

Кинетика низкотемпературного газа водородоподобных атомов во внешнем электромагнитном поле

А.Г. Загородний

Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, ул. Метрологическая, 14-б, г. Киев, 03143, Украина

Ю.В. Слюсаренко, С.Н. Шульга

*Институт теоретической физики им. А.И. Ахиезера ННЦ ХФТИ
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина*

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков 61077, Украина
E-mail: slusarenko@kipt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 7 мая 2018 г., опубликована онлайн 28 августа 2018 г.

Развит микроскопический подход к последовательному построению кинетической теории низкотемпературных разреженных газов водородоподобных атомов во внешнем электромагнитном поле. Подход базируется на формулировках метода вторичного квантования при наличии связанных состояний частиц. Предполагается, что связанное состояние (например, водородоподобный атом щелочного металла) формируется двумя заряженными фермионами различных сортов — валентным электроном и остовом. В основу вывода кинетических уравнений положен метод сокращенного описания релаксационных процессов. В рамках развитого подхода получена система кинетических уравнений для вигнеровских функций распределения свободных фермионов обоих сортов и их связанных состояний — водородоподобных атомов с учетом воздействия на систему внешнего и самосогласованного (среднего) полей. Полученные уравнения движения для вигнеровских функций распределения должны служить основой для анализа неравновесных эффектов и явлений, связанных с воздействием внешнего электромагнитного поля на низкотемпературные газы щелочных металлов.

Ключевые слова: кинетическая теория, низкотемпературные газы, пары щелочных металлов, водородоподобная плазма, внешнее электромагнитное поле, вигнеровские функции распределения, кинетические уравнения.

1. Введение

Первый всплеск интереса к тематике настоящих исследований возник во второй половине прошлого столетия, когда установилась классификация плазмы по ее характеристикам и свойствам, было достигнуто понимание основных свойств квантовой плазмы [1–5] и слабоионизованных газов (см., например, [6,7]). Отметим, что количество публикаций по физике плазмы, включая монографии и учебники, настолько огромно, что мы приводим здесь только несколько ссылок, отмечающих (с учетом имеющихся в этих книгах ссылок) определенную хронологию исследований.

Возобновление интереса к исследованию кинетических процессов в квантовых газах обязано интенсивным исследованиям систем с бозе-эйнштейновским конден-

сатом (БЭК) [8,9]. В самом деле, БЭК представляет собой яркий пример проявления квантово-механической природы вещества на макроуровне. Кроме того, как известно, явление БЭК впервые было реализовано в парах щелочных металлов при температурах порядка сотен нанокельвинов (квантовые газы!) [10,11]. Наиболее же весомым аргументом в пользу изучения кинетики слабоионизованных или возбужденных газов являются уникальные эффекты взаимодействия таких систем с электромагнитными полями и, прежде всего, явление сильного замедления и даже «остановки» света в газах с БЭК. Возможность экспериментального наблюдения такого рода явлений была продемонстрирована в [12,13]. В работах [14–16] для последовательного теоретического описания взаимодействия электромагнитных волн с газами при наличии БЭК был предложен микро-

скопический подход, основанный на новой формулировке метода вторичного квантования при наличии связанных состояний частиц [17]. Этот метод позволил, в частности, обосновать принципиальную возможность наблюдения сильного замедления света в ультрахолодных разреженных бозе-газах с БЭК без использования искусственно стимулированной прозрачности среды вблизи резонансов (см. в этой связи [13]). Кроме того, в рамках этого метода были предсказаны и другие интересные эффекты, связанные с откликом ультрахолодных газов с БЭК на возбуждение электромагнитным полем. Была проиллюстрирована возможность замедления микроволн в таких системах до значений групповой скорости порядка 0.01 см/с [18], предсказана возможность управления групповой скоростью света при помощи внешнего магнитного поля [19], возможность фильтрации подобными системами электромагнитных сигналов [20] и даже «курьезная» ситуация ускорения заряженных частиц в ультрахолодных газах с БЭК [21]. Подчеркнем, что в перечисленных случаях системы многих тождественных частиц находятся при сверхнизких температурах, что является при современных экспериментальных возможностях необходимым условием реализации атомарного или молекулярного БЭК. Поскольку в этих условиях плотности заряженных компонентов квантовой плазмы экспоненциально малы (по температуре, см. в этой связи [22]), то исследуемые системы можно считать слабовозбужденными ультрахолодными газами. Иными словами, вкладом заряженных компонентов квантовой плазмы в перечисленные выше эффекты можно пренебречь вовсе или учесть их в теории возмущений.

Однако такая ситуация не может быть типичной для любых систем с БЭК. Относительно недавно было заявлено о наблюдении явления БЭК фотонов в условиях реального эксперимента в специальном красителе, причем при комнатной температуре [23,24]. Вскоре появился ряд теоретических работ, посвященных описанию такого явления (см., например, [25–29]), в некоторых из них предсказывалась возможность реализации БЭК фотонов и в возбужденных газах, и даже в квантовой плазме [27–29]. В последних упомянутых случаях кинетические процессы в формировании БЭК фотонов играют исключительно важную роль [23–30]. В частности, в отмеченных системах они формируют эффективную массу фотона («массу покоя») и ответственны за термализацию фотонов в веществе, что позволяет добиваться понижения температуры фотонной подсистемы и, как следствие, достижения в ней состояния с БЭК. Отметим, что в условиях реального эксперимента эффективная масса фотона может формироваться и за счет установления в системе стоячей волны вдоль какого-либо направления из-за зеркал, не позволяющих фотонам покидать систему [23,24]. Кроме того, в процессе экспериментальной реализации режима с БЭК фотонов в

среде необходима возможность увеличения плотности фотонов в ней. Такое увеличение достигается дополнительной накачкой фотонов в среду внешним электромагнитным полем (лазером) [23,24].

Таким образом, при описании явлений и эффектов, связанных с формированием БЭК фотонов в возбужденных газах и слабоионизованной плазме, на передний план выходит задача о построении кинетической теории таких систем, т.е. о построении связанной системы кинетических уравнений для всех возможных компонентов системы, включая излучение (фотоны). Такая теория должна быть микроскопической, т.е. построенной на первых принципах квантовой статистики, и учитывать возможность влияния на систему внешнего электромагнитного поля. Отметим также, что развитый и использованный в работах [14–22] микроскопический подход к описанию эффектов, связанных с формированием БЭК фотонов в возбужденных газах и слабоионизованной плазме, не годится. Используемая в этих работах теория становится непригодной в области малых частот и волновых векторов и требует существенной модификации. Необходимая модификация, в свою очередь, требует привлечения методов кинетической теории с учетом квантовой природы вещества [31]. Последнее обстоятельство возвращает нас вновь к задаче построения кинетической теории таких систем исходя из первых принципов.

Здесь необходимо отметить, что построению кинетической теории частично ионизованной плазмы в рамках квантово-механической теории посвящен ряд глав монографии [32]. В ней подход к выводу кинетических уравнений для структурных единиц системы состоит из двух этапов. Вначале строится кинетическое уравнение для функции распределения пар заряженных частиц. Затем, после анализа роли флуктуаций различных характеристик частиц и полей, вводится условие ослабления корреляций при переходе частиц из связанных состояний в свободные. Это позволяет в результате применения ряда приближений (вообще говоря, слабо контролируемых) перейти от одного уравнения для функции распределения пар заряженных частиц к системе трех кинетических уравнений для функций распределения электронов, ионов и атомов. На основе развитых подходов появлялась возможность решить ряд задач, например, построить статистическую теорию тормозного излучения в плазменно-молекулярных системах (см. в этой связи [33]). Однако в силу упомянутых слабо контролируемых приближений, используемых в [32], вновь возникает вопрос о построении кинетической теории частично ионизованной плазмы в рамках первых принципов квантовой статистики.

В настоящей работе необходимый микроскопический подход к построению кинетической теории слабо-возбужденных газов или слабоионизованной плазмы во внешнем электромагнитном поле предлагается постро-

ить на основе метода сокращенного описания релаксационных процессов в многочастичных системах. Такая задача в случае отсутствия воздействия на указанные системы внешнего электромагнитного поля была решена нами в [34]. Метод сокращенного описания неравновесных процессов для классических (не квантовых) систем многих частиц был предложен Н.Н. Боголюбовым [35]. На случай квантовой кинетической теории систем многих тождественных частиц этот метод был обобщен С.В. Пелетминским [31]. Этот метод доказал свою эффективность в описании необратимых процессов в системах со спонтанно нарушенной симметрией (твердое тело, магнетики, сверхтекучие и сверхпроводящие системы). Он продемонстрировал свою перспективность при изучении особенностей релаксационных процессов в системах с длинными неравновесными флуктуациями [36], системах нейтронов, взаимодействующих с гидродинамическими средами [37], и даже прототипах активных сред [38]. В [31] изложена также общая методика применения данного метода к построению кинетических уравнений для квантовых систем под воздействием внешних полей, в том числе электромагнитного (в случае заряженных систем). По этой причине для достижения целей, поставленных в настоящей статье, нам будут полезны именно формулировки метода сокращенного описания, изложенные в [31], особенно учитывая заведомо квантовую природу изучаемых объектов.

Метод сокращенного описания эффективен, когда гамильтониан системы можно разбить на два слагаемых \hat{H}_0 и \hat{V} , $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, где \hat{H}_0 включает в себя основные взаимодействия, а \hat{V} описывает относительно слабые взаимодействия и может содержать взаимодействие с внешним электромагнитным полем [31].

2. Кинетические уравнения для газа бозонов и фермионов во втором порядке теории возмущений по слабому взаимодействию

Подходы метода сокращенного описания в формулировках [31] основаны на гипотезе, что если рассматривать эволюцию системы с «усеченным» или неполным гамильтонианом \hat{H}_0 (как уже отмечалось, этот гамильтониан включает в себя основные взаимодействия), то по прошествии достаточно большого времени ее статистический оператор $\rho(t)$ при достаточно больших временах $t \gg \tau_0$ (где τ_0 — так называемое время хаотизации) будет иметь некоторый универсальный вид. Универсальное выражение для статистического оператора в этом случае характеризуется некоторым набором операторов $\hat{\gamma}_a$, которые определяются структурой гамильтониана \hat{H}_0 и свойствами его симметрии [31]. Последнее утверждение может быть выражено соотношением

$$e^{-i\hat{H}_0 t} \rho e^{i\hat{H}_0 t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \rho^{(0)} \left(e^{iat} \text{Spr} \hat{\gamma}_a \right), \quad (1)$$

где ρ — начальное значение статистического оператора системы, статистический оператор $\rho^{(0)}$ определяется формулой

$$\rho^{(0)}(\gamma) = \exp \{ \Omega(\gamma) - \hat{\gamma}_a Y_a(\gamma) \}, \quad (2)$$

в которой термодинамический потенциал $\Omega(\gamma)$ и термодинамические силы $Y_a(\gamma)$ находятся из уравнений

$$\text{Spr} \rho^{(0)} = 1, \quad \text{Spr} \rho^{(0)} \hat{\gamma}_a = \gamma_a. \quad (3)$$

Величины γ_a , операторы которых присутствуют в (1)–(3) и представляют собой параметры сокращенного описания системы, и уравнения движения для которых будут уравнениями эволюции системы при временах $t \gg \tau_0$. Эти уравнения должны быть получены исходя из уравнения Лиувилля для статистического оператора. Индекс «а» нумерует весь набор параметров сокращенного описания γ_a . Операторы $\hat{\gamma}_a$ зависят от свойств симметрии гамильтониана \hat{H}_0 , что нашло свое отражение в (1), где присутствует матрица $\|a\|$, определяющаяся структурой и симметрией гамильтониана \hat{H}_0 :

$$[\hat{H}_0, \hat{\gamma}_a] = a_{ab} \hat{\gamma}_b. \quad (4)$$

В формулах (2), (4) по повторяющимся индексам «а», «b» подразумевается суммирование. Отметим, что нахождение совокупности операторов $\hat{\gamma}_a$ для известного гамильтониана \hat{H}_0 может представлять собой достаточно сложную задачу. В общих формулировках метода сокращенного описания она считается решенной, и главное внимание уделяется процедуре вывода уравнений эволюции для этих параметров сокращенного описания.

В [31] показано, что для квантовых газов с гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (5)$$

где операторы \hat{H}_0 и \hat{V} определяются выражениями

$$\hat{H}_0 = \sum_i \varepsilon_i \hat{a}_i^+ \hat{a}_i, \quad \hat{V} = \frac{1}{4V} \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Phi(i_1 i_2; i_3 i_4) \hat{a}_{i_1}^+ \hat{a}_{i_2}^+ \hat{a}_{i_3} \hat{a}_{i_4} \quad (6)$$

в качестве параметров сокращенного описания γ_a , упомянутых выше, может фигурировать одночастичная матрица плотности $f_{i,i'}$, которой соответствуют операторы

$$\hat{f}_{i,i'} = \hat{a}_{i'}^+ \hat{a}_i, \quad (7)$$

где \hat{a}_i^+ , \hat{a}_i — операторы рождения и уничтожения частиц соответственно, а индекс «i» нумерует совокупность квантовых чисел, характеризующих состояние частицы (например, импульс \mathbf{p} , проекция спина s). Отметим также, что величина ε_i в (6) представляет собой

энергию свободной частицы (или квазичастицы), $\Phi(i_1 i_2; i_3 i_4)$ характеризует взаимодействие между структурными единицами системы, а буквой \mathcal{V} в знаменателе второй из формул (6) обозначен объем системы.

Для одночастичной матрицы плотности $f_{i,i'}$ как параметра сокращенного описания в [31] получены уравнения эволюции во втором порядке теории возмущений по слабому взаимодействию \hat{V} (см. (5), (6)):

$$\begin{aligned} \dot{f}_{i,i'} &= \mathcal{L}_{i,i'}^{(0)}(f) + L_{i,i'}^{(1)}(f) + L_{i,i'}^{(2)}(f), \\ \mathcal{L}_{i,i'}^{(0)}(f) &= i \text{Sp} \rho^{(0)}(f) [\mathcal{H}_0, \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i], \\ L_{i,i'}^{(1)}(f) &= i \text{Sp} \rho^{(0)}(f) [\hat{V}, \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i], \\ L_{i,i'}^{(2)}(f) &= -i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} \text{Sp} \rho^{(0)}(f) \times \\ &\times \left[\hat{V}(\tau), [\hat{V}, \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i] + i \sum_{i_1 i_1'} \hat{a}_{i_1}^\dagger \hat{a}_{i_1} \frac{\partial L_a^{(1)}(\gamma)}{\partial f_{i_1, i_1'}} \right], \\ \hat{V}(\tau) &\equiv e^{i\mathcal{H}_0\tau} \hat{V} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}, \end{aligned} \quad (8)$$

причем статистический оператор $\rho^{(0)}(f)$ (см. также (1), (2)) дается выражением

$$\rho^{(0)}(f) = \exp \left\{ \Omega(f) - \sum_{i,i'} Y_{i,i'}(f) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right\}, \quad (9)$$

в котором $\Omega(f)$ и $Y_{i,i'}(f)$ как функционалы одночастичной матрицы плотности в соответствии с (3) должны находиться из уравнений

$$\text{Sp} \rho^{(0)}(f) = 1, \quad \text{Sp} \rho^{(0)}(f) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i = f_{i,i'}. \quad (10)$$

После вычисления коммутаторов и шпуров в (8) с учетом формул (5)–(7) эти уравнения могут быть приведены к замкнутому виду [31]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i[\varepsilon, f] = L(f), \quad (11)$$

где матрица $\varepsilon_{i,i'}$ определяется формулой

$$\varepsilon_{i,i'} = \varepsilon_i \delta_{i,i'} + \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i_1 i_1'} \Phi(i_1 i_1'; i_1 i_1') f_{i_1, i_1'}, \quad (12)$$

и интеграл столкновений $L(f)$ для бозонов дается выражением:

$$\begin{aligned} L_{i,i'}(f) &= \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} \sum_{i_1' i_2' i_3' i_4'} \Phi(i_1 i_2; i_3 i_4) \Phi(i_1' i_2'; i_3' i_4') \delta_- (\varepsilon_{i_1'} + \varepsilon_{i_2} - \varepsilon_{i_3} - \varepsilon_{i_4}) \times \\ &\times \left\{ f_{i_4, i_2} f_{i_3, i_1} (\delta_{i_3, i_1'} + f_{i_3, i_1'}) (\delta_{i_1, i_2} + f_{i_1, i_2}) - f_{i_3, i_1'} f_{i_2, i_3} (\delta_{i_1, i_3} + f_{i_3, i_1'}) (\delta_{i_4, i_2} + f_{i_4, i_2}) \right\} \delta_{i_4, i'} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\delta_-(x) \equiv \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tau x + \eta\tau}. \quad (14)$$

Для случая фермионов в нижней строчке выражения (13) внутри круглых скобок знак «плюс» надо заменить знаком «минус». Следует также отметить, что в левую часть уравнения (11) входит величина $\varepsilon_{i,i'}$ (см. (12)), содержащая поправки к энергии свободной частицы ε_i , связанные с взаимодействием и одночастичной матрицей плотности $f_{i,i'}$ (функцией распределения, см. ниже). По этой причине величиной $\varepsilon_{i,i'}$ учитываются эффекты среднего поля. Таким образом, уравнение (11) с учетом самосогласованного поля (12) и интегралом столкновений (13), (14) и является, по сути, кинетическим уравнением для системы, характеризуемой гамильтонианами (5), (6).

Чтобы продемонстрировать это более наглядно, следует перейти, как это сделано в [31], в уравнениях (11)–(13) к импульсному представлению, то есть, величины, характеризуемые наборами индексов i , необходимо считать набором импульсов \mathbf{p} с соответствующей нумерацией. В этом случае удобно вместо одночастич-

ной матрицы плотности $f_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \equiv \text{Sp} \rho^{(0)}(f) \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}$ (см. (7), (10)) ввести в рассмотрение вигнеровскую функцию распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \equiv \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} f_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}, \mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} f_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}, \mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}. \quad (15)$$

Следует обратить внимание на то, что в пространственно однородном случае величина $f_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}, \mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}$ равна

$$f_{\mathbf{p}} \delta_{\mathbf{k}, 0}. \text{ Следовательно, } f_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}, \mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} \text{ должна иметь рез-$$

кий максимум при $\mathbf{k} = 0$. Исходя из уравнений (11)–(14), в теории возмущений по малым пространственным градиентам получается следующее уравнение эволюции для вигнеровской функции распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ (кинетическое уравнение) [31]:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = L(\mathbf{p}; f), \quad (16)$$

где энергия частицы $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ (или квазичастицы, см. [31]) и интеграл столкновений $L(\mathbf{p}; f)$ определяются выражениями:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \equiv \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}, \mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}, \mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}},$$

$$L(\mathbf{p}; f) \equiv \frac{\pi}{\mathcal{V}^2} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4} |\Phi(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4)|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{p}_1) + \varepsilon(\mathbf{p}_2) - \varepsilon(\mathbf{p}_3) - \varepsilon(\mathbf{p}_4)) \times$$

$$\times \delta_{\mathbf{p}_4, \mathbf{p}} \{f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2) [1 + f(\mathbf{p}_3)] [1 + f(\mathbf{p}_4)] - f(\mathbf{p}_3) f(\mathbf{p}_4) [1 + f(\mathbf{p}_1)] [1 + f(\mathbf{p}_2)]\}, \quad (17)$$

в которых $\varepsilon(\mathbf{p})$ — энергия свободной частицы (или квазичастицы). Отметим, что аналогичное выражение для интеграла столкновений $L(\mathbf{p}; f)$ в (17) справедливо и для фермионов, если в нем знак «плюс» в квадратных скобках заменить знаком «минус». Видно, что кинематическая часть уравнения (16) выглядит так же, как и кинематическая часть классического кинетического уравнения, если под энергией $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ понимать гамильтониан частицы $\varepsilon_{\mathbf{p}}$. Интеграл же столкновений в (17) существенно отличается от такого в классическом случае, поскольку в нем отражено влияние статистики, которой подчиняются частицы.

В следующем разделе изложенная выше процедура будет применена для построения кинетической теории слабоионизованных газов водородоподобных атомов во внешнем электромагнитном поле. Как уже отмечалось выше, построение такой кинетической теории необходимо начать с конкретизации явного вида гамильтониана исследуемой системы.

3. Гамильтониан низкотемпературного газа водородоподобных атомов во внешнем электромагнитном поле

Задача построения гамильтониана слабоионизованной плазмы во внешнем электромагнитном поле, по сути, решена. В работе [17] развит приближенный метод вторичного квантования для описания многочастичных систем при наличии связанных состояний частиц. Для этого рассматривалась наиболее простая модель — система, составленная тремя различными газовыми компонентами: подсистемами двух различных противоположно заряженных фермионов и их связанными состояниями. В [34] эти гамильтонианы были использованы для построения кинетической теории слабоионизованных разреженных газов водородоподобных атомов из первых принципов квантовой статистики в отсутствие внешнего электромагнитного поля. Там же объяснялось, что развитый метод вторичного квантования наиболее корректно применять именно в случае низких температур. Причина в том, что формулировки работы [17] справедливы, когда средняя кинетическая энергия частиц системы мала по сравнению с энергиями связанных состояний (атомов). В системах, близких к равновесному состоянию, данное условие обеспечивается именно низкими температурами. Сле-

дует попутно отметить, что формулировки метода вторичного квантования, предложенные в [17], успешно применялись в [39] при описании состояний низкотемпературных газов ферми-атомов двух разных сортов в термодинамическом равновесии с газом гетероядерных молекул, образованных этими фермионами. Такие обстоятельства позволяют использовать гамильтонианы [17] и для решения задач настоящей работы.

Итог построения в [17] приближенной (новой на тот момент) формулировки метода вторичного квантования при наличии связанных состояний выглядит следующим образом. Низкотемпературный слабовозбужденный и слабоионизованный газ водородоподобных атомов во внешнем электромагнитном поле представляет собой прежде всего многочастичную многокомпонентную систему, подсистемами которой являются разноименно заряженные свободные фермионы (электроны и положительно заряженные остовы), а также связанные состояния этих фермионов — нейтральные водородоподобные атомы (бозоны), которые могут находиться в возбужденных состояниях. Операторы рождения и уничтожения фермионов первого и второго сорта в импульсном представлении

$$\hat{a}_l(\mathbf{p}), \quad \hat{a}_l^+(\mathbf{p}), \quad l=1,2 \quad (18)$$

удовлетворяют обычным (фермиевским) коммутационным соотношениям

$$\{\hat{a}_l(\mathbf{p}), \hat{a}_{l'}^+(\mathbf{p}')\} \equiv \hat{a}_l(\mathbf{p}) \hat{a}_{l'}^+(\mathbf{p}') + \hat{a}_{l'}^+(\mathbf{p}') \hat{a}_l(\mathbf{p}) =$$

$$= \Delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \Delta(l - l'), \quad (19)$$

$$\{\hat{a}_l(\mathbf{p}), \hat{a}_{l'}(\mathbf{p}')\} = 0, \quad \{\hat{a}_l^+(\mathbf{p}), \hat{a}_{l'}^+(\mathbf{p}')\} = 0,$$

где величины $\Delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ и $\Delta(l - l')$ представляют собой символы Кронеккера. Для определенности в дальнейшем изложении будем считать, что индекс $l=1$ соответствует подсистеме электронов, а $l=2$ — остовов. Отметим, что для упрощения выкладок в [17] не учитывалось наличие спиновых переменных в качестве индивидуальных квантовых характеристик частиц, составляющих подсистемы. Не будет оно учитываться и в настоящей работе по той же причине.

Для связанных состояний (водородоподобных атомов) с массой $M = m_1 + m_2$ в низкоэнергетической

области возможно введение в рассмотрение операторов рождения $\hat{\eta}_\alpha^+(\mathbf{p})$ и уничтожения $\hat{\eta}_\alpha(\mathbf{p})$, удовлетворяющих также привычным бозевским перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\hat{\eta}_\alpha(\mathbf{p}), \hat{\eta}_\beta^+(\mathbf{p}')] &\equiv \hat{\eta}_\alpha(\mathbf{p})\hat{\eta}_\beta^+(\mathbf{p}') - \hat{\eta}_\beta^+(\mathbf{p}')\hat{\eta}_\alpha(\mathbf{p}) = \\ &= \Delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\Delta(\alpha - \beta), \end{aligned} \quad (20)$$

где индексом « α » (или « β ») обозначается набор квантовых чисел, характеризующих квантово-механическое состояние водородоподобного атома.

Кроме того, предполагалась возможность воздействия на систему внешнего электромагнитного поля, характеризуемого скалярным $\varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ и векторным $\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ потенциалами. Учитывалось также наличие в системе фотонов с законом дисперсии $\omega(k)$ (ω — частота, \mathbf{k} — волновой вектор), операторами рождения $\hat{C}_\lambda^+(\mathbf{k})$ фотона с волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией $\lambda = 1, 2$ и операторами уничтожения $\hat{C}_\lambda(\mathbf{k})$,

$$\omega(k) = ck, \quad [\hat{C}_\lambda(\mathbf{k}), \hat{C}_\lambda^+(\mathbf{k}')] = \Delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (21)$$

В терминах введенных операторов рождения и уничтожения частиц (18)–(21) гамильтониан низкотемпературной водородоподобной плазмы в соответствии с [17] может быть представлен в виде

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{W}(t) + \hat{V}, \quad (22)$$

где $\hat{\mathcal{H}}_0$ — гамильтониан свободных частиц:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_0 = &\sum_{l=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_l(\mathbf{p}) \hat{a}_l^+(\mathbf{p}) \hat{a}_l(\mathbf{p}) + \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_\alpha(\mathbf{p}) \hat{\eta}_\alpha^+(\mathbf{p}) \hat{\eta}_\alpha(\mathbf{p}) + \\ &+ \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \hat{C}_\lambda^+(\mathbf{k}) \hat{C}_\lambda(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\varepsilon_l(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_l}, \quad l \equiv \{1, 2\}, \quad \varepsilon_\alpha(\mathbf{p}) = \varepsilon_\alpha + \frac{\mathbf{p}^2}{2M}, \quad M = m_1 + m_2,$$

причем величина $\varepsilon_\alpha < 0$ представляет собой энергию связанного состояния (водородоподобного атома) в состоянии с набором квантовых чисел α . В (23) и дальнейших выкладках, как это обычно делается, формально полагаем постоянную Планка \hbar равной единице, при необходимости зависимость результатов от \hbar легко восстанавливается. По повторяющимся индексам « α » в (23) и ниже, где специально не оговаривается иное, подразумевается суммирование.

Гамильтониан взаимодействия $\hat{W}(t)$ системы частиц с электромагнитным полем может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \hat{W}(t) = &-\frac{1}{c} \int d\mathbf{x} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2c^2} \int d\mathbf{x} \hat{\mathbf{A}}^2(\mathbf{x}, t) \hat{I}(\mathbf{x}) + \\ &+ \int d\mathbf{x} \varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t) \hat{\sigma}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (24)$$

где оператор $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t)$,

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t) + \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \quad (25)$$

представляет собой суперпозицию векторного потенциала внешнего электромагнитного поля $\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ и векторного потенциала $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ поля излучения, который в терминах операторов рождения и уничтожения фотонов имеет вид (см., например, [31]):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = &\left(\frac{2\pi}{\mathcal{V}}\right)^{1/2} c \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \omega^{-1/2}(k) \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) \times \\ &\times \left\{ \hat{C}_\lambda^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \hat{C}_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

($\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})$ — вектор поляризации фотона в состоянии \mathbf{k} и $\lambda = 1, 2$). Отметим, что для поля излучения выбрана кулоновская калибровка.

Оператор плотности токов $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$ в (24) определяется формулами:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = &\sum_{a=0}^2 \hat{\mathbf{j}}_a(\mathbf{x}), \quad a = \{0, l\}, \quad \hat{\mathbf{j}}_l(\mathbf{x}) = -\frac{ie_l}{2m_l \mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')} (\mathbf{p} + \mathbf{p}') \hat{a}_l^+(\mathbf{p}) \hat{a}_l(\mathbf{p}'), \quad e_1 = -e_2 = e, \\ \hat{\mathbf{j}}_0(\mathbf{x}) = &\frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \sum_{\alpha, \beta} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})} \left[\frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')}{2M} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \mathbf{j}_{\alpha\beta}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \right] \hat{\eta}_\alpha^+(\mathbf{p}) \hat{\eta}_\beta(\mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (27)$$

в которых \mathcal{V} — объем системы, e — величина элементарного заряда, m_1 и m_2 — массы электрона и остова соответственно, а величины $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{j}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ даются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) &\equiv e \int d\mathbf{y} \varphi_\alpha^*(\mathbf{y}) \varphi_\beta(\mathbf{y}) \left[\exp\left(-i\frac{m_1}{M}\mathbf{k}\mathbf{y}\right) - \exp\left(i\frac{m_2}{M}\mathbf{k}\mathbf{y}\right) \right], \quad M \equiv m_1 + m_2, \\ \mathbf{j}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) &\equiv e \frac{i}{2} \int d\mathbf{y} \left(\varphi_\alpha^*(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi_\beta(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \varphi_\alpha^*(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \varphi_\beta(\mathbf{y}) \right) \left[\frac{1}{m_1} \exp\left(i\frac{m_2}{M}\mathbf{k}\mathbf{y}\right) + \frac{1}{m_2} \exp\left(-i\frac{m_1}{M}\mathbf{k}\mathbf{y}\right) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где M — масса атома и $\varphi_\alpha(\mathbf{y})$ — волновая функция водородоподобного атома в состоянии α , которая считается известной.

Величина $\hat{\sigma}(\mathbf{x})$, входящая в (24), представляет собой оператор плотности зарядов системы

$$\hat{\sigma}(\mathbf{x}) = \sum_{a=0}^2 \hat{\sigma}_a(\mathbf{x}), \quad (29)$$

причем

$$\hat{\sigma}_l(\mathbf{x}) = \frac{e_l}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})} \hat{a}_l^+(\mathbf{p}) \hat{a}_l(\mathbf{p}'),$$

$$\hat{\sigma}_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \sum_{\alpha, \beta} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \hat{\eta}_\alpha^+(\mathbf{p}) \hat{\eta}_\beta(\mathbf{p}'). \quad (30)$$

Наконец, оператор $\hat{I}(\mathbf{x})$, содержащийся в (24), согласно [31] может быть записан в виде

$$\hat{I}(\mathbf{x}) = \sum_{a=0}^2 \hat{I}_a(\mathbf{x}), \quad (31)$$

где

$$\hat{I}_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{e^2}{\mathcal{V} m_l} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})} \hat{a}_l^+(\mathbf{p}) \hat{a}_l(\mathbf{p}'),$$

$$\hat{I}_0(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \sum_{\alpha, \beta} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})} I_{\alpha\beta}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \hat{\eta}_\alpha^+(\mathbf{p}) \hat{\eta}_\beta(\mathbf{p}'), \quad (32)$$

а тензор $I_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ определяется формулой

$$I_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \equiv e^2 \int d\mathbf{y} \varphi_\alpha^*(\mathbf{y}) \varphi_\beta(\mathbf{y}) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{m_1} \exp\left(i \frac{m_2}{M} \mathbf{k} \mathbf{y}\right) + \frac{1}{m_2} \exp\left(-i \frac{m_1}{M} \mathbf{k} \mathbf{y}\right) \right]. \quad (33)$$

Таким образом, выражения (24)–(33) полностью определяют гамильтониан взаимодействия водородоподобной низкотемпературной плазмы с электромагнитным полем.

Отметим, что в предположении слабого внешнего электромагнитного поля и в главном приближении по постоянной тонкой структуре $e^2/\hbar c$ гамильтониан $\hat{W}(t)$ взаимодействия электромагнитного поля с веществом сводится к простой сумме гамильтонианов $\hat{W}_{\text{ext}}(t)$ и $\hat{W}_{\text{int}}(t)$:

$$\hat{W}(t) = \hat{W}_{\text{ext}}(t) + \hat{W}_{\text{int}}(t), \quad (34)$$

в которой гамильтониан взаимодействия вещества с внешним электромагнитным полем $\hat{W}_{\text{ext}}(t)$ определяется формулами:

$$\hat{W}_{\text{ext}}(t) = \hat{W}_{\text{ext}}^{(1)}(t) + \hat{W}_{\text{ext}}^{(2)}(t) + \hat{W}_{\text{ext}}^{(0)}(t), \quad (35)$$

$$\hat{W}_{\text{ext}}^{(1)}(t) = \frac{e}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} \left\{ \frac{i}{2m_1 c} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, t) (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \varphi^{(e)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, t) \right\} \hat{a}_1^+(\mathbf{p}_1) \hat{a}_1(\mathbf{p}_2),$$

$$\hat{W}_{\text{ext}}^{(2)}(t) = \frac{e}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} \left\{ \frac{i}{2m_2 c} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, t) (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \varphi^{(e)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, t) \right\} \hat{a}_2^+(\mathbf{p}_1) \hat{a}_2(\mathbf{p}_2),$$

$$\hat{W}_{\text{ext}}^{(0)}(t) = -\frac{1}{\mathcal{V} c} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, t) \left[\frac{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{2M} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \mathbf{j}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \right] \hat{\eta}_\alpha^+(\mathbf{p}_1) \hat{\eta}_\beta(\mathbf{p}_2) +$$

$$+ \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \sum_{\alpha, \beta} \varphi^{(e)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, t) \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \hat{\eta}_\alpha^+(\mathbf{p}_1) \hat{\eta}_\beta(\mathbf{p}_2),$$

в которых функции $\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{p}, t)$, $\varphi^{(e)}(\mathbf{p}, t)$ представляют собой фурье-образы потенциалов $\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ внешнего электромагнитного поля

$$\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t), \quad \varphi^{(e)}(\mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t). \quad (36)$$

Гамильтониан взаимодействия вещества с излучением дается выражениями

$$\hat{W}_{\text{int}} = \hat{W}_{\text{int}}^{(1)} + \hat{W}_{\text{int}}^{(2)} + \hat{W}_{\text{int}}^{(0)}, \quad (37)$$

$$\hat{W}_{\text{int}}^{(0)} \equiv -\sum_{\lambda=1, \mathbf{k}, \mathbf{p}} \sum_{\alpha, \beta} \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) \left(\frac{2\pi}{\mathcal{V} \omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \sum_{\alpha, \beta} \left[\frac{(2\mathbf{p} - \mathbf{k})}{2M} \sigma_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}) + \mathbf{j}_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}) \right] \hat{\eta}_{\alpha\mathbf{p}}^+ \hat{\eta}_{\beta\mathbf{p}-\mathbf{k}} \hat{C}_{\mathbf{k}\lambda} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \mathbf{e}_{\lambda}(\mathbf{k}) \left(\frac{2\pi}{\mathcal{V} \omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \sum_{\alpha, \beta} \left[\frac{(2\mathbf{p} + \mathbf{k})}{2M} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) + \mathbf{j}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \right] \hat{n}_{\alpha\mathbf{p}}^+ \hat{n}_{\beta\mathbf{p}+\mathbf{k}} \hat{C}_{\mathbf{k}\lambda}^+, \\
 \hat{W}_{\text{int}}^{(1)} &= \frac{e}{2m_1} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left(\frac{2\pi}{\mathcal{V} \omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\lambda}(\mathbf{k}) (\mathbf{p}' + \mathbf{p}) \hat{a}_1^+(\mathbf{p}) \hat{a}_1(\mathbf{p}') \left(\Delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{k}) \hat{C}_{\mathbf{k}\lambda} + \Delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{C}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \right), \\
 \hat{W}_{\text{int}}^{(2)} &= - \frac{e}{2m_2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left(\frac{2\pi}{\mathcal{V} \omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\lambda}(\mathbf{k}) (\mathbf{p}' + \mathbf{p}) \hat{a}_2^+(\mathbf{p}) \hat{a}_2(\mathbf{p}') \left[\Delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{k}) \hat{C}_{\mathbf{k}\lambda} + \Delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k}) \hat{C}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \right].
 \end{aligned}$$

Заметим, что гамильтониан (35) играет главную роль в описании процессов отклика системы на внешнее возмущение слабым электромагнитным полем (см. [15–23]). Гамильтониан (37) определяет релаксационные процессы в фотонной подсистеме. На самом деле этот гамильтониан точно учитывает процессы испускания и поглощения фотонов, но оставляет вне рамок описания процессы рассеяния фотонов атомами. За процессы рассеяния фотонов атомами ответственны неучтенные в гамильтонианах (34)–(37) слагаемые, квадратичные по постоянным тонкой структуры $e^2/\hbar c$ (они содержатся в полном гамильтониане (24)). Однако такой же вклад в релаксационные процессы в системе

(например, в интеграл столкновений) дает и квадратичное приближение по \hat{W}_{int} [31].

Осталось привести явный вид последнего слагаемого в формуле (22) — гамильтониана взаимодействия между частицами всех компонентов системы \hat{V} , который в соответствии с [17] может быть представлен в виде трех слагаемых:

$$\hat{V} = \hat{V}^{(1)} + \hat{V}^{(2)} + \hat{V}^{(3)}, \quad (38)$$

где $\hat{V}^{(1)}$ — гамильтониан взаимодействия свободных фермионов обоих сортов с водородоподобными атомами

$$\begin{aligned}
 \hat{V}^{(1)} &= \frac{e}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4} \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \hat{n}_{\alpha}^+(\mathbf{p}_3) \hat{n}_{\beta}(\mathbf{p}_4) \left\{ a_2^+(\mathbf{p}_1) a_2(\mathbf{p}_2) - a_1^+(\mathbf{p}_1) a_1(\mathbf{p}_2) \right\}, \\
 \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) &\equiv \Delta(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) v(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1).
 \end{aligned} \quad (39)$$

Гамильтониан $\hat{V}^{(2)}$ в (38) описывает взаимодействие между атомами в различных квантово-механических состояниях:

$$\hat{V}^{(2)} = \frac{1}{4\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4} \Phi_{\alpha_1 \alpha_2; \alpha_3 \alpha_4}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \hat{n}_{\alpha_1}^+(\mathbf{p}_1) \hat{n}_{\alpha_2}^+(\mathbf{p}_2) \hat{n}_{\alpha_3}(\mathbf{p}_3) \hat{n}_{\alpha_4}(\mathbf{p}_4), \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\alpha_1 \alpha_2; \alpha_3 \alpha_4}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) &\equiv \frac{1}{2\mathcal{V}} \Delta(\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \times \\
 &\times \left\{ v(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \sigma_{\alpha_1 \alpha_4}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \sigma_{\alpha_2 \alpha_3}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) + v(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) \sigma_{\alpha_2 \alpha_4}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) \sigma_{\alpha_1 \alpha_3}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) + \right. \\
 &\left. + v(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2) \sigma_{\alpha_1 \alpha_3}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2) \sigma_{\alpha_2 \alpha_4}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4) + v(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) \sigma_{\alpha_2 \alpha_3}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) \sigma_{\alpha_1 \alpha_4}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4) \right\},
 \end{aligned}$$

а гамильтониан $\hat{V}^{(3)}$ определяет взаимодействие свободных фермионов между собой:

$$\begin{aligned}
 \hat{V}^{(3)} &= - \frac{e^2}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4} \Phi_1^{(3)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \hat{a}_1^+(\mathbf{p}_2) \hat{a}_1(\mathbf{p}_3) \hat{a}_2^+(\mathbf{p}_1) \hat{a}_2(\mathbf{p}_4) + \\
 &+ \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4} \Phi_2^{(3)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \left[\hat{a}_{1\mathbf{p}_1}^+ \hat{a}_{1\mathbf{p}_2}^+ \hat{a}_{1\mathbf{p}_3} \hat{a}_{1\mathbf{p}_4} + \hat{a}_{2\mathbf{p}_1}^+ \hat{a}_{2\mathbf{p}_2}^+ \hat{a}_{2\mathbf{p}_3} \hat{a}_{2\mathbf{p}_4} \right],
 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\Phi_1^{(3)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \equiv \Delta(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) v(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3),$$

$$\Phi_2^{(3)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \equiv \frac{e^2}{2\mathcal{V}} \Delta(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \left(v(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) + v(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4) - v(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) - v(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4) \right).$$

Величина $v(\mathbf{p})$ в формулах (39)–(41) представляет собой фурье-образ кулоновского потенциала, деленный на e^2 — квадрат элементарного заряда,

$$v(\mathbf{p}) = \frac{4\pi}{p^2}. \quad (42)$$

Таким образом, выражения (19)–(42) определяют все виды взаимодействий между компонентами слабоионизованного газа водородоподобных атомов в области низких температур и взаимодействие системы с внешним электромагнитным полем. Таким образом, гамильтониан системы в виде (22) будет использоваться нами, в описании системы в рамках модифицированного для этого случая метода сокращенного описания, с некоторыми оговорками, о которых будет сообщаться по мере необходимости.

4. Параметры сокращенного описания низкотемпературного газа водородоподобных атомов во внешнем электромагнитном поле

Для построения кинетической теории исследуемой системы необходимо несколько модифицировать изложенный в разд. 2 подход, прежде всего принимая во внимание то обстоятельство, что в случае слабоионизованного газа водородоподобных атомов речь идет о многокомпонентной системе. В основе такого описания, как уже упоминалось, лежат гамильтонианы системы, определенные выше формулами (22)–(42) (см. также [17]). Однако необходимо сделать следующее замечание. Гамильтониан (22) отличается от гамильтониана (5) наличием дополнительного слагаемого $\hat{W}(t)$, описывающего взаимодействие компонентов системы с внешним полем и излучением (фотонами), см. (22)–(37). Сразу отметим, что с целью упрощения выкладок и более наглядного представления результатов в дальнейшем рассмотрении в $\hat{W}(t)$ мы будем пренебрегать наличием взаимодействия компонентов системы с фотонами, то есть игнорировать наличие слагаемого \hat{W}_{int} , см. (34), (37). Отметим также, что пренебрежение слагаемым \hat{W}_{int} не является необходимым из каких-либо принципиальных соображений. В самом деле, мы могли бы включить в число параметров сокращенного описания одночастичную матрицу плотности фотонов $f_{\lambda\mathbf{k},\lambda'\mathbf{k}'}$, определив ее формулами (см. (10), (15)):

$$f_{\lambda\mathbf{k},\lambda'\mathbf{k}'} \equiv \text{Sp} \rho^{(0)}(f) \hat{f}_{\lambda\mathbf{k},\lambda'\mathbf{k}'}, \quad \hat{f}_{\lambda\mathbf{k},\lambda'\mathbf{k}'} = \hat{C}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{C}_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (43)$$

Это позволило бы добавить гамильтониан \hat{W}_{int} (см. (37)) к числу гамильтонианов взаимодействия (38) и получить в итоге, следуя методике [31], кинетическое уравнение для вигнеровской функции распределения фотонов. Как легко будет видеть далее, такая процедура сильно загромождала бы выкладки и наглядность

результатов. Принимая также во внимание, что фотоны слабо влияют на релаксационные процессы в среде, мы можем пренебречь слагаемым \hat{W}_{int} в гамильтониане $\hat{W}(t)$. По этой же причине мы исключим из дальнейшего рассмотрения слагаемое $\sum_{\lambda,\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \hat{C}_{\lambda}^+(\mathbf{k}) \hat{C}_{\lambda}(\mathbf{k})$,

определяющее в (23) кинетическую энергию свободных фотонов. Однако, если интересоваться процессами релаксации фотонов в среде, то необходимо, как отмечалось выше, выписывать кинетическое уравнение для функции распределения (43) фотонов и учитывать наличие как слагаемого $\sum_{\lambda,\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \hat{C}_{\lambda}^+(\mathbf{k}) \hat{C}_{\lambda}(\mathbf{k})$, так и га-

мильтониана \hat{W}_{int} . Именно слагаемые, содержащиеся в \hat{W}_{int} , и определяют релаксацию фотонной подсистемы, см. в этой связи [31].

Что же касается гамильтониана $\hat{W}_{\text{ext}}(t)$ (см. (35)) в $\hat{W}(t)$, связанного с взаимодействием вещества с внешним электромагнитным полем, то его влияние на эволюцию системы в рамках метода сокращенного описания в определенных случаях также можно учесть. В частности, в [31] подробно изложена процедура модификации метода сокращенного описания на случай воздействия на систему внешней силы слабой интенсивности и медленно меняющейся со временем. Суть модификации состоит в том, что при выводе кинетического уравнения с учетом воздействия на систему внешней случайной силы используется дополнительная теории возмущения по временным производным от характеристик поля (наряду с теорией возмущения по слабому взаимодействию между частицами, например). Если задаться целью получить кинетические уравнения в главном приближении по дополнительным малым параметрам (производным по времени от характеристик поля), то отмеченная модификация становится минимальной и практически очевидной [31].

Применительно к исследуемой нами системе это означает, что в качестве параметров ее сокращенного описания могут быть выбраны одночастичные матрицы плотности типа (3), (7) для каждого из компонентов системы. Именно весь набор таких матриц плотности будет служить параметрами сокращенного описания системы на кинетическом ее этапе. И уравнения эволюции для них могут рассматриваться в качестве системы кинетических уравнений для системы (см. в этой связи также [34,40]). Учитывая сделанное выше предложение о пренебрежении вкладом фотонов в релаксационные процессы в системе, введем в рассмотрение одночастичные матрицы плотности $\tilde{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}}^{(1)}$, $\tilde{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}}^{(2)}$ свободных (не связанных) фермионов 1-го и 2-го сорта формулами, см. (18)–(20), (9), (10), (43) (напомним, что мы условились выше нумеровать индексом «1» физические характеристики электронной подсистемы, а индексом «2» — характеристики остовов):

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1)} &\equiv \text{Sp} \rho^{(0)}(\tilde{f}) \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1)}, & \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1)} &\equiv \hat{a}_1^+(\mathbf{p}') \hat{a}_1(\mathbf{p}), & \dot{\tilde{f}}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1)} &= \mathcal{L}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1,0)}(\tilde{f}) + L_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1,1)}(\tilde{f}), & (47) \\ \tilde{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(2)} &\equiv \text{Sp} \rho^{(0)}(\tilde{f}) \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(2)}, & \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(2)} &\equiv \hat{a}_2^+(\mathbf{p}') \hat{a}_2(\mathbf{p}), & \mathcal{L}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1,0)}(\tilde{f}) &= i \text{Sp} \rho^{(0)}(\tilde{f}) \left[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1)} \right], \end{aligned}$$

а также одночастичные матрицы плотности атомов в различных квантово-механических состояниях $\tilde{f}_{\alpha\mathbf{p},\beta\mathbf{p}'}^{(0)}$ (20)

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha\mathbf{p},\beta\mathbf{p}'}^{(0)} &\equiv \text{Sp} \rho^{(0)}(\tilde{f}) \hat{f}_{\alpha\mathbf{p},\beta\mathbf{p}'}^{(0)}, \\ \hat{f}_{\alpha\mathbf{p},\beta\mathbf{p}'}^{(0)} &\equiv \hat{\eta}_\beta^+(\mathbf{p}') \hat{\eta}_\alpha(\mathbf{p}), & \text{Sp} \rho^{(0)}(\tilde{f}) &= 1, & (45) \end{aligned}$$

где статистический оператор $\rho^{(0)}(\tilde{f})$ в соответствии с (33), (48) должен определяться формулой

$$\begin{aligned} \rho^{(0)}(\tilde{f}) &= \exp \left\{ \Omega(\tilde{f}) - \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} Y_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}^{(1)}(\tilde{f}) \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1)} - \right. \\ &\left. - \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} Y_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}^{(2)}(\tilde{f}) \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(2)} - \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} Y_{\beta\mathbf{p}',\alpha\mathbf{p}}^{(0)}(\tilde{f}) \hat{f}_{\alpha\mathbf{p},\beta\mathbf{p}'}^{(0)} \right\}, & (46) \end{aligned}$$

в которой термодинамический потенциал $\Omega(\tilde{f})$ и связь величин $Y_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}^{(1)}(\tilde{f})$, $Y_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}^{(2)}(\tilde{f})$, $Y_{\beta\mathbf{p}',\alpha\mathbf{p}}^{(0)}(\tilde{f})$ с введенными одночастичными матрицами плотности определяется выражениями (44), (45).

Далее для каждой из введенных выражениями (44), (45) одночастичных матриц плотности можно написать уравнения эволюции, придерживаясь методики, используемой в [31] (см. также [34,40]) для получения формул (8)–(12). В настоящей работе для исследуемой системы мы будем получать кинетические уравнения с точностью до первого порядка по слабому взаимодействию между частицами, что соответствует приближению среднего (или самосогласованного) поля. Кроме того, как уже оговаривалось выше, будем ограничиваться главным приближением по временным производным от характеристик поля и не учитывать «перекрестных» слагаемых, то есть таких, которые пропорциональны произведениям величин, характеризующих внешнее поле, на амплитуды слабого взаимодействия между частицами. Пренебрегая вторым порядком по взаимодействию, мы избегаем задачи построения интегралов столкновений, см. (13), (14), (17). В оговоренных выше приближениях нет принципиальной необходимости. Как легко видеть из (13), (38)–(42), выражения для интегралов столкновений могут быть получены, хотя из-за громоздкости выкладок данную задачу, по нашему мнению, следует вынести за рамки настоящей работы.

С учетом оговоренных приближений и в соответствии с формулами (8), уравнения эволюции для одночастичных матриц плотности $\tilde{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1)}$, $\tilde{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(2)}$ свободных фермионов обоих сортов записываются в следующей форме (см. также (44)):

$$L_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1,1)}(\tilde{f}) = i \text{Sp} \rho^{(0)}(\tilde{f}) \left[\hat{V} + \hat{W}_{\text{ext}}(t), \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1)} \right];$$

$$\dot{\tilde{f}}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(2)} = \mathcal{L}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(2,0)}(\tilde{f}) + L_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(2,1)}(\tilde{f}),$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(2,0)}(\tilde{f}) = i \text{Sp} \rho^{(0)}(\tilde{f}) \left[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(2)} \right],$$

$$L_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1,1)}(\tilde{f}) = i \text{Sp} \rho^{(0)}(\tilde{f}) \left[\hat{V} + \hat{W}_{\text{ext}}(t), \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1)} \right],$$

где гамильтонианы $\hat{\mathcal{H}}_0$, \hat{V} и $\hat{W}_{\text{ext}}(t)$ определяются выражениями (35) и (38)–(42). Подобное же уравнение может быть выписано и для одночастичной матрицы плотности связанных состояний этих фермионов — водородоподобных атомов в различных квантовых состояниях (45)

$$\dot{\tilde{f}}_{\alpha\mathbf{p},\beta\mathbf{p}'}^{(0)} = \mathcal{L}_{\alpha\mathbf{p},\beta\mathbf{p}'}^{(0,0)}(\tilde{f}) + L_{\alpha\mathbf{p},\beta\mathbf{p}'}^{(0,1)}(\tilde{f}), & (48)$$

$$\mathcal{L}_{\alpha\mathbf{p},\beta\mathbf{p}'}^{(0,0)}(\tilde{f}) = i \text{Sp} \rho^{(0)}(\tilde{f}) \left[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{f}_{\alpha\mathbf{p},\beta\mathbf{p}'}^{(0)} \right],$$

$$L_{\alpha\mathbf{p},\beta\mathbf{p}'}^{(0,1)}(\tilde{f}) = i \text{Sp} \rho^{(0)}(\tilde{f}) \left[\hat{V} + \hat{W}_{\text{ext}}(t), \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{(1)} \right].$$

Вводя далее в рассмотрение вигнеровские функции распределения $\tilde{f}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, $\tilde{f}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, $\tilde{f}_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, как это было сделано в [34], [40] (см. также (15)):

$$\tilde{f}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \equiv \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{f}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}, \mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}^{(1)} = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{f}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}, \mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}^{(1)},$$

$$\tilde{f}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \equiv \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{f}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}, \mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}^{(2)} = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{f}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}, \mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}^{(2)},$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &\equiv \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{f}_{\alpha_1 \mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}, \alpha_2 \mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}^{(0)} = \\ &= \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{f}_{\alpha_1 \mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}, \alpha_2 \mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}^{(0)}, & (49) \end{aligned}$$

и следуя методике [31,34], исходя из (47), (48) можно прийти к кинетическим уравнениям для величин (49), вид которых подобен виду уравнения (16), если в последнем не принимать во внимание интеграл столкновений. Наиболее последовательно соответствующая процедура изложена в [40]. Упомянутая процедура, однако, требует определенной модификации для учета влияния на систему внешнего электромагнитного поля. В соответствии с этим, и выведенная система кинетических уравнений будет учитывать воздействие на сис-

тему внешнего электромагнитного поля, в том числе, и на подсистему нейтральных водородоподобных атомов. В явном виде этих кинетических уравнений таится, однако, довольно «неприятное» обстоятельство, связанное со способом введения вигнеровских функций распределения (49), что и рассмотрим в следующем разделе.

5. Условия калибровочной инвариантности для низкотемпературного газа водородоподобных атомов во внешнем электромагнитном поле

Дело в том, что в упомянутые кинетические уравнения потенциалы внешнего электромагнитного поля $\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ (см. (35), (36)) не входят в виде комбинаций, соответствующих напряженностям электрического $\mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ и магнитного $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ полей:

$$\mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{grad} \varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t),$$

$$\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t). \quad (50)$$

Это связано с тем, что вигнеровские функции распределения (49) не являются калибровочно-инвариантными: действительно, в классическом пределе они определяют распределение частиц по координатам и проекциям обобщенного импульса, которые калибровочно-неинвариантны (см. в этой связи [31], а также [41]). Можно, однако, ввести калибровочно-инвариантные функции распределения, кинетические уравнения для которых будут уже содержать характеристики внешнего электромагнитного поля в комбинациях (50), то есть будут уже калибровочно-инвариантными. С этой целью обратим внимание, прежде всего, на то, что калибровочно-неинвариантные вигнеровские функции распределения (49) можно ввести еще одним, эквивалентным способом (см. также (44)):

$$\hat{\chi}_1^+(\mathbf{x}_1) \rightarrow \hat{\chi}'_1(\mathbf{x}_1) = e^{ie_1 a(\mathbf{x}_1, t)} \hat{\chi}_1^+(\mathbf{x}_1), \quad \hat{\chi}'_1(\mathbf{x}_2) \rightarrow \hat{\chi}'_1{}^+(\mathbf{x}_2, t) = e^{-ie_1 a(\mathbf{x}_2, t)} \hat{\chi}_1^+(\mathbf{x}_2),$$

$$\hat{\chi}_2^+(\mathbf{x}_1) \rightarrow \hat{\chi}'_2(\mathbf{x}_1) = e^{ie_2 a(\mathbf{x}_1, t)} \hat{\chi}_2^+(\mathbf{x}_1), \quad \hat{\chi}'_2(\mathbf{x}_2) \rightarrow \hat{\chi}'_2{}^+(\mathbf{x}_2, t) = e^{-ie_2 a(\mathbf{x}_2, t)} \hat{\chi}_2^+(\mathbf{x}_2),$$

$$\hat{\eta}_{\alpha_1}^+(\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\eta}'_{\alpha_1}(\mathbf{X}, t) = K_{\alpha_1 \beta_1}(\mathbf{X}, t) \hat{\eta}_{\beta_1}^+(\mathbf{X}), \quad \hat{\eta}'_{\alpha_2}(\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\eta}'_{\alpha_2}{}^+(\mathbf{X}, t) = \hat{\eta}_{\beta_2}^+(\mathbf{X}) K_{\alpha_2 \beta_2}^+(\mathbf{X}, t), \quad (54)$$

в которых матричные элементы $K_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, t)$ определяются выражениями

$$K_{\alpha_1 \beta_1}(\mathbf{X}, t) \equiv \int d\mathbf{x} \varphi_{\alpha_1}^*(\mathbf{x}) \exp \left\{ i \left[e_1 a \left(\mathbf{X} + \frac{m_2}{M} \mathbf{x}, t \right) + e_2 a \left(\mathbf{X} - \frac{m_1}{M} \mathbf{x}, t \right) \right] \right\} \varphi_{\beta_1}(\mathbf{x}),$$

$$K_{\alpha_2 \beta_2}^+(\mathbf{X}, t) \equiv \int d\mathbf{x} \varphi_{\alpha_2}(\mathbf{x}) \exp \left\{ -i \left[e_1 a \left(\mathbf{X} + \frac{m_2}{M} \mathbf{x}, t \right) + e_2 a \left(\mathbf{X} - \frac{m_1}{M} \mathbf{x}, t \right) \right] \right\} \varphi_{\beta_2}^*(\mathbf{x}), \quad (55)$$

где $a(\mathbf{x}, t)$ — некая калибровочная функция. Заметим, что для матриц (55) справедливо равенство

$$K_{\alpha_2 \beta_2}^+(\mathbf{X}, t) K_{\beta_2 \alpha_1}(\mathbf{X}, t) = \delta_{\alpha_1 \alpha_2}, \quad (56)$$

$$\tilde{f}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{y} e^{i\mathbf{y}\mathbf{p}} \tilde{f}^{(1)} \left(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{y}, \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{y} \right),$$

$$\tilde{f}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{y} e^{i\mathbf{y}\mathbf{p}} \tilde{f}^{(2)} \left(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{y}, \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{y} \right),$$

$$\tilde{f}_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{y} e^{i\mathbf{y}\mathbf{p}} \tilde{f}_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)} \left(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{y}, \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{y} \right), \quad (51)$$

где одночастичные матрицы плотности определяются выражениями

$$\tilde{f}^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \operatorname{Sp} \rho \hat{\chi}_1^+(\mathbf{x}_2) \hat{\chi}_1(\mathbf{x}_1),$$

$$\tilde{f}^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \operatorname{Sp} \rho \hat{\chi}_2^+(\mathbf{x}_2) \hat{\chi}_2(\mathbf{x}_1),$$

$$\tilde{f}_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \operatorname{Sp} \rho \hat{\eta}_{\alpha_2}^+(\mathbf{x}_2) \hat{\eta}_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1). \quad (52)$$

В (52) полевые операторы $\hat{\chi}_1^+(\mathbf{x})$, $\hat{\chi}_1(\mathbf{x})$, $\hat{\chi}_2^+(\mathbf{x})$, $\hat{\chi}_2(\mathbf{x})$ и $\hat{\eta}_{\alpha_2}^+(\mathbf{x})$, $\hat{\eta}_{\alpha_1}(\mathbf{x})$ связаны с операторами рождения и уничтожения частиц подсистемы в импульсном пространстве (18)–(20) формулами

$$\hat{\chi}_1^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} a_1^+(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \quad \hat{\chi}_1(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} a_1(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}},$$

$$\hat{\chi}_2^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} a_2^+(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \quad \hat{\chi}_2(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} a_2(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}},$$

$$\hat{\eta}_{\alpha}^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \hat{\eta}_{\alpha}^+(\mathbf{p}), \quad \hat{\eta}_{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{\eta}_{\alpha}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \quad (53)$$

Уравнения движения для операторов (53) будут калибровочно-инвариантными в том случае, когда эти операторы удовлетворяют преобразованиям (см. [17]):

в чем легко убедиться, если считать, что волновые функции водородоподобного атома $\varphi_{\alpha}(\mathbf{x})$ удовлетворяют равенству:

$$\varphi_{\beta}^*(\mathbf{x})\varphi_{\beta}(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (57)$$

то есть относить волновые функции атома к области дискретного спектра (по повторяющимся индексам в (57), как и в формулах выше, подразумевается суммирование). На самом деле, условие (57) уже считалось выполненным на этапе формулировки самого метода вторичного квантования при наличии связанных состояний частиц. Обоснование этого обстоятельства и области его применимости подробно изложено в [17].

Отметим также, что в соответствии с этой работой в приближении «точечного атома» и при $e_1 = -e = -e_2$ матрицы (55) могут быть значительно упрощены:

$$K_{\alpha_1\beta_1}(\mathbf{X}, t) \equiv \int d\mathbf{x}_1 \varphi_{\alpha_1}^*(\mathbf{x}_1) \exp\{-ie\mathbf{x}_1 \nabla a(\mathbf{X}, t)\} \varphi_{\beta_1}(\mathbf{x}_1),$$

$$K_{\alpha_2\beta_2}^+(\mathbf{X}, t) \equiv \int d\mathbf{x}_2 \varphi_{\alpha_2}(\mathbf{x}_2) \exp\{ie\mathbf{x}_2 \nabla a(\mathbf{X}, t)\} \varphi_{\beta_2}^*(\mathbf{x}_2). \quad (58)$$

Таким образом, в соответствии с (51)–(58) калибровочно-инвариантные одночастичные матрицы плотности должны определяться следующими выражениями:

$$f^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \text{Sp} \rho \hat{\chi}'^+(\mathbf{x}_2) \hat{\chi}'(\mathbf{x}_1) = e^{ie_1\{a(\mathbf{x}_1, t) - a(\mathbf{x}_2, t)\}} \tilde{f}^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

$$f^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \text{Sp} \rho \hat{\chi}_2'^+(\mathbf{x}_2) \hat{\chi}_2'(\mathbf{x}_1) = e^{ie_2\{a(\mathbf{x}_1, t) - a(\mathbf{x}_2, t)\}} \tilde{f}^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

$$f_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \text{Sp} \rho \hat{\eta}_{\alpha_2}^+(\mathbf{x}_2, t) \hat{\eta}_{\alpha_1}'(\mathbf{x}_1, t) = K_{\alpha_2\beta_2}^+(\mathbf{x}_2, t) K_{\alpha_1\beta_1}(\mathbf{x}_1, t) \tilde{f}_{\beta_1, \beta_2}^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t), \quad (59)$$

причем благодаря свойствам (56) справедливо также соотношение

$$\tilde{f}_{\gamma_1, \gamma_2}^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = K_{\gamma_1\alpha_1}^+(\mathbf{x}_1, t) K_{\gamma_2\alpha_2}(\mathbf{x}_2, t) f_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \quad (60)$$

Далее, исходя из определений вигнеровских функций распределения (51), (52), имеем

$$f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{y} e^{i\mathbf{y}\mathbf{p}} e^{ie_1\left\{a\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right) - a\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right)\right\}} \tilde{f}^{(1)}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y}\right),$$

$$f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{y} e^{i\mathbf{y}\mathbf{p}} e^{ie_2\left\{a\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right) - a\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right)\right\}} \tilde{f}^{(2)}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y}\right),$$

$$f_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{y} e^{i\mathbf{y}\mathbf{p}} K_{\alpha_2\beta_2}^+\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right) K_{\alpha_1\beta_1}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right) \tilde{f}_{\beta_1, \beta_2}^{(0)}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y}; t\right). \quad (61)$$

С другой стороны, для любой одночастичной матрицы плотности, например $\tilde{f}^{(1)}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y}\right)$, справедливо представление через вигнеровскую функцию распределения

$$\tilde{f}^{(1)}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y}\right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}' e^{-i\mathbf{y}\mathbf{p}'} \tilde{f}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}'), \quad (62)$$

вследствие чего выражения (61) для калибровочно-инвариантных вигнеровских функций распределения могут быть записаны в виде

$$f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}' \tilde{f}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}'; t) \int d\mathbf{y} e^{i\mathbf{y}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')} e^{ie_1\left\{a\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right) - a\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right)\right\}},$$

$$f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}' \tilde{f}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}'; t) \int d\mathbf{y} e^{i\mathbf{y}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')} e^{ie_2\left\{a\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right) - a\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right)\right\}},$$

$$f_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}' \tilde{f}_{\beta_1, \beta_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}'; t) \int d\mathbf{y} e^{i\mathbf{y}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')} K_{\alpha_2\beta_2}^+\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right) K_{\alpha_1\beta_1}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right). \quad (63)$$

В классическом пределе, когда поля слабо меняются на расстояниях порядка де-бройлевской длины волны частицы (см., например, [31]), имеем

$$a\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right) - a\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right) \approx \mathbf{y}\nabla a(\mathbf{x}, t) \quad (64)$$

и

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) &\approx \tilde{f}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p} + e_1 \nabla a(\mathbf{x}, t); t), \\ f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) &\approx \tilde{f}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p} + e_2 \nabla a(\mathbf{x}, t); t). \end{aligned} \quad (65)$$

Принимая во внимание, что $e_1 = -e = -e_2$, и выбирая $\nabla a(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ — векторный потенциал внешнего электромагнитного поля, получим

«привычный» вид записи калибровочной инвариантности для функций распределения заряженных частиц (см., например, [31]):

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) &\approx \tilde{f}^{(1)}\left(\mathbf{x}, \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t); t\right), \\ f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) &\approx \tilde{f}^{(2)}\left(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t); t\right). \end{aligned} \quad (66)$$

Для упрощения последнего из выражений (63) наряду с приближением (64) используем также приближение «точечного атома» [17]. Это позволит значительно упростить выражения для матриц $K_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}^+$, см. (55), (58)–(60), (62). Например, при $e_1 = -e = -e_2$

$$\begin{aligned} K_{\alpha_1\beta_1}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, t\right) &= \int d\mathbf{z}\varphi_{\alpha_1}^*(\mathbf{z}) \exp\left\{ie\left[a\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} - \frac{m_1}{M}\mathbf{z}, t\right) - a\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{m_2}{M}\mathbf{z}, t\right)\right]\right\} \varphi_{\beta_1}(\mathbf{z}) \approx \\ &\approx \int d\mathbf{z}\varphi_{\alpha_1}^*(\mathbf{z}) \exp\left\{-i\frac{e}{c}\mathbf{z}\mathbf{A}^{(e)}\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{2}, t\right)\right\} \varphi_{\beta_1}(\mathbf{z}) \approx \int d\mathbf{z}\varphi_{\alpha_1}^*(\mathbf{z}) \left\{1 - i\frac{e}{c}\mathbf{z}\mathbf{A}^{(e)}\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{2}, t\right)\right\} \varphi_{\beta_1}(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (67)$$

В классическом пределе, когда поля слабо меняются на расстояниях порядка де-бройлевской длины волны частицы, из (66) окончательно имеем

$$K_{\alpha_1\beta_1}\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{2}, t\right) \approx \delta_{\alpha_1\beta_1} - i\frac{1}{c}\mathbf{d}_{\alpha_1\beta_1}\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t) - i\frac{1}{2c}(\mathbf{y}\nabla)\mathbf{d}_{\alpha_1\beta_1}\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t). \quad (67a)$$

При получении выражения (67a) из (67) использовано условие нормировки волновых функций дискретного спектра водородоподобного атома и введено для этого атома понятие тензора дипольных моментов $\mathbf{d}_{\alpha\beta}$:

$$\int d\mathbf{x}\varphi_{\alpha}^*(\mathbf{x})\varphi_{\beta}(\mathbf{x}) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{d}_{\alpha\beta} \equiv e\int d\mathbf{y}\varphi_{\alpha}^*(\mathbf{y})\mathbf{y}\varphi_{\beta}(\mathbf{y}). \quad (68)$$

Использование формул (66)–(68) позволяет получить достаточно простое выражение для калибровочно-инвариантной функции распределения нейтральных атомов $f_{\alpha;\beta}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t)$:

$$\begin{aligned} f_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) &\approx \tilde{f}_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) - \\ &- i\frac{1}{c}\left[\mathbf{d}, \tilde{f}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t)\right]_{\alpha_1\alpha_2} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t) - \\ &- \frac{1}{2c}\left\{\mathbf{d}, \left(\frac{\partial \tilde{f}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t)}{\partial \mathbf{p}}\nabla\right)\right\}_{\alpha_1\alpha_2} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (69)$$

В последнем выражении обозначения $[A, B]_{\alpha_1\alpha_2}$, $\{A, B\}_{\alpha_1\alpha_2}$ имеют традиционный смысл коммутаторов и антикоммутаторов для матриц A, B :

$$[A, B]_{\alpha_1\alpha_2} \equiv A_{\alpha_1\beta}B_{\beta\alpha_2} - B_{\alpha_1\beta}A_{\beta\alpha_2},$$

$$\{A, B\}_{\alpha_1\alpha_2} \equiv A_{\alpha_1\beta}B_{\beta\alpha_2} + B_{\alpha_1\beta}A_{\beta\alpha_2}. \quad (70)$$

Таким образом, выражения (51)–(70) позволяют получить кинетические уравнения для калибровочно-инвариантных вигнеровских функций распределения частиц исходя из кинетических уравнений (47), (48) для калибровочно-неинвариантных функций распределения (49). В полученные кинетические уравнения потенциалы внешнего электромагнитного поля $\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ входят уже в виде комбинаций, соответствующих напряженностям электрического $\mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ и магнитного $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ полей, см. (50).

6. Калибровочно-инвариантная система кинетических уравнений для низкотемпературного газа водородоподобных атомов во внешнем электромагнитном поле

Упомянутая выше процедура вывода кинетических уравнений для калибровочно-инвариантных вигнеровских функций распределения в своей реализации принципиальных трудностей уже не содержит. Зато предполагает проведение ряда весьма громоздких выкладок, привести которые подробно в рамках настоящей работы не представляется возможным. Чтобы проследить характерные приемы и методику этих выкладок, можно

обратиться к работам [34,40]. В этом разделе будут приведены конечные результаты оговоренных выкладок в виде собственно системы кинетических уравнений для низкотемпературного газа водородоподобных атомов во внешнем электромагнитном поле. Эти уравнения, помимо слагаемых, учитывающих влияние внешнего поля, содержат и слагаемые, ответственные за учет среднего

или самосогласованного поля, получение которых подробно изложено в [40].

Итак, кинетические уравнения для калибровочно-инвариантных функций распределения свободных заряженных фермионов первого и второго сортов (электронов и остовов водородоподобных атомов) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) + \frac{\partial \varepsilon^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \varepsilon^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} &= \mathbf{F}_L^{(1)} \frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \\ \frac{\partial}{\partial t} f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) + \frac{\partial \varepsilon^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \varepsilon^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} &= \mathbf{F}_L^{(2)} \frac{\partial f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \varepsilon_1(\mathbf{p}) - U^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) - U(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f), \quad \varepsilon_1(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m_1}, \\ \varepsilon^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \varepsilon_2(\mathbf{p}) - U^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) + U(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f), \quad \varepsilon_2(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m_2}, \end{aligned} \quad (72)$$

силы Лоренца, действующие на оба сорта фермионов, определяются обычным образом:

$$\mathbf{F}_L^{(1)} \equiv e \left\{ \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{p}}{m_1 c} \times \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t) \right\}, \quad \mathbf{F}_L^{(2)} \equiv -e \left\{ \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{p}}{m_2 c} \times \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t) \right\}. \quad (73)$$

Кроме того, в (72) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} U^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) &\equiv \frac{e^2}{\nu} \sum_{\mathbf{p}'} f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}') v(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad U^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) \equiv \frac{e^2}{\nu} \sum_{\mathbf{p}'} f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}') v(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ U(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) &\equiv \frac{e}{\nu} \int d\mathbf{x}' v(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left[\mathbf{d}_{\alpha_1' \alpha_3'} \sum_{\mathbf{p}_3} \frac{\partial f_{\alpha_3', \alpha_1'}^{(0)}(\mathbf{x}', \mathbf{p}_3)}{\partial \mathbf{x}'} - e \left(\sum_{\mathbf{p}_3} f^{(1)}(\mathbf{x}', \mathbf{p}_3) - \sum_{\mathbf{p}_3} f^{(2)}(\mathbf{x}', \mathbf{p}_3) \right) \right], \end{aligned} \quad (74)$$

причем

$$v(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \frac{1}{\nu} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} v(\mathbf{k}), \quad \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \approx -i\mathbf{k} \mathbf{d}_{\alpha\beta}, \quad (75)$$

Величина $v(\mathbf{k})$ в (74), (75) по-прежнему дается формулой (42). При получении уравнений (71) и выражений (72), (74) использовались кулоновская калибровка для внешнего электромагнитного поля

$$\operatorname{div} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (76)$$

и выражение для поляризационной матрицы $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ (см. (28), (30)) в приближении «точечного» атома:

где тензор дипольных моментов атома определен формулой (68).

Для калибровочно-инвариантной вигнеровской функции распределения $f_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ кинетическое уравнение имеет вид более сложный благодаря еще и тому обстоятельству, что эта функция от координат и импульса остается одночастичной матрицей плотности по индексам α_1, α_2 :

$$\frac{\partial f_{\alpha_1, \alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial t} + i \left[\varepsilon^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), f^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \right]_{\alpha_1 \alpha_2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \varepsilon^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial f^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \varepsilon^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right]_{\alpha_1 \alpha_2}, \quad (78)$$

где операции типа $[A, B]_{\alpha_1\alpha_2}$, $\{A, B\}_{\alpha_1\alpha_2}$ определяются формулами (70). Для величины $\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, определяющей эволюцию функции распределения атомов в соответствии с уравнением (78), в результате несложных, но весьма громоздких вычислений приходим к выражению:

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \varepsilon_{\alpha_1}(\mathbf{p})\delta_{\alpha_1\alpha_2} + U_{\alpha_1\alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) + U_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) + U_{\alpha_1\alpha_2}^{(e)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f), \quad (79)$$

где также введены обозначения

$$U_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) = -\frac{1}{\varphi} \int d\mathbf{x}' v(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sum_{\mathbf{p}'} \left(\mathbf{d} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(\mathbf{d} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \right)_{\alpha_1'\alpha_2'} f_{\alpha_1'\alpha_2'}^{(0)}(\mathbf{x}', \mathbf{p}') -$$

$$-\frac{e}{\varphi} \int d\mathbf{x}' v(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left(\mathbf{d} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(\sum_{\mathbf{p}'} f^{(1)}(\mathbf{x}', \mathbf{p}') - \sum_{\mathbf{p}'} f^{(2)}(\mathbf{x}', \mathbf{p}') \right),$$

$$U_{\alpha_1\alpha_2}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \equiv \frac{4\pi}{\varphi} \sum_{\mathbf{p}'} (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^{-2} ((\mathbf{p} - \mathbf{p}') \mathbf{d})_{\alpha_1\alpha_2} f_{\alpha_1'\alpha_2'}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}') ((\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{d})_{\alpha_1'\alpha_2'},$$

$$U_{\alpha_1\alpha_2}^{(e)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) \equiv \left(\mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{p}}{Mc} \times \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t) \right) \mathbf{d}_{\alpha_1\alpha_2}. \quad (80)$$

Система связанных уравнений, выраженная формулами (71)–(80), представляет собой решение заявленной в настоящей работе задачи – построения кинетики низкотемпературного газа водородоподобных атомов во внешнем электромагнитном поле с учетом самосогласованного поля, то есть в бесстолкновительном приближении. В этой связи уместно напомнить, что главное условие справедливости бесстолкновительного приближения и, следовательно, уравнений (71), (78), выражается соотношением (см., например, [31,34,40]):

$$\tau_0 \ll t \ll \tau_r, \quad (81)$$

где τ_0 — время хаотизации, о котором упоминалось выше, и τ_r — время релаксации системы за счет столкновений между частицами (подробнее об этих характерных временах см. в [31]). Время релаксации τ_r определяется именно интенсивностью взаимодействия \hat{V} , точнее, интегралом столкновений, который

квадратичен по взаимодействию (см. (17)). Время релаксации стремится к бесконечности, $\tau_r \rightarrow \infty$, при $\hat{V} \rightarrow 0$ (в нашей статье последнее соотношение и должно соответствовать пренебрежению интегралом столкновений). Иными словами, время релаксации велико в случае малого взаимодействия. Поскольку время хаотизации от интенсивности взаимодействия вовсе не зависит, условие (81) для многих систем вполне реалистично.

В заключение раздела отметим, что в пренебрежении самосогласованным полем уравнения (71), (78) сильно упрощаются и переходят в кинетические уравнения для компонентов системы (в том числе, и нейтральных) во внешнем электромагнитном поле. Однако, как легко убедиться, в таком приближении кинетические уравнения перестают быть связанными, то есть компоненты системы эволюционируют независимо друг от друга:

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) + \frac{\mathbf{p}}{m_1} \frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t)}{\partial \mathbf{x}} = e \left\{ \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{p}}{m_1 c} \times \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t) \right\} \frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) + \frac{\mathbf{p}}{m_2} \frac{\partial f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t)}{\partial \mathbf{x}} = -e \left\{ \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{p}}{m_1 c} \times \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t) \right\} \frac{\partial f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}},$$

$$\frac{\partial f_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t)}{\partial t} \approx -i [\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t), f(\mathbf{x}, \mathbf{p})]_{\alpha_1\alpha_2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t)}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t)}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\alpha_1\alpha_2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t)}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right]_{\alpha_1\alpha_2}, \quad (82)$$

где

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv \varepsilon_{\alpha_1}(\mathbf{p})\delta_{\alpha_1\alpha_2} + \left(\mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{p}}{Mc} \times \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t) \right) \mathbf{d}_{\alpha_1\alpha_2}, \quad \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\alpha} + \mathbf{p}^2/2M.$$

7. Заключение

Таким образом, нами предложен микроскопический подход к построению кинетических уравнений (71)–(80) для всех компонентов слабоионизованного и слабовозбужденного газа водородоподобных атомов во внешнем электромагнитном поле в области низких температур. В отсутствие внешнего электромагнитного поля полученные уравнения совпадают с кинетическими уравнениями с учетом среднего (самосогласованного) поля работ [34,40]. На основе отмеченных уравнений в этих работах был дан подробный анализ законов дисперсии собственных волн, которые могут распространяться в изучаемой системе, и найдены декременты их затухания. Продемонстрирована также возможность использования полученных дисперсионных соотношений для собственных волн в теории БЭК фотонов в ультрахолодных газах. В частности, результаты позволяют вычислить эффективные массы фотонов в таких средах. Наличие у фотона эффективной массы, как уже упоминалось во Введении (см. также [23–29]), является неперенным условием реализации БЭК фотонов.

Уравнения же (71)–(80), как уже отмечалось выше, должны лежать в основе изучения эффектов и явлений, связанных с взаимодействием низкотемпературных газов с внешним электромагнитным полем. Например, эти уравнения дают возможность изучать распространение вынужденных волн в изучаемых системах, включая различные резонансные явления. Последнее обстоятельство представляется важным с точки зрения возможности дополнительной накачки фотонов в среду внешним электромагнитным полем (лазером). Необходимость увеличения плотности фотонов в среде неизбежно возникает в процессе экспериментальной реализации режима с БЭК фотонов в ней.

Отдельное направление приложений полученных уравнений (71)–(80) открывается в том случае, когда входящее в них электромагнитное поле носит стохастический характер. В этой связи следует обратить внимание на последнее из уравнений (82) с учетом (83), более простое по сравнению с (78)–(80). Из-за случайного характера внешнего электромагнитного поля уравнение (82) с математической точки зрения является уравнением с пространственно неоднородным источником шума, зависящим от импульса частицы. Такие уравнения типичны для так называемых систем с активными флуктуациями, см., например, обзор литературы в [41]. В подобного рода системах возможна реализация так называемых «самоходных» (self-propelled) свойств. Иными словами, в такого рода средах возможно возникновение структурированных упорядоченных движений частиц за счет накопления и преобразования энергии внешнего стохастического поля. В частности, такое явление возможно в случае, когда структурные единицы системы имеют асимметрию «голова–хвост». Как легко увидеть

из (78)–(80), (82), (83), возбужденные атомы такую асимметрию имеют. В уравнениях такая асимметрия заключена в наличии дипольных моментов возбужденных атомов. Таким образом, низкотемпературные слабовозбужденные газы во внешнем случайном электромагнитном поле могут служить прототипом физической системы с активными флуктуациями. Однако этот вопрос требует отдельного изучения, результаты которого, к сожалению, невозможно поместить в рамки настоящей работы.

1. A.I. Akhiezer, I.A. Akhiezer, R.V. Polovin, A.G. Sitenko, and K.N. Stepanov, *Plasma Electrodynamics*, V.1. Linear Theory. Oxford-New York: Pergamon Press (1975) (*International Series of Monographs in Natural Philosophy*. Vol. 68).
2. A.I. Akhiezer, I.A. Akhiezer, R.V. Polovin, A.G. Sitenko, and K.N. Stepanov, *Plasma Electrodynamics*, V.2. Nonlinear Theory and Fluctuations. Oxford-New York: Pergamon Press, (1975) (*International Series of Monographs in Natural Philosophy*. Vol.69).
3. Edited by Hans Wilhelmsson, *Plasma Physics: Nonlinear Theory and Experiments*, Springer Science + Business Media LLC (1976).
4. Peter A. Sturrock, *Plasma Physics: An Introduction to the Theory of Astrophysical, Geophysical and Laboratory Plasmas*, Cambridge University Press, Cambridge (1994).
5. T.J.M. Boyd and J.J. Sanderson, *The Physics of Plasmas*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
6. B.M. Smirnov, *Physics of Weakly Ionized Gases: (problems and solutions)*: Mir, Moscow (1981).
7. Boris M. Smirnov, *Physics of Ionized Gases*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc. New York Chichester/Weinham/Brisbane/Singapore/Toronto (2001).
8. C.J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press (2002).
9. L.P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon Press, Oxford (2003).
10. M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
11. K.B. Davis, M.O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
12. L. Hau, S. Harris, Z. Dutton, and C. Behroozi, *Nature* **397**, (1999).
13. M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J. P. Marangos, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 633 (2005).
14. Yu.V. Slyusarenko and A.G. Sotnikov, *Condensed Matter Phys.* **9**, 459 (2006).
15. Y. Slyusarenko and A. Sotnikov, *Phys. Rev. A* **78**, 053622 (2008).
16. Y. Slyusarenko and A. Sotnikov, *Phys. Rev. A* **80**, 053604 (2009).
17. S.V. Peletminskii and Y.V. Slyusarenko, *J. Math. Phys.* **46**, 022301 (2005).

18. Ю.В. Слюсаренко, А.Г. Сотников, *J. Low Temp. Phys.* **150**, 618 (2008).
19. Y. Slyusarenko and A. Sotnikov, *Phys. Lett. A* **373**, 1392 (2009).
20. Ю.В. Слюсаренко, А.Г. Сотников, *ФНТ* **36**, 846 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 671 (2010)].
21. Y. Slyusarenko and A. Sotnikov, *Phys. Rev. A* **83**, 023601 (2011).
22. Ю.В. Слюсаренко, А.Г. Сотников, *ФНТ* **33**, 41 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 30 (2007)].
23. J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger, and M. Weitz, *Nature* **468**, 545 (2010).
24. J. Klaers, J. Schmitt, T. Damm, D. Dung, F. Vewinger, and M. Weitz, *Proc. SPIE* **8600**, 86000L (2013).
25. A.-W. de Leeuw, H.T.C. Stoof, and R.A. Duine, *Phys. Rev. A* **88**, 033829 (2013).
26. D.N. Sob'yanin, *Phys. Rev. E* **88**, 022132 (2013).
27. A. Kruchkov, and Yu. Slyusarenko, *Phys. Rev. A* **88**, 013615 (2013).
28. A. Kruchkov, *Phys. Rev. A* **89**, 033862 (2014).
29. N. Boychenko and Yu. Slyusarenko, *Condensed Matter Phys.* **18**, 43002 (2015).
30. J.T. Mendonça and H. Terças, *Phys. Rev. A* **95**, 063611 (2017).
31. A.I. Akhiezer and S.V. Peletminskii, *Methods of Statistical Physics*, Pergamon, Oxford (1981).
32. Yu.L. Klimontovich, *The Kinetic Theory of Electromagnetic Processes*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1983).
33. Yu.L. Klimontovich, A.Yu. Shevchenko, I.P. Yakimenko, and A.G. Zagorodny, *Contributions to Plasma Physics* **29**, 551 (1989).
34. Yu.V. Slyusarenko and O.Yu. Sliusarenko, *J. Math. Phys.* **58**, 113302 (2017).
35. N. Bogolyubov, *Problems of Dynamical Theory in Statistical Physics*, Providence College, Providence, RI (1959).
36. S. Peletminsky and Y. Slyusarenko, *Physica A* **210**, 165 (1994).
37. S.O. Nikolayenko and Yu.V. Slyusarenko, *J. Math. Phys.* **50**, 083305 (2009).
38. O.Yu. Sliusarenko, A.V. Chechkin, and Yu.V. Slyusarenko, *J. Math. Phys.* **56**, 043302 (2015).
39. A.S. Peletminskii, S.V. Peletminskii, and Yu.V. Slyusarenko, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **50**, 145301 (2017).
40. Yu.V. Slyusarenko and O.Yu. Sliusarenko, *Ab Initio Quantum-statistical Approach to Kinetic Theory of Low-temperature Dilute gases of Hydrogen-like Atoms*, e-print arXiv:1612.02245 [cond-mat.stat-mech] (2016).
41. S. Fujita, *Introduction to Non-equilibrium Quantum Statistical Mechanics*, Saunders, W.B. Co Ltd, December (1966).

Кінетика низькотемпературного газу воднеподібних атомів у зовнішньому електромагнітному полі

А.Г. Загородний, Ю.В. Слюсаренко, С.М. Шульга

Розвинуто мікроскопічний підхід до послідовної побудови кінетичної теорії низькотемпературних розріджених газів воднеподібних атомів у зовнішньому електромагнітному полі. Підхід базується на формулюваннях методу вторинного квантування при наявності зв'язаних станів частинок. Вважається, що зв'язаний стан (наприклад, воднеподібний атом лужного металу) формується двома зарядженими ферміонами різних сортів — валентним електроном та остовом. В основу виведення кінетичних рівнянь покладено метод скороченого опису релаксаційних процесів. У рамках розвинутого підходу здобуто систему кінетичних рівнянь для вігнерівських функцій розподілу вільних ферміонів обох сортів та їх зв'язаних станів — воднеподібних атомів із урахуванням впливу на систему зовнішнього й самоузгодженого (середнього) полів. Одержані рівняння руху для вігнерівських функцій розподілу повинні слугувати основою для аналізу нерівноважних ефектів та явищ, пов'язаних зі впливом зовнішнього електромагнітного поля на низькотемпературні гази лужних металів.

Ключові слова: кінетична теорія, низькотемпературні гази, пари лужних металів, воднеподібна плазма, зовнішнє електромагнітне поле, вігнерівські функції розподілу, кінетичні рівняння.

Kinetics of low-temperature gas of hydrogen-like atoms in external electromagnetic field

A.G. Zagorodny, Yu.V. Slyusarenko, and S.N. Shulga

A microscopic approach is developed to consistent construction of kinetic theory of low temperature dilute gases of hydrogen-like atoms in an external electromagnetic field. The approach is based upon the formulations of the secondary quantization method in the presence of bound states of the particles. It is supposed that the bound state (for example, hydrogen-like atom of alkali metal) is formed by two charged fermions of different sorts, namely — the valence electron and the frame. The basis for deduction of kinetic equations is the method of reduced description of relaxation processes. In the framework of the developed method a system of kinetic equations is obtained, that refers to Wigner distribution functions of free fermions of both sorts and their bound states — hydrogen-like atoms with account of impact of external and self-consistent (mean) fields. The obtained equations of motion for the Wigner distribution functions must serve as a basis for the analysis of non-equilibrium effects and of the phenomena connected with the influence of the external electromagnetic field upon the low temperature gases of alkali atoms.

Keywords: kinetic theory, low temperature gases, alkali metals vapors, hydrogen-like plasma, external electromagnetic field, Wigner distribution functions, kinetic equations.