{41}K, ^{87}Rb), обменное взаимодействие обладает $SO(3)$ симметрией. Кроме того, имеются работы, в которых рассмотрены физические особенности сверхтекучести магнетиков со спином $s = 1$ и $SU(3)$ симметрией обменного взаимодействия [26–29]. Похожие вопросы исследования основного состояния и влияния на них магнитных степеней свободы изучались для сверхпроводящих систем в работах [30,31].

Наше рассмотрение посвящено изучению влияния унитарной $SU(3)$ симметрии обменного взаимодействия на возможные сверхтекучие состояния равновесия в спин $s = 1$ бозе-системах. В рамках концепции квазисредних [32] ранее классифицированы однородные и неоднородные состояния равновесия сверхтекучего ^{3}He [33,34], состояния сверхтекучей жидкости с d-спариванием [35]. Представления о генераторе остаточной симметрии совместно с трансформационными свойствами параметра порядка приводят к уравнениям классификации параметра порядка. Анализ решений этих уравнений позволяет установить структуру анизотропии параметра порядка в терминах параметров генератора этой симметрии. Для понимания магнитных свойств состояний равновесия, помимо параметра порядка, необходимо также знание равновесных значений плотностей аддитивных интегралов движения. Эти магнитные величины нами найдены в рамках модели с выделенным конденсатом [36]. В первоначальном виде эта модель описывала сверхтекучие свойства со скалярным параметром порядка и не включала рассмотрение магнитных степеней свободы. Позднее более сложные модели с выделенным конденсатом, которые учитывали магнитные степени свободы, построены в работах [17,18,37], см. также обзор [25].

Структура статьи такова: в разд. 2 рассмотрены нормальные состояния равновесия изучаемых магнитных систем и сформулированы их свойства симметрии. В разд. 3 изучено спонтанное нарушение магнитной и фазовой симметрии, сформулированы уравнения классификации для спинорного параметра порядка и получены допустимые значения параметров генератора остаточной симметрии в общем виде. В разд. 4 выяснен вид спинорного параметра порядка как функции параметров генератора остаточной симметрии и дано сравнение с известными результатами. Раздел 5 посвящен нахождению на основе модели с выделенным конденсатом плотностей магнитных интегралов движения в зависимости от фазовых состояний сверхтекучей системы.

2. Интегралы движения и симметрия нормальных состояний равновесия

Рассмотрим нормальные состояния равновесия спин $s = 1$ магнетиков и сформулируем их свойства симметрии. Статистический оператор Гиббса таких состояний имеет вид

$$\hat{\hat{w}}(Y) = \exp\left(\Omega(Y) - Y_0\hat{\hat{H}} - Y_k\hat{\hat{P}}_k - Y_4\hat{\hat{N}} - Y_{\alpha\beta}\hat{\hat{G}}_{\beta\alpha}\right). \quad (2.1)$$

Набор аддитивных интегралов движения $\hat{\hat{\gamma}}_a \equiv \left(\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{P}}_k, \hat{\hat{N}}, \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}\right)$ $(a = 0, 4, k, \alpha\beta)$ состоит из гамильтониана $\hat{\hat{H}}$, импульса $\hat{\hat{P}}_k = \int d^3x\hat{\pi}_k(\mathbf{x})$ $(k = 1,2,3$ — пространственные индексы), оператора числа частиц $\hat{\hat{N}} = \int d^3x\hat{n}(\mathbf{x})$ и матричного оператора $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}$ [3], который определяется соотношением

$$\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} = \int d^3x\left(\hat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{x})\hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}) - \delta_{\alpha\beta}\hat{\psi}^+_\gamma(\mathbf{x})\hat{\psi}_\gamma(\mathbf{x})/3\right). \quad (2.2)$$

Здесь $\hat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{x})$, $\hat{\psi}_\beta(\mathbf{x})$ — операторы рождения и уничтожения бозе-частицы в точке $\mathbf{x}$, $\alpha, \beta = x, y, z$ — спиновые индексы. Оператор $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}$ представляет собой генератор $SU(3)$ симметрии и удовлетворяет равенствам $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} = \hat{\hat{G}}^+_{\beta\alpha}$, $\hat{\hat{G}}_{\alpha\alpha} = 0$. Он связан с эрмитовыми операторами спина $\hat{\hat{S}}_\alpha$ и квадрупольной матрицей $\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}$ соотношением

$$\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} \equiv \hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{S}}_\gamma/2,$$
$$\hat{\hat{S}}_\alpha = \int d^3x\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta} = \int d^3x\hat{q}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}). \quad (2.3)$$

Операторы вторичного квантования обозначены значком $\hat{\hat{A}}$ для их отличия от конечномерных матриц. Термодинамические силы Y_a, сопряженные аддитивным интегралам движения, включают температуру $T = Y_0^{-1}$, макроскопическую скорость $v_k = -Y_k/Y_0$, химический потенциал $\mu = -Y_4/Y_0$ и комплексную 3×3 матрицу $Y_{\alpha\beta}$. В силу эрмитовости оператора Гиббса эта матрица удовлетворяет соотношению $Y_{\alpha\beta} = Y^*_{\beta\alpha}$. Введем в рассмотрение действительные термодинамические параметры, сопряженные оператору спина и квадрупольной матрице, с помощью равенств: $Y_{\alpha\beta}\hat{\hat{G}}_{\beta\alpha} \equiv Y_\alpha \hat{\hat{S}}_\alpha + Y^{(s)}_{\alpha\beta}\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}$, $Y^{(s)}_{\alpha\beta} \equiv \left(Y_{\alpha\beta} + Y_{\beta\alpha}\right)/2$, $Y_\alpha \equiv i\varepsilon_{\gamma\beta\alpha}Y_{\beta\gamma}/2$. Величина $-Y_\alpha / Y_0 \equiv h_\alpha$ представляет собой эффективное магнитное поле. Аналогично величине $-Y^{(s)}_{\alpha\beta}/Y_0 \equiv h^{(s)}_{\alpha\beta}$ придаем физический смысл эффективного квадрупольного поля. Поскольку $\hat{\hat{G}}_{\alpha\alpha} = 0$, без ограничения общности полагаем, что $\mathrm{tr}\,\hat{Y} = \mathrm{tr}\,\hat{Y}^{(s)} = 0$. След конечномерных матриц обозначен как tr, чтобы отличить его от аналогичного действия в гильбертовом пространстве.

Плотности аддитивных интегралов движения в терминах полевых бозе-операторов имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\hat{n}(\mathbf{x}) = \hat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{x})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), &&\hat{\hat{\pi}}_k(\mathbf{x}) = i\left\{\nabla_k\hat{\psi}^+_\beta(\mathbf{x})\hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}) - \hat{\psi}^+_\beta(\mathbf{x})\nabla_k\hat{\psi}_\beta(\mathbf{x})\right\}/2,\\
&\hat{\hat{s}}_\alpha(\mathbf{x}) = \hat{\psi}^+_\mu(\mathbf{x})\left(\hat{s}_\alpha\right)_{\mu\nu}\hat{\psi}_\nu(\mathbf{x}), &&\hat{\hat{q}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \hat{\psi}^+_\mu(\mathbf{x})\left(\hat{q}_{\alpha\beta}\right)_{\mu\nu}\hat{\psi}_\nu(\mathbf{x}),\\
&\left(\hat{s}_\alpha\right)_{\mu\nu} \equiv -i\varepsilon_{\alpha\mu\nu}, &&\left(\hat{q}_{\alpha\beta}\right)_{\mu\nu} \equiv \left(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}/3\right)/2.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Учитывая канонические коммутационные соотношения бозе-операторов и принимая во внимание определения (2.2), (2.4), получим квантовые скобки Пуассона для генераторов $SU(3)$ симметрии:

$$\left[\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}, \hat{\hat{G}}_{\mu\nu}\right] = \hat{\hat{G}}_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - \hat{\hat{G}}_{\mu\beta}\delta_{\alpha\nu}. \tag{2.5}$$

Остальные коммутаторы аддитивных интегралов движения обращаются в нуль. В изучаемом нами случае магнетиков со спином $s = 1$ в силу обменной $SU(3)$ симметрии $[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{G}}] = 0$ гамильтониана набор магнитных интегралов движения, наряду с вектором спина, включает также симметричную и бесследную квадрупольную матрицу: $[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{\mathbf{S}}}] = 0$ и $[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{Q}}] = 0$. Свойство $SO(3)$ симметрии обменного взаимодействия означает справедливость соотношений $[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{\mathbf{S}}}] = 0$ и $[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{Q}}] \neq 0$. Обратим внимание, что предположение о возможности выполнения соотношений $[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{\mathbf{S}}}] \neq 0$ и $[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{Q}}] = 0$ не справедливо. Действительно, так как в силу определения (2.3) и соотношения (2.5) имеет место равенство $i[\hat{\hat{S}}_\alpha, \hat{\hat{Q}}_{\gamma p}] = -\varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\hat{\hat{Q}}_{\lambda\rho} - \varepsilon_{\alpha\rho\lambda}\hat{\hat{Q}}_{\lambda\gamma}$, то указанное предположение ведет к нарушению тождества Якоби для операторов $\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{\mathbf{S}}}, \hat{\hat{Q}}$.

Свойства симметрии нормальных и вырожденных состояний равновесия изучаемых магнетиков удобно сформулировать для случая, при котором термодинамические силы $Y_k = 0$ и $Y_{\alpha\beta} = 0$. Нормальные состояния равновесия, описываемые статистическим оператором $\hat{\hat{w}} \equiv \hat{\hat{w}}(Y_0, Y_4, Y_k = 0, \hat{Y} = 0)$, удовлетворяют соотношениям фазовой и пространственной симметрии

$$\left[\hat{\hat{w}}, \hat{\hat{N}}\right] = 0,\quad \left[\hat{\hat{w}}, \hat{\hat{P}}_k\right] = 0,\quad \left[\hat{\hat{w}}, \hat{\hat{L}}_i\right] = 0. \tag{2.6}$$

Здесь оператор орбитального момента определяется соотношением $\hat{\hat{L}}_i = \varepsilon_{ikl}\int d^3x x_k \hat{\hat{\pi}}_l(\mathbf{x})$. Условие магнитной симметрии нормальных состояний равновесия записывается в виде

$$\left[\hat{\hat{w}}, \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}\right] = 0. \tag{2.7}$$

Свойства симметрии гамильтониана $[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{\gamma}}_a] = 0$ и нормальных состояний равновесия (2.6), (2.7) совпадают. Состояние равновесия инвариантно относительно унитарного преобразования $\hat{\hat{U}}(\hat{\theta}) = \exp i\theta_{\alpha\beta}\hat{\hat{G}}_{\beta\alpha}$: $\hat{\hat{U}}(\hat{\theta})\hat{\hat{w}}\hat{\hat{U}}^+(\hat{\theta}) = \hat{\hat{w}}$. Из условия унитарности оператора $\hat{\hat{U}}(\hat{\theta})$ вытекает эрмитовость матрицы $\theta_{\alpha\beta}$: $\theta^*_{\alpha\beta} = \theta_{\beta\alpha}$. Полная группа симметрии нормального состояния равновесия спин $s = 1$ магнетиков имеет вид $G = [SU(3)]_S \times [SO(3)]_L \times [U(1)]_\phi \times [T(3)] \times [T(1)]$. Здесь $[SO(3)]_L$ — группа симметрии относительно поворотов в реальном пространстве, $[SU(3)]_S$ — группа магнитной симметрии; $[T(3)]$ и $[T(1)]$ — группы трансляций в пространстве и времени, $[U(1)]_\phi$ — группа фазовой симметрии.

Заметим, что средние вида $\mathrm{Sp}\,\hat{\hat{w}}[\hat{\hat{G}}, \hat{\hat{b}}(\mathbf{x})]$ и $\mathrm{Sp}\,\hat{\hat{w}}[\hat{\hat{N}}, \hat{\hat{b}}(\mathbf{x})]$ обращаются в нуль при произвольном квазилокальном операторе $\hat{\hat{b}}(\mathbf{x})$. Это, в частности, справедливо, как мы увидим для оператора параметра порядка $\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x})$ (см. разд. 3). В силу линейности квантовых скобок

$[\hat{\hat{G}}_{\mu\nu}, \hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x})]$ по оператору параметра порядка средние значения параметра порядка в нормальном состоянии равновесия обращаются в нуль: $\mathrm{Sp}\,\hat{w}\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x}) = 0$.

3. Спонтанное нарушение симметрии и уравнения классификации вырожденных состояний равновесия

Рассмотрим вырожденные состояния равновесия спин $s = 1$ магнетиков, для которых нарушены магнитная и фазовая симметрии при сохранении пространственной симметрии, соответствующей нормальным состояниям (2.6). Согласно концепции квазисредних [32,34], статистический оператор Гиббса, описывающий такие состояния равновесия, имеет вид

$$\hat{w}(Y,\xi) = \exp\left(\Omega - Y_a\hat{\hat{\gamma}}_a - \nu\hat{\hat{F}}(\xi)\right). \tag{3.1}$$

Источник $\hat{\hat{F}} = \int d^3x\left(f_\alpha(\mathbf{x},\xi)\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x}) + \mathrm{h.c.}\right)$ нарушает свойства симметрии состояния равновесия, заданные соотношениями (2.6)–(2.8), и представляет собой линейный функционал спинорного оператора параметра порядка $\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x}) \equiv \hat{\hat{\psi}}_\alpha(\mathbf{x})$. Здесь $f_\alpha(\mathbf{x},\xi)$ — функция координат и дополнительных термодинамических параметров ξ, сопряженная равновесному значению параметра порядка $\Delta_\alpha(\mathbf{x}, f(\mathbf{x},\xi)) = \left\langle\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x})\right\rangle$. Квазисреднее в состоянии с нарушенной симметрией (3.1) определяется формулой

$$\left\langle\hat{a}(\mathbf{x})\right\rangle \equiv \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty}\mathrm{Sp}\,\hat{w}(Y,\xi)\hat{a}(\mathbf{x}), \tag{3.2}$$

где $\hat{a}(\mathbf{x})$ — произвольный квазилокальный оператор. Зависимость квазисредних $\langle\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x})\rangle$ от дополнительных термодинамических величин ξ сохраняется при осуществлении предельных переходов $V\to\infty$, $\nu\to 0$. Спонтанное нарушение магнитной *SU*(3) симметрии и фазовой симметрии

$$\left[\hat{w}(\xi), \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}\right] \neq 0, \qquad \left[\hat{w}(\xi), \hat{\hat{N}}\right] \neq 0$$

означает, что в этом состоянии равновесия параметр порядка отличен от нуля $\left\langle\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x})\right\rangle \neq 0$. Рассмотрим статистический оператор $\hat{w}(\xi) \equiv \hat{w}\left(Y_k = 0, \hat{Y} = 0, \xi\right)$, который описывает сверхтекучие состояния с одночастичным конденсатом (спинорный конденсат).

Из формул (2.4) и канонических перестановочных соотношений полевых бозе-операторов получим алгебру квантовых скобок Пуассона для аддитивных интегралов движения со спинорным оператором параметра порядка:

$$\left[\hat{\hat{S}}_\alpha, \hat{\hat{\Delta}}_\beta(\mathbf{x})\right] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{\Delta}}_\gamma(\mathbf{x}), \quad \left[\hat{\hat{N}}, \hat{\hat{\Delta}}_\beta(\mathbf{x})\right] = -\hat{\hat{\Delta}}_\beta(\mathbf{x}),$$
$$\left[\hat{\hat{Q}}_{\mu\nu}, \hat{\hat{\Delta}}_\beta(\mathbf{x})\right] = -\delta_{\mu\beta}\hat{\hat{\Delta}}_\nu(\mathbf{x})/2 - \delta_{\nu\beta}\hat{\hat{\Delta}}_\mu(\mathbf{x})/2 + \delta_{\mu\nu}\hat{\hat{\Delta}}_\beta(\mathbf{x})/3. \tag{3.3}$$

Правые стороны квантовой алгебры (3.3) линейны по оператору параметра порядка, что ведет к обращению в нуль среднего $\Delta_\alpha = \mathrm{Sp}\,\hat{w}\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x})$ для нормального состояния равновесия. Условия трансляционной инвариантности и инвариантности относительно поворотов в реальном пространстве для оператора параметра порядка имеют вид

$$i\left[\hat{\hat{P}}_k, \hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x})\right] = -\nabla_k\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x}),$$
$$i\left[\hat{\hat{L}}_i, \hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x})\right] = -\varepsilon_{ikl}x_k\nabla_l\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x}). \tag{3.4}$$

В силу (3.4), равновесное среднее $\left\langle\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x})\right\rangle$ не зависит от координаты.

Классификацию вырожденных состояний равновесия осуществим, используя концепцию квазисредних и предположение об их остаточной (ненарушенной) симметрии [34]. В этом подходе не существенен явный вид гамильтониана и отсутствует предположение о малости параметра порядка вблизи точки фазового перехода. Важными являются трансформационные свойства параметра порядка относительно преобразований, порождаемых аддитивными интегралами движения (3.3), (3.4). Условие остаточной симметрии означает, что существует такой оператор $\hat{\hat{T}}(\xi)$, для которого справедливо соотношение

$$\left[\hat{w}(\xi), \hat{\hat{T}}(\xi)\right] = 0. \tag{3.5}$$

Генератор остаточной симметрии представляет собой линейную комбинацию аддитивных интегралов движения, в отношении которых симметрия состояния равновесия нарушена. В рассматриваемом случае этот оператор имеет вид

$$\hat{\hat{T}}(\xi) \equiv b_\alpha\hat{\hat{S}}_\alpha + d_{\alpha\beta}\hat{\hat{Q}}_{\beta\alpha} + c\hat{\hat{N}}. \tag{3.6}$$

В силу его эрмитовости параметры $\xi \equiv b_\alpha, d_{\alpha\beta}, c$ — действительные величины. Матрица $d_{\alpha\beta}$ симметрична и бесследна: $d_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha}$, $d_{\alpha\alpha} = 0$. Пять ее независимых компонент параметризуем соотношением

$$d_{\alpha\beta} = d_1\left(m_\alpha m_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right) + d_2\left(n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right) \equiv d_1F^{(1)}_{\alpha\beta} + d_2F^{(2)}_{\alpha\beta}. \tag{3.7}$$

Здесь d_1, d_2 — модули этой матрицы. Векторы m_α, n_α, $l_\alpha = (\mathbf{m}\times\mathbf{n})_\alpha$ образуют ортонормированный репер. Величины $F^{(n)}_{\alpha\beta}$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$), определенные равенствами

$$F^{(1)}_{\alpha\beta} = \left(m_\alpha m_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right), \quad F^{(2)}_{\alpha\beta} = \left(n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right),$$
$$F^{(3)}_{\alpha\beta} = \left(m_\alpha n_\beta + m_\beta n_\alpha\right)/\sqrt{2}, \quad F^{(4)}_{\alpha\beta} = \left(m_\alpha l_\beta + m_\beta l_\alpha\right)/\sqrt{2},$$
$$F^{(5)}_{\alpha\beta} = \left(n_\alpha l_\beta + n_\beta l_\alpha\right)/\sqrt{2},$$

формируют полный набор пяти симметричных и бесследных матриц. Разложение вектора $\mathbf{b}$ по вышеуказанному реперу представим в виде

$$\mathbf{b} = b\left(\mathbf{m}\cos\theta\cos\phi + \mathbf{n}\cos\theta\sin\phi + \mathbf{l}\sin\theta\right). \tag{3.8}$$

Наряду с термодинамическими силами Y_a, параметры генератора остаточной симметрии (3.6) представляют собой дополнительные термодинамические величины, которые характеризуют спонтанную магнитную анизотропию вырожденного состояния равновесия. Условие остаточной симметрии (3.5) совместно с квантовой алгеброй (3.3) позволяют получить для параметра порядка линейные алгебраические уравнения, решения которых классифицируют вырожденные состояния равновесия в предположении его ненулевого равновесного значения в терминах параметров генератора остаточной симметрии. Допустимые значения коэффициентов генератора остаточной симметрии могут быть как непрерывными величинами (например, оси магнитной анизотропии), так и иметь дискретный характер. Последние величины трактуются как квантовые числа, или как квантовые функции, которые различают сверхтекучие (сверхпроводящие) состояния (например, инертные фазы в ^{3}He [33,34,39]).

Из равенства $i\,\mathrm{Sp}\left[\hat{\hat{w}}(\xi), \hat{\hat{T}}(\xi)\right]\hat{\hat{\Delta}}_\alpha(\mathbf{x}) = 0$, учитывая соотношения (3.3), (3.6)–(3.8), получим систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} D_{\alpha\beta}(\xi)\Delta_\beta(\mathbf{x}) = 0, \\ D_{\alpha\beta}(\xi) \equiv c\delta_{\alpha\beta} - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}b_\gamma + d_{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Условие существования нетривиального решения $\Delta_\alpha \neq 0$ этих уравнений приводит к равенству

$$\det\left|\hat{D}(\xi)\right| = c^3 + p_1 c + q_1 = 0, \tag{3.10}$$

которое накладывает ограничения на допустимые значения параметра c генератора ненарушенной симметрии. Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} &p_1 = -(2 + D_2)/2 < 0, \\ &q_1 = -\cos^2\theta\,(d_1\cos^2\phi + d_2\sin^2\phi) + \left(d_1 + d_2 + D_3\right)/3, \\ &D_2 \equiv \mathrm{tr}\,(\hat{d})^2 = 2(d_1^2 + d_2^2 - d_1 d_2)/3 > 0, \\ &D_3 \equiv \mathrm{tr}\,(\hat{d})^3 = \left(d_1 + d_2\right)\left(2d_1 - d_2\right)\left(d_1 - 2d_2\right)/9. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из уравнения (3.10) найдем три допустимых значения параметра c_k ($k = 1, 2, 3$) как функции скалярных инвариантов этого генератора:

$$\begin{gathered} c_1 = 2\sqrt[3]{R_1}\,\cos\left(\chi_1/3\right), \quad c_2 = 2\sqrt[3]{R_1}\,\cos\left(\chi_1 + 2\pi\right)/3, \\ c_3 = 2\sqrt[3]{R_1}\,\cos\left(\chi_1 + 4\pi\right)/3, \end{gathered} \tag{3.12}$$

где $R_1 \equiv \sqrt{-p_1^3/27}$ и $\cos(\chi_1) \equiv -q_1/2R_1$. Корни c_k уравнения (3.12) являются функциями полярного и азимутального углов (3.8), определяющих направление вектора $\mathbf{b}$, и зависят от модулей матрицы (3.7). Решения (3.12) приводят к трем типам генератора остаточной симметрии $\hat{\hat{T}}(\mathbf{b}, \hat{d}, c_k) = b_\alpha\hat{\hat{S}}_\alpha + d_{\alpha\beta}\hat{\hat{Q}}_{\beta\alpha} + c_k\hat{\hat{N}} \equiv \hat{\hat{T}}(k)$ и, следовательно, трем типам сверхтекучих состояний статистического равновесия в изучаемых физических системах.

4. Спинорный параметр порядка в состоянии равновесия

Явный вид спинорного параметра порядка для всех найденных значений c_k ищем в виде разложения по ортонормированному реперу $\mathbf{\Delta} = \sqrt{n_0}\left(A\mathbf{m} + B\mathbf{n} + C\mathbf{l}\right)$. Здесь величина $n_0 \equiv \mathbf{\Delta}\mathbf{\Delta}^*$ определяет плотность одночастичного конденсата и комплексные числа A, B, C связаны соотношением $AA^* + BB^* + CC^* = 1$. Получим их значения, используя уравнения (3.9) для ряда физически различных случаев параметров генератора остаточной симметрии.

Случай 1. $\mathbf{b} = \mathbf{l}$, $\hat{d} = 0$: состояние имеет одноосную анизотропию. Этот случай соответствует $SO(3)$ симметрии обменного взаимодействия, для которого квадрупольная матрица не является интегралом движения, поэтому не входит в генератор остаточной симметрии (3.6). Корни уравнения (3.10) и вид спинорного параметра порядка принимают вид

$$\begin{aligned} &c_1 = 0: && \mathbf{\Delta}_1 = \sqrt{n_0}\,\mathrm{e}^{i\chi}\mathbf{l}, \\ &c_{2,3} \equiv c_\pm = \pm 1: && \mathbf{\Delta}_\pm = \sqrt{n_0/2}\,\mathrm{e}^{i\chi}\left(\mathbf{m} \mp i\mathbf{n}\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Вид спинорного параметра порядка совпадает с ранее найденными его значениями в работах [17–20], которые получены на основе модельного вида свободной энергии в отсутствие внешнего поля. Решению c_1 соответствует состояние «polar» и решениям $c_\pm$ — состояние «ferro». Выбор произвольного направления оси анизотропии $\mathbf{b}$ (3.8) отвечает преобразованию поворота $\mathbf{\Delta}_\alpha \to \mathbf{\Delta}'_\alpha(\mathbf{b}) = a_{\alpha\beta}\mathbf{\Delta}_\beta(\mathbf{l})$, где $a_{\alpha\beta}$ — ортогональная матрица вращения.

Случай 2. $\mathbf{b} = 0$, $d_1 \neq 0$, $d_2 = 0$: анизотропия физического состояния одноосная и выбрана по оси $\mathbf{m}$. Этот случай, как и все последующие, где матрица $\hat{d} \neq 0$, отвечает $SU(3)$ симметрии обменного взаимодействия. Согласно (3.9) и (3.10), найдем

$$c_1 = -2d_1/3: \quad \boldsymbol{\Delta}_1 = \sqrt{n_0}\,\mathrm{e}^{i\chi}\mathbf{m},$$
$$c_{2,3} = d_1/3: \quad \boldsymbol{\Delta}_{2,3} = \sqrt{n_0}\left(B_{2,3}\mathbf{n} + C_{2,3}\mathbf{l}\right).$$

Здесь комплексные числа $B_{2,3}, C_{2,3}$ связаны соотношением $B_{2,3}B_{2,3}^* + C_{2,3}C_{2,3}^* = 1$ и имеют физический смысл дополнительных термодинамических параметров, которые характеризуют состояние равновесия. Их появление обусловливает вырождение состояния, отвечающего корням $c_{2,3}$ уравнения (3.10).

Случай 3. $\mathbf{b} = 0$, $\hat{d} = d_1\hat{F}^{(1)} + d_2\hat{F}^{(2)}$: анизотропия физического состояния двухосная. Для корней уравнения (3.10) и параметра порядка получены выражения

$$c_1 = (d_1 + d_2)/3: \qquad \boldsymbol{\Delta}_1 = \sqrt{n_0}\,\mathrm{e}^{i\chi}\mathbf{l},$$
$$c_\pm = c_{3,2} = -(d_1 + d_2)/6 \mp (d_1 - d_2)/2: \quad \begin{cases} \boldsymbol{\Delta}_+ = \sqrt{n_0}\,\mathrm{e}^{i\chi}\mathbf{m}, \quad \boldsymbol{\Delta}_- = \sqrt{n_0}\,\mathrm{e}^{i\chi}\mathbf{n}, & d_1 \neq d_2, \\ \boldsymbol{\Delta}_\pm = \sqrt{n_0}\left(A_\pm\mathbf{m} + B_\pm\mathbf{n}\right), & d_1 = d_2. \end{cases}$$

Комплексные числа $A_\pm, B_\pm$ связаны соотношением $A_\pm A_\pm^* + B_\pm B_\pm^* = 1$. Количество произвольных величин в выражении для параметра порядка зависит от ранга системы линейных уравнений (3.9). В случае, когда матрица $\hat{d}$ одноосная, ранг системы уравнений (3.9) понижается и получаем дополнительные термодинамические величины типа A, B, которые характеризуют состояние равновесия. В этом примере дополнительное вырождение состояний возникает при совпадении модулей матрицы $\hat{d}$.

Случай 4. $\mathbf{b} = \mathbf{m}$, $\hat{d} = d_1\hat{F}^{(1)}$: физическое состояние обладает одноосной анизотропией. Приведем явный вид величины c_k и параметра порядка:

$$c_1 = -2d_1/3: \quad \begin{cases} \boldsymbol{\Delta}_1 = \sqrt{n_0}\,\mathrm{e}^{i\chi}\mathbf{m}, & d_1^2 \neq 1 \\ \boldsymbol{\Delta}_1 = \sqrt{n_0}\left(A_1\mathbf{m} + C_1(-i\mathbf{n} + \mathbf{l})\right), & d_1^2 = 1 \end{cases} \quad A_1A_1^* + 2C_1C_1^* = 1;$$

$$c_\pm = d_1/3 \pm 1: \quad \begin{cases} \boldsymbol{\Delta}_\pm = \sqrt{n_0}\,\mathrm{e}^{i\chi}(\mathbf{n} \mp i\mathbf{l})/\sqrt{2}, & d_1 \neq \mp 1 \\ \boldsymbol{\Delta}_\pm = \sqrt{n_0}\left(A_\pm\mathbf{m} + C_\pm(\pm i\mathbf{n} + \mathbf{l})\right), & d_1 = \mp 1 \end{cases} \quad A_\pm A_\pm^* + 2C_\pm C_\pm^* = 1.$$

Случай 5. $\mathbf{b} = \mathbf{n}$, $\hat{d} = d_1\hat{F}^{(1)}$: физическое состояние обладает двухосной анизотропией. Получены следующие значения искомой величины c_k и параметра порядка:

$$c_1 = d_1/3: \qquad \boldsymbol{\Delta}_1 = \sqrt{n_0}\,\mathrm{e}^{i\chi}\mathbf{n},$$
$$c_\pm = -d_1/6 \pm \sqrt{d_1^2 + 4}/2: \quad \boldsymbol{\Delta}_\pm = \sqrt{n_0}\,\mathrm{e}^{i\chi}(\mathbf{m} \pm iP_\pm\mathbf{l})/\sqrt{1 + P_\pm^2}.$$

Здесь характер анизотропии в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$, определяется величиной $P_\pm \equiv \left(d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + 4}\right)/2$.

Случай 6. $\mathbf{b} = \mathbf{l}$, $\hat{d} = d_1\hat{F}^{(1)} + d_2\hat{F}^{(2)}$: физическое состояние обладает трехосной анизотропией. Собственные значения и выражения для параметра порядка:

$$c_1 = d_2/3 + d_1/3: \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\Delta}_1 = \sqrt{n_0}\,\mathrm{e}^{i\chi}\mathbf{l}, & d_1d_2 \neq 1, \\ \boldsymbol{\Delta}_1 = \sqrt{n_0}\left(A\mathbf{n} + B(i\mathbf{m}/d_1 + \mathbf{l})\right), & d_1d_2 = 1; \end{cases}$$
$$c_\pm = -(d_1 + d_2)/6 \pm \sqrt{(d_1 - d_2)^2 + 4}/2: \quad \boldsymbol{\Delta}_\pm = \sqrt{n_0}\,\mathrm{e}^{i\chi}(\mathbf{m} \pm iP_\pm\mathbf{n})/\sqrt{1 + P_\pm^2}.$$

Здесь величина $P_\pm \equiv \left(-d_1 + d_2 \mp \sqrt{(d_1 - d_2)^2 + 4}\right)/2$ определяет анизотропию в плоскости, ортогональной оси $\mathbf{l}$, и постоянные величины A, B удовлетворяют соотношению $AA^* + BB^*(1 + 1/d_1^2) = 1$.

Случай 7. $\mathbf{b} = \mathbf{m}\cos\theta\cos\phi + \mathbf{n}\cos\theta\sin\phi + \mathbf{l}\sin\theta$, $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$: это ситуация общего положения для параметров генератора остаточной симметрии. Допустимые значения параметра c_k представлены формулами (3.12), поэтому приведем только явный вид спинорного параметра порядка:

$$\mathbf{\Delta} = \sqrt{n_0}\left(P_1\mathbf{m} + P_2\mathbf{n} + P_3\mathbf{l}\right)/\left(P_1P_1^* + P_2P_2^* + P_3P_3^*\right)^{1/2},$$

где введены обозначения

$$P_1 \equiv -\cos\theta\left(\sin\theta\cos\phi + \frac{i}{9}\sin\phi\left(c_k + \frac{2}{3}d_2 - \frac{d_1}{3}\right)\right),$$

$$P_2 \equiv \cos\theta\left(-\sin\theta\sin\phi + \frac{i}{9}\cos\phi\left(c_k + \frac{2}{3}d_1 - \frac{d_2}{3}\right)\right), \qquad (4.2)$$

$$P_3 = \left[\left(c_k + \frac{d_1+d_2}{6}\right)^2 - \left(\left(d_1-d_2\right)^2 + 4\sin^2\theta\right)/4\right]/9.$$

Видно, что в общем случае спинорный параметр порядка существенно зависит от углов, определяющих направления анизотропии параметров генератора остаточной симметрии $\mathbf{b}$ и $\hat{d}$. На рис. 1 построена величина $(P_1P_1^* + P_2P_2^* + P_3^2)^{1/2}$, которая характеризует анизотропию спинорного параметра порядка в спиновом пространстве для всех трех значений параметра c_k.

Поверхности, изображенные на рис. 1(а)–(в), отвечают допустимым значениям c_1, c_2, c_3. Для определенности и простоты, выбраны значения $d_1 = 1$, $d_2 = 0$. Варьирование модулей d_1, d_2 не приводит к качественным изменениям этих рисунков.

5. Сверхтекучие состояния равновесия со спинорным конденсатом

Для установления характера анизотропии магнитных степеней свободы, связанных с законами сохранения, используем модель с выделенным конденсатом [36], справедливую для разреженных бозе-систем. Если состояние равновесия однородное, то удобно использовать разложение полевого оператора по плоским волнам $\hat{\hat{\psi}}_\alpha(\mathbf{x}) = V^{-1/2}\sum_{\mathbf{p}}\hat{\hat{a}}_{\mathbf{p},\alpha}e^{i\mathbf{px}}$, здесь V — объем системы и $\hat{\hat{a}}_{\mathbf{p},\alpha}$ — оператор уничтожения бозе-частицы с волновым вектором $\mathbf{p}$ и магнитным квантовым числом α. Согласно используемой модели, представим полевой оператор $\hat{\hat{\psi}}_\alpha(\mathbf{x})$ в виде

$$\hat{\hat{\psi}}_\alpha(\mathbf{x}) = \psi_\alpha + V^{-1/2}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\hat{\hat{a}}_{\mathbf{p},\alpha}e^{i\mathbf{px}}. \qquad (5.1)$$

Квазисреднее $\psi_\alpha \equiv \left\langle\hat{\hat{\psi}}_\alpha(\mathbf{x})\right\rangle = V^{-1/2}\left\langle\hat{\hat{a}}_{0\alpha}\right\rangle \sim 1$, конечно, связано с наличием макроскопического конденсата атомов с импульсом $\mathbf{p} = 0$ и проекцией спина α. Физически это означает возможность приближенной замены вторично квантованного оператора на его классическую часть, которая описывает конденсат: $\hat{\hat{a}}_{0\alpha} \to V^{1/2}\left\langle\hat{\hat{\psi}}_\alpha\right\rangle$ и $\hat{\hat{a}}^+_{0\alpha} \to V^{1/2}\left\langle\hat{\hat{\psi}}^+_\alpha\right\rangle$. В главном приближении, в соответствии с формулами (2.4), равновесные значения плотностей аддитивных интегралов движения приближенно представимы в терминах волновой функции:

$$n \approx \psi^*_\alpha\psi_\alpha, \quad s_\alpha \approx -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\psi^*_\beta\psi_\gamma,$$
$$q_{\alpha\beta} \approx \left(\psi^*_\alpha\psi_\beta + \psi^*_\beta\psi_\alpha - 2\delta_{\alpha\beta}\psi^*_\gamma\psi_\gamma/3\right)/2. \qquad (5.2)$$

Эти формулы с учетом найденного вида спинорного параметра порядка позволяют установить структуру магнитных плотностей аддитивных интегралов движения в трех сверхтекучих состояниях равновесия. Проанализируем их явный вид для некоторых частных случаев значений параметров генератора ненарушенной симметрии и сравним их с известными результатами.

Случай 1. $\mathbf{b} = b\mathbf{l}$, $\hat{d} = 0$. Приведем три допустимых значения параметра остаточной симметрии c_k, а также вид плотностей магнитных интегралов движения:

$$c_1 = 0, \quad \mathbf{s}_1 = 0, \quad \hat{q}_1 = -n_0(\hat{F}^{(1)} + \hat{F}^{(2)});$$
$$c_\pm = \pm b, \quad \mathbf{s}_\pm = \mp n_0\mathbf{l}, \quad \hat{q}_\pm = n_0(\hat{F}^{(1)} + \hat{F}^{(2)})/2.$$

Для параметра c_1 получаем квадрупольное упорядочение и ферро-квадрупольное — для параметров $c_\pm$.

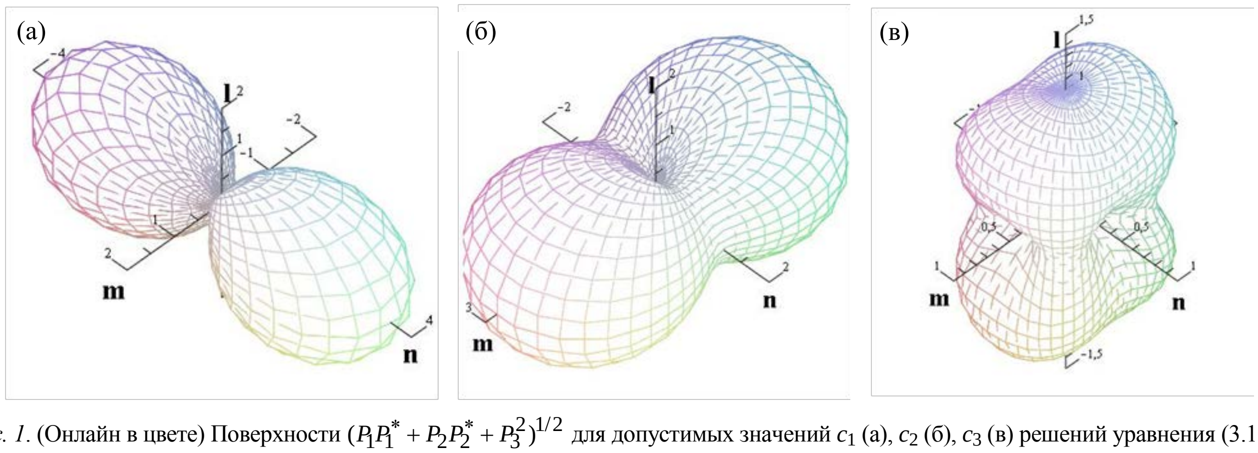

Рис. 1. (Онлайн в цвете) Поверхности $(P_1P_1^* + P_2P_2^* + P_3^2)^{1/2}$ для допустимых значений c_1 (а), c_2 (б), c_3 (в) решений уравнения (3.10), построенные при условии $d_1 = 1$, $d_2 = 0$ (4.2).

1a. $\mathbf{b} = \mathbf{m}\cos\theta\cos\phi + \mathbf{n}\cos\theta\sin\phi + \mathbf{l}\sin\theta$, $\hat{d} = 0$: направление вектора $\mathbf{b}$ произвольное. Приведем три допустимых значения параметра остаточной симметрии c_k и вид плотностей магнитных интегралов движения:

$$c_1 = 0: \quad \mathbf{s}_1 = 0, \qquad q_{1,\alpha\beta} = n_0(b_\alpha b_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3);$$
$$c_\pm = \pm 1: \quad \mathbf{s}_\pm = \mp n_0\mathbf{b}, \quad q_{\pm,\alpha\beta} = -n_0(b_\alpha b_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3).$$

Как и в предыдущем случае, имеем два типа магнитного упорядочения: квадрупольное и ферро-квадрупольное. В ферро-квадрупольном случае квадрупольная матрица имеет одноосную структуру, а ее ось совпадает с направлением вектора спина.

Случай 2. $\mathbf{b} = 0, d_1 \neq 0,\ d_2 = 0$:

$$c_1 = -2d_1/3: \quad \mathbf{s}_1 = 0, \qquad \hat{q}_1 = n_0\hat{F}^{(1)};$$
$$c_{2,3} = d_1/3: \quad \mathbf{s}_{2,3} = in_0(BC^* - B^*C)\mathbf{m}, \quad \hat{q}_{2,3} = n_0\left(-2CC^*\hat{F}^{(1)} + 2(BB^* - 2CC^*)\hat{F}^{(2)} + (BC^* + B^*C)\hat{F}^{(3)}\right).$$

Здесь величины B, C связаны соотношением $BB^* + CC^* = 1$.

Случай 3. $\mathbf{b} = 0,\ \hat{d} = d_1\hat{F}^{(1)} + d_2\hat{F}^{(2)}$:

$$c_\pm = -(d_1 + d_2)/6 \mp (d_1 - d_2)/2:$$
$$\begin{cases} \mathbf{s}_\pm = 0,\ \hat{q}_\pm = n_0\hat{F}^{(1)}, & d_1 \neq d_2 \\ \mathbf{s}_\pm = in_0(AB^* - A^*B)\mathbf{l},\ \hat{q}_\pm = n_0\left(2AA^*\hat{F}^{(1)} + 2BB^*\hat{F}^{(2)} + (AB^* + A^*B)\hat{F}^{(3)}\right), & d_1 = d_2. \end{cases}$$

Величины A, B связаны соотношением $AA^* + BB^* = 1$.

$$c_3 = (d_1 + d_2)/3: \ \mathbf{s}_3 = 0,\ \hat{q}_3 = -n_0\left(\hat{F}_1 + \hat{F}_2\right).$$

Случай 4. $\mathbf{b} = \mathbf{m},\ \hat{d} = d_1\hat{F}^{(1)}$. Собственные значения и выражения для плотностей спина и квадрупольной матрицы имеют вид

$$c_1 = -2d_1/3:$$
$$\text{при } d_1^2 \neq 1 \qquad \mathbf{s}_1 = 0,\ \hat{q}_1 = n_0\hat{F}^{(1)};$$
$$\text{при } d_1^2 = 1 \qquad \mathbf{s}_1 = n_0\left(2d_1C_1C_1^*\mathbf{m} + i(A_1^*C_1 - C_1^*A_1)\mathbf{n} - d_1(A_1^*C_1 + C_1^*A_1)\mathbf{l}\right),$$
$$\hat{q}_1 = n_0\left(2(A_1A_1^* - C_1C_1^*)\hat{F}^{(1)} + (A_1C_1^* + A_1^*C_1)\hat{F}^{(3)}\right).$$

Постоянные A, C связаны соотношением $A_1A_1^* + 2C_1C_1^* = 1$;

$$c_\pm = d_1/3 \pm 1:$$
$$\text{при } b_1^2 \neq 1: \qquad \mathbf{s}_\pm = \pm n_0\mathbf{m}, \quad \hat{q}_\pm = -n_0\hat{F}^{(1)}.$$

При $b_1^2 = 1$ вид плотностей магнитных величин совпадает с решением для $c_1 = -2d_1/3$, если положить $d_1 = \mp 1$.

Случай 5. $\mathbf{b} = \mathbf{n},\ \hat{d} = d_1\hat{F}^{(1)}$. Собственные значения и выражения для плотностей спина и квадрупольной матрицы имеют вид

$$c_1 = d_1/3: \qquad \mathbf{s}_1 = 0, \qquad \hat{q}_1 = n_0\hat{F}^{(2)};$$
$$c_\pm = d_1/3 \pm 1: \quad \mathbf{s}_\pm = \pm\frac{n_0\mathbf{m}P_\pm}{1 + P_\pm^2} \quad \hat{q}_\pm = \frac{2n_0}{1 + P_\pm^2}\left((1 - P_\pm^2)\hat{F}^{(1)} - P_\pm^2\hat{F}^{(2)}\right).$$

При $b_1^2 = 1$ вид плотностей магнитных величин совпадает с решением для $c_1 = -2d_1/3$, если положить $d_1 = \mp 1$.

Случай 6. $\mathbf{b}=\mathbf{l}$, $\hat{d}=d_1\hat{F}^{(1)}+d_2\hat{F}^{(2)}$. Собственные значения и выражения для плотностей спина и квадрупольной матрицы:

$$c_1=-2d_1/3+d_2/3:$$

$$\mathbf{s}_1=0,\ \hat{q}_1=-n_0(\hat{F}_1+\hat{F}_2), \qquad d_1d_2\neq 1,$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{s}_1=n_0\left(i(AB^*-A^*B)\mathbf{m}+2BB^*\mathbf{n}/d_1-(AB^*+A^*B)\mathbf{l}/d_1\right),\\ &\hat{q}_1=n_0\left(2BB^*(1/d_1-1)\hat{F}^{(1)}+2(AA^*-BB^*)\hat{F}^{(2)}+i(A^*B-AB^*)\hat{F}^{(3)}/d_1+(AB^*+A^*B)\hat{F}^{(5)}\right)\end{aligned}\right\},\quad d_1d_2=1.$$

Постоянные A, B связаны соотношением $AA^*+BB^*(1+1/d_1^2)=1$;

$$c_\pm=-d_1/6-d_2/6\pm\sqrt{(d_1-d_2)^2+4}/2:\ \mathbf{s}_\pm=\frac{2n_0P_\pm}{1+P_\pm^2}\mathbf{l};\quad \hat{q}_\pm=\frac{n_0}{1+P_\pm^2}\left(2\hat{F}^{(1)}+2P_\pm^2\hat{F}^{(2)}\right).$$

Случай 7. $\mathbf{b}=\mathbf{m}\cos\theta\cos\phi+\mathbf{n}\cos\theta\sin\phi+\mathbf{l}\sin\theta$, $d_1\neq 0, d_2\neq 0$. Для выражения плотности спина и квадрупольной матрицы используем значения параметра c_k, которые представлены формулами (3.12):

$$\mathbf{s}=\frac{2n_0}{P_1P_1^*+P_2P_2^*+P_3P_3^*}\left\{-\operatorname{Im}(P_2)P_3\mathbf{m}+\operatorname{Im}(P_1)P_3\mathbf{n}+\left[\operatorname{Re}(P_1)\operatorname{Im}(P_2)-\operatorname{Re}(P_2)\operatorname{Im}(P_1)\right]\mathbf{l}\right\},$$

$$\hat{q}_k=\left\{\left(P_1P_1^*-P_3^2\right)\hat{F}^{(1)}+\left(P_2P_2^*-P_3^2\right)\hat{F}^{(2)}+\left[\operatorname{Re}(P_1)\operatorname{Re}(P_2)-\operatorname{Im}(P_2)\operatorname{Im}(P_1)\right]\hat{F}^{(3)}+\operatorname{Re}(P_1)P_3\hat{F}^{(4)}+\operatorname{Re}(P_2)P_3\hat{F}^{(5)}\right\}\times$$

$$\times\frac{2n_0}{P_1P_1^*+P_2P_2^*+P_3^2}.$$

Здесь параметры P_1, P_2, P_3 определены формулами (4.2). Вектор спина и квадрупольная матрица зависят от углов, которые характеризуют направления анизотропии параметров генератора остаточной симметрии $\mathbf{b}$ и $\hat{d}$. Для графической иллюстрации характера анизотропии спинового вектора построим вектор

$$\mathbf{s}_k(P_{1,k}P_{1,k}^*+P_{2,k}P_{2,k}^*+P_{3,k}P_{3,k}^*)/2n_0$$

в сферической системе координат.

Поверхности, изображенные на рис. 2(а)–(в), отвечают собственным значениям c_1, c_2, c_3 (3.12) соответственно. Для определенности, выбраны значения $d_1=1, d_2=0$.

Заключение

В работе проведен анализ сверхтекучих состояний равновесия в спин s = 1 системах в условиях нарушенной фазовой и магнитной симметрии. Представление об остаточной симметрии состояния равновесия и соответствующее в статистической механике введение генератора этой симметрии позволили сформулировать уравнение классификации для спинорного параметра порядка. Найдены его частные решения при некоторых значениях параметров остаточной симметрии и получено аналитическое решение спинорного параметра порядка в общем случае. В случае $SO(3)$ обменной симметрии гамильтониана наши данные совпали с ранее известными результатами других авторов. Появление

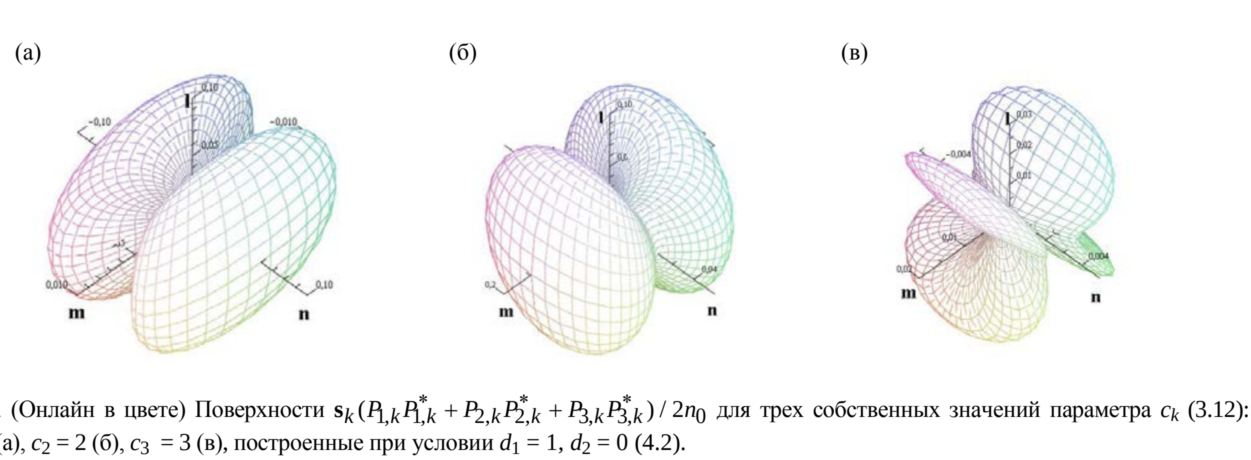

Рис. 2. (Онлайн в цвете) Поверхности $\mathbf{s}_k(P_{1,k}P_{1,k}^*+P_{2,k}P_{2,k}^*+P_{3,k}P_{3,k}^*)/2n_0$ для трех собственных значений параметра c_k (3.12): c_1 = 1 (а), c_2 = 2 (б), c_3 = 3 (в), построенные при условии d_1 = 1, d_2 = 0 (4.2).

матричного параметра в генераторе остаточной симметрии ведет к новым состояниям равновесия, которые могут реализоваться для $SU(3)$ симметричного обменного взаимодействия. При этом в таких состояниях возможна трехосная остаточная анизотропия симметрии вырожденного состояния и появление магнитной анизотропии плотности конденсата. Макроскопические магнитные свойства в изучаемых физических системах характеризуются плотностями спина и квадрупольной матрицы, которые найдены для всех фазовых состояний в рамках модели с выделенным конденсатом.

В предложенном подходе возможно также рассмотрение других сверхтекучих состояний с иными значениями спина структурного элемента среды и другой унитарной симметрией обменного взаимодействия. Кроме того, в принципе, возможна реализация и других сверхтекучих состояний в спин $s = 1$ системах, параметр порядка которых имеет тензорный вид или учитывает жидкокристаллические степени свободы.

1. M. Blume and Y.Y. Hsieh, *J. Appl. Phys.* **40**, 1249 (1969).
2. А.Ф. Андреев, И.А. Грищук, *ЖЭТФ* **87**, 467 (1984).
3. N. Papanicolaou, *Nuclear Physics B* **305**, 367 (1988).
4. A.V. Chubukov, *J. Phys.: Condens. Matter* **2**, 1593 (1990); *Phys. Rev. B* **43**, 3337 (1991).
5. G. Fath and J. Solyom, *Phys. Rev. B* **51**, 3620 (1995).
6. M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen De, and U. Sen, *Adv. Phys*. **56**, 243 (2007).
7. I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys*. **80**, 885 (2008).
8. A. Imambekov, M. Lukin, and E. Demler, *Phys. Rev. A* **68**, 063602 (2003).
9. B.A. Ivanov and A.K. Kolezhuk, *Phys. Rev. B* **68**, 052401 (2003).
10. S.K. Yip, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 250402 (2007).
11. G. De Chiara, M. Lewenstein, and A. Sanpera, *Phys. Rev. B* **84**, 054451 (2011).
12. K. Rodrigues, A. Arguelles, A.K. Kolezhuk, L. Santos, and T. Vekua, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 105302 (2011).
13. V. Bar'yakhtar, V. Butrim, A. Kolezhuk, and B. Ivanov, *Phys. Rev. B* **87**, 224407 (2013).
14. M.Y. Kovalevsky and A.V. Glushchenko, *Ann. Phys.* **349**, 55 (2014).
15. Yu.A. Fridman, O.A. Kosmachev, and Ph.N. Klevets, *J. Magn. Magn. Mater* **325**, 125 (2013).
16. T. Zibold, V. Corre, C. Frapolli, A. Invernizzi, J. Dalibard, and F. Gerbier, *Phys. Rev. A* **93**, 023614 (2016).
17. Tin-Lun Ho, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 742 (1998).
18. T. Ohmi and T. Machida, *J. Phys. Soc. Jpn*. **67**, 1822 (1998).
19. D.M. Stamper-Kurn and M. Ueda, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 1191 (2013).
20. R. Barnett, A. Turner, and E. Demler, *Phys. Rev. Lett*. **97**, 180412 (2006).
21. H. Makela and K.A. Suominen, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 190408 (2007).
22. S.K. Yip, *Phys. Rev. A* **75**, 023625 (2007).
23. L. Michel, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 617 (1980).
24. V.P. Mineev, *Sov. Sci. Rev. Sec. A* **2**, 173 (1980).
25. Y. Kawaguchi and M. Ueda, *Phys. Rep.* **520**, 253 (2012).
26. M. Snoek and Fei Zhou, *Ann. Phys.* **308**, 692 (2003);
27. M. Snoek, Fei Zhou, J. Wiemer, and I. Affleck, *Phys. Rev. B* **70**, 184434 (2004).
28. C.M. Puetter, M.J. Lawler, and H.Y. Kee, *Phys. Rev. B* **78**, 165121 (2008).
29. Y.Q. Li, S.J. Gu, and Z.J. Ying, *J. Phys. A* **36**, 2821 (2003).
30. T. Schafer, *Phys. Rev. D* **62**, 094007 (2000).
31. A. Schmitt, *Phys. Rev. D* **71**, 054016 (2005).
32. Н. Боголюбов, Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, Москва (1984).
33. Н.Н. Боголюбов (мл.), М.Ю. Ковалевский, А.М. Курбатов, С.В. Пелетминский, А.Н. Тарасов, *УФН* **159**, 585 (1989).
34. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, *Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов*, Физматлит, Москва (2006).
35. А.П. Ивашин, М.Ю. Ковалевский, Н.Н. Чеканова, *ФНТ* **30**, 920 (2004) [*Low Temp. Phys*. **30**, 691 (2004)].
36. Н.Н. Боголюбов, *Изв. АН СССР, сер.физ*. **11**, 77 (1947).
37. А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский. Ю.В. Слюсаренко, *ЖЭТФ* **113**, 918 (1998).
38. D. Vollhardt and P. Wolfle, *The Superfluid Phases of* ^{3}He, World Scientific, Singapore (1990).

Spinor order parameter and equilibrium states of spin $s = 1$ Bose systems

A.V. Glushchenko and M.Yu. Kovalevsky

The problem of classification of degenerate equilibrium states in spin $s = 1$ systems in which the phase and magnetic symmetries are simultaneously broken is considered. An assumption about residual symmetry of degenerate equilibrium states and the transformation properties of the spinor order operator at transformations generated by additive integrals of motion, lead to equations that classify its equilibrium values. Anisotropic structure of equilibrium values of order parameter is presented in terms of the parameters of the residual symmetry generator. Based on the model with separated condensate, the structure of densities of magnetic additive integrals of motion in the equilibrium state has been found.

PACS: 03.75.Mn Multicomponent condensates; spinor condensates;
03.75.Hh Static properties of condensates; thermodynamical, statistical, and structural properties;
11.30.Qc Spontaneous and radiative symmetry breaking;
75.10.–b General theory and models of magnetic ordering.

Keywords: spin, symmetry, quasiaverages, quadrupole matrix, spinor order parameter.