

Стохастическое движение вихревых нитей в He II под действием случайной силы

С.К. Немировский

Институт теплофизики, пр. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: nemir@itp.nsc.ru

Статья поступила в редакцию 10 апреля 2018 г., опубликована онлайн 28 августа 2018 г.

Сформулирована ланжевеновская динамика — стохастическое движение вихревых нитей в He II под действием случайной силы. Изложен функциональный формализм, являющийся модификацией метода, разработанного ранее Мигдалом для работы со стохастической динамикой классических вихревых нитей. В частности, стартуя с уравнения ланжевеновского типа, получено функциональное уравнение Фоккера–Планка для характеристического функционала. На основе этого уравнения и в предположении, что коррелятор случайной силы удовлетворяет флуктуационно-диссипативной теореме, исследовано термодинамическое равновесие в системе хаотических квантованных вихрей. Рассмотрен случай неподвижного гелия, а также случай прототока с постоянным значением относительной скорости нормальной и сверхтекучей компонент. Обсуждены некоторые физические последствия полученных результатов.

Ключевые слова: ланжевеновская динамика, вихревые нити, He II, уравнение Фоккера–Планка.

1. Введение. Квантованные вихри и сверхтекучая турбулентность

В этом вводном разделе приведены основные результаты по теории квантовых вихрей. Кратко описана их динамика и приведен ряд математических соотношений, которые потребуются при изложении основного материала статьи. Также кратко дано представление о квантовой турбулентности.

Основываясь на квантово-механических свойствах сверхтекучей жидкости Фейнманом [1] и Онзагером [2], предсказано, что вихревое движение He II реализуется очень специфическим способом. В частности, они предположили, что в гелии возникают одномерные особенности, или вихревые нити, на которых нарушается условие потенциальности сверхтекучей скорости $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$. Вихревую нить можно описать в параметрическом виде функцией $\mathbf{s}(\xi, t)$, где \mathbf{s} — радиус-вектор точек линии, а параметр ξ «пересчитывает» точки линии, часто величина ξ является параметром длины дуги (см. рис. 1). Набор линий $\{\mathbf{s}(\xi, t)\}$ эволюционирует, подчиняясь уравнениям движения и граничным условиям. Вокруг вихревых нитей возможно круговое движение или циркуляция сверхтекучей компоненты гелия. Квантово-механические свойства сверхтекучей жидко-

сти накладывают ограничения на круговое движение. В частности, циркуляция сверхтекучей скорости принимает только определенные, квантованные значения

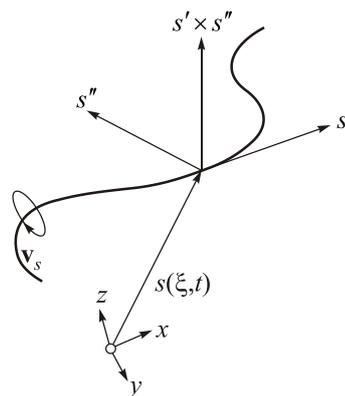


Рис. 1. Схематическое изображение вихревой линии в произвольной системе координат (изображенной внизу). Каждая точка вихревой линии $\mathbf{s}(\xi, t)$ определяется декартовыми координатами x_i, y_i, z_i и параметром ξ вдоль линии. Векторы \mathbf{s}' , \mathbf{s}'' и $\mathbf{s}' \times \mathbf{s}''$ — это тангенциальный вектор, вектор локальной кривизны и вектор бинормали, совпадающий с направлением локально-индуцированной скорости $\dot{\mathbf{s}}$ точки $\mathbf{s}(\xi, t)$ вихревой линии.

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = n\kappa, \quad (1)$$

где n — целое число. Общепринято считать, что вихри с $n > 1$ неустойчивы, в дальнейшем положим $n = 1$. Интеграл вычисляется вдоль любого контура, охватывающего нить, а величина κ (квант завихренности) равна

$$\kappa = 2\pi\hbar / m = 9.97 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}. \quad (2)$$

Здесь \hbar — постоянная Планка, а m — масса атома гелия. Поле завихренности $\omega(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}_s$ устроено таким образом, что $\omega(\mathbf{r}) = 0$ вне линии, и $\omega(\mathbf{r}) = \infty$ в точках нити $\mathbf{s}(\xi, t)$ и направлено вдоль тангенциального вектора. Формально такое поле завихренности $\omega(\mathbf{r})$ можно записать следующим образом:

$$\omega(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}_s = \kappa \int \mathbf{s}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi, t)) d\xi, \quad (3)$$

где интегрирование происходит вдоль нити. Таким образом, квантовые вихри ведут себя абсолютно идентично тонким вихревым трубкам, изучаемым в классической гидродинамике, за исключением того, что циркуляция квантованная. Кроме того, классические вихревые трубки — это всего лишь удобная и плодотворная математическая модель, в то время как квантовые вихри являются реальными объектами.

Используя поле завихренности $\omega(\mathbf{r})$ (3), индуцированное вихревой линией, можно легко выписать скорость элементов вихревой нити $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$. Эта скорость выражается с использованием закона Био–Савара:

$$\dot{\mathbf{s}}_i(\xi, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{s}(\xi', t) - \mathbf{s}(\xi, t)] \times \mathbf{s}'_{\xi'}}{|\mathbf{s}(\xi', t) - \mathbf{s}(\xi, t)|^3} d\xi'. \quad (4)$$

Следующим важным фактором, определяющим динамику вихревых линий, и который мы сейчас обсудим, является взаимодействие между квантовыми вихрями и нормальной компонентой. Этот феномен является специфическим для квантовых жидкостей и не имеет никакой аналогии в теории вихревых трубок в классических жидкостях. Как описано в книге Доннелли [3], движение нормальной компоненты представляет собой просто дрейф (со скоростью \mathbf{v}_n) квазичастиц — фононов и ротонов, которые образуют эту компоненту. Энергия этих квазичастиц зависит от сверхтекучей скорости \mathbf{v}_s (точнее, от относительной скорости $\mathbf{v}_{ns} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$) и поэтому является сильно изменяющейся функцией вблизи линии вихря. Другими словами, существует эффективный потенциал, описывающий взаимодействие между квазичастицами и вихревой линией. Это взаимодействие приводит к рассеянию квазичастиц на вихревой линии во время относительного движения и, соответственно, обмену импульсом. Разумеется, этот эффект влияет на движение вихревой нити.

Отсылая опять к книге Доннелли [3], приведем окончательный результат для движения квантованной вихревой нити в сверхтекучем гелии:

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{v}_s + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i) - \alpha' \mathbf{s}' \times \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i). \quad (5)$$

Величины α и α' очень важны для исследования динамики вихревой нити, они являются функцией температуры T и давления P (слабо). Как правило, они малы везде, кроме области, близкой к λ -точки. Величина α' существенно меньше, чем α , и нередко опускается в расчетах [4].

Рассмотрим энергию течения, создаваемого вихревой структурой. Энергия E системы линейных вихрей определяется как (см. подробно в книгах [5–7]):

$$E = \frac{1}{2} \int \rho_s \mathbf{v}_s^2 d^3\mathbf{r} = \frac{\rho_s \kappa^2}{8\pi} \sum_{j,i} \int_0^{L_j} \int_0^{L_i} \frac{\mathbf{s}'_i(\xi_i) \cdot \mathbf{s}'_j(\xi_j)}{|\mathbf{s}_i(\xi_i) - \mathbf{s}_j(\xi_j)|} d\xi_i d\xi_j. \quad (6)$$

Вычисляя функциональную производную $\delta E(\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\}) / \delta \mathbf{s}(\xi_0, t)$, получим гамильтоновскую форму уравнения движения для линейных элементов линии $\mathbf{s}_j(\xi_j)$:

$$\frac{\delta E(\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\})}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} = \rho_s \kappa \mathbf{s}'(\xi_0) \times \dot{\mathbf{s}}_i(\xi_0), \quad (7)$$

где $\dot{\mathbf{s}}_i(\xi_0)$ является скоростью вихревой линии, выраженной законом Био–Савара (4).

Что касается импульса, связанного с квантовыми вихрями, то в теории вихревых движений оперируют с так называемым импульсом Лэмба (см. [3])

$$\mathbf{P} = \frac{\rho_s \kappa}{2\mathcal{V}} \sum_j \int_0^{L_j} \mathbf{s}_j(\xi_j) \times \mathbf{s}'_j(\xi_j) d\xi_j. \quad (8)$$

Кроме описанной детерминистской эволюции, имеется еще один, стохастический элемент динамики — это случайные столкновения нитей друг с другом с последующим перезамыканием, или реконнекцией (reconnection). Изучение вихрей и вихревой динамики в рамках описанной процедуры называется методом вихревых нитей (vortex filament method (VFM)).

Термин «сверхтекучая турбулентность» (СТ) был введен Фейнманом в своем основополагающем труде [1], где он объяснил результаты работы Гортера и Меллинка (см. [8]). Авторы этой работы наблюдали резкое увеличение перепада температуры в противотоке He II, когда скорость превышает определенное, достаточно небольшое значение. Фейнман связал кризис Гортера и Меллинка, появлением в системе неупорядоченного набора квантованных вихревых линий или вихревого клубка, который оказывает сопротивление потоку нормальной компоненты, переносящему энтропию. Фейн-

ман также предложил качественный сценарий развития вихревого клубка. В частности, он описал механизмы, которые ведут к росту плотности вихревых нитей, а также предложил законы распада вихревого клубка. Идеи Фейнмана были развиты в серии экспериментальных работ Вайнена, который построил феноменологическую теорию сверхтекучей турбулентности. Первое наглядное подтверждение идей Фейнмана было получено три десятилетия спустя в работе Шварца [4], который продемонстрировал появление вихревого клубка в прямом численном моделировании. Примером вихревого клубка, который развивается в противотоке He II изначально гладких (шести) вихревых колец, изображен на рис. 2.

Еще спустя почти три десятилетия была проведена серия экспериментов по визуализации потоков гелия. Авторы наблюдали массу неупорядоченных вихрей. Генерация квантовой турбулентности осциллирующими объектами является очень важной темой в этой области (см., например, [9–12]).

В настоящее время теория квантовой турбулентности является активно развивающейся областью, имеющей большое количество приложений, как в теории сверхтекучести, так и в других областях физики. В качестве примеров можно указать теорию классической турбулентности [13–16], теорию космических струн [17], исследование дислокаций в твердых телах [18], а также теорию фазовых переходов [19]. Концепция квантовой турбулентности также используется в исследованиях кварк-глюонной плазмы [20] и в физике нейтронных звезд [21].

Еще одно обоснование интереса к квантовой турбулентности, привлекательное для теоретиков, состоит в том, что теория сверхтекучей турбулентности является элегантной и сложной проблемой статистической физики хаотического набора струноподобных объектов, с

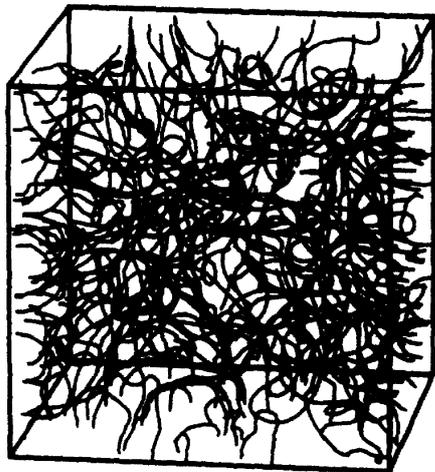


Рис. 2. Вихревой клубок в противотоке He II (см. текст). Рисунок взят из статьи Шварца [4].

нелинейным и нелокальным взаимодействием. Дополнительную сложность придают перезамыкания, приводящие к слиянию или расщеплению вихревых петель (см. обзор [22]).

В работе рассматривается один частный случай хаотического поведения вихревых нитей, а именно: вихревой клубок, находящийся в состоянии термодинамического равновесия. Статья представляет собой совокупное изложение серии предварительных результатов, представленных на различных научных совещаниях, фрагменты которых частично опубликованы в работах [22–24]. Случай термодинамического равновесия является необыкновенно важным, и он имеет множество приложений. Самое главное из них — это теория фазовых переходов, инициированных вихревыми нитями. Реализация поставленной задачи основана на ланжевеновской формулировке для динамики хаотических вихрей, развитой Мигдалом [25]. Во втором разделе мы изложим технику, предложенную Мигдалом. Третий и четвертый разделы посвящены доказательству существования термодинамического равновесия в системе квантованных вихрей на основании ланжевеновской постановки задачи и решения соответствующего уравнения Фоккера–Планка. Рассмотрен случай неподвижного гелия, а также случай противотока с постоянным значением относительной скорости нормальной и сверхтекучей компонент. В заключении обсуждаются некоторые физические последствия полученных результатов.

2. Ланжевеновская постановка задачи

С целью создания математического аппарата для работы со стохастической динамикой вихревых нитей Мигдал [25] разработал функциональный формализм. В частности, стартуя с уравнения ланжевеновского типа, он вывел функциональное уравнение Фоккера–Планка для характеристического функционала $W(\{P_j(\xi_j)\})$. Основной целью этого формализма была разработка стратегии для описания турбулентности в терминах стохастической динамики вихревых нитей. Первоначально эта работа была проделана для классических, очень тонких вихревых трубок в обычных жидкостях. Что касается квантовых вихрей, этот случай соответствует отсутствию нормальной компоненты, что имеет место при нулевой температуре. Обобщение на случай конечной температуры будет выполнено позднее, в следующем разделе.

Основная идея является стандартной и состоит в введении случайной (ланжевеновской) силы $\mathbf{z}(\xi, t)$ в уравнение движения вихревой нити (5) (с равными нулю коэффициентами α, α')

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_i + \zeta(\xi, t). \quad (9)$$

Напомним, $\dot{\mathbf{s}}_i$ — это самоиндуцированная скорость Био–Савара, входящая в правую часть выражения (4).

Конечно, поскольку речь идет об уравнении для скорости $\dot{\mathbf{s}}$ движения (а не ускорения), более правильно было бы говорить не о случайных силах, а о случайных скоростях, вызванных, например, хаотически расположенными вихрями, окружающими данный элемент вихревой нити. Мы, однако, будем придерживаться терминологии, принятой при изучении ланжевеновских процессов и называть случайное воздействие «силой» (или «перемешивающей силой»). Предполагается, что перемешивающая случайная сила является белым шумом во времени. Для исследования турбулентных процессов Мигдал предположил, что пространственная часть корреляционной функции $F(\xi - \xi')$ сосредоточена в области больших масштабов, порядка размера системы. Окончательно корреляционная функция имеет вид

$$\langle \zeta_\alpha(\xi, t) \cdot \zeta_\beta(\xi', t') \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t') F(\xi - \xi'). \quad (10)$$

Для вычисления многих средних величин удобно пользоваться характеристическим функционалом $W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\})$, предложенным Мигдалом [25],

$$W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\}) = \left\langle \exp \left[i \sum_j \int_0^{L_j} \mathbf{P}_j(\xi_j) \cdot \mathbf{s}'_j(\xi_j) d\xi_j \right] \right\rangle. \quad (11)$$

Вычисление многих средних величин в этом случае сводится к дифференцированию характеристического функционала по аргументу $\mathbf{P}_j(\xi_j)$ (см. детали в статье [22,25]). Далее мы опустим индекс j для маркировки различных петель и будем писать $\int d\xi$ вместо $\sum_j \int d\xi_j$. Усреднение в формуле (11) производится по ансамблю случайных сил $\zeta(\xi, t)$. Если ввести функцию распределения вероятности $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t)$ в пространстве вихревых конфигураций $\{\mathbf{s}(\xi)\}$, тогда формулу (11) можно записать в виде интеграла

$$W(\{\mathbf{P}(\xi)\}) = \int \mathcal{D}\mathbf{s}(\xi) \mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t) \exp \left[i \int_0^{L_j} \mathbf{P}(\xi) \cdot \mathbf{s}'(\xi) d\xi \right]. \quad (12)$$

Отсюда видно, что характеристический функционал — это просто преобразование Фурье от плотности распределения вероятности в функциональном пространстве.

Выведем уравнение эволюции величины $W(\{\mathbf{P}(\xi)\})$. Мигдал назвал полученное соотношение уравнением Фоккера–Планка, хотя было бы правильнее называть это равенство уравнением Хопфа (см., например, [26]), резервируя термин «уравнение Фоккера–Планка» для эволюции функционала вероятности $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t)$. Принимая во внимание, что по определению $W(\{\mathbf{P}(\xi)\})$ за-

висит от времени только через переменную $\mathbf{s}_\alpha(\xi, t)$, и используя цепное правило для функциональной производной, мы получим следующее уравнение для эволюции величины $W(\{\mathbf{P}(\xi)\})$:

$$\begin{aligned} \frac{dW(\{\mathbf{P}(\xi)\}, t)}{dt} &= \\ &= \left\langle i \int d\xi \dot{\mathbf{s}}_{i\alpha}(\xi, t) \mathbf{P}'_\alpha(\xi, t) \exp \left(i \int d\xi \mathbf{s}_\alpha(\xi, t) \cdot \mathbf{P}'_\alpha(\xi, t) \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle i \int d\xi [\dot{\mathbf{s}}_{i\alpha} + \zeta_\alpha(\xi, t)] \cdot \mathbf{P}'_\alpha(\xi, t) \exp \left(i \int d\xi \mathbf{s}_\alpha(\xi, t) \cdot \mathbf{P}'_\alpha(\xi, t) \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Второе слагаемое (в квадратных скобках в правой части уравнения) может быть преобразовано с помощью хорошо известного свойства гауссовых величин, именно, с помощью соотношения Новикова–Фурутцу (см. [25]). Применяя это правило для флуктуирующей экспоненты, мы получаем

$$\langle W(\xi, t) \zeta_\alpha(\xi_1, t) \rangle = \int d\tilde{\xi} \frac{\delta W(\tilde{\xi}, t)}{\delta \zeta_\beta(\tilde{\xi}, t)} \langle \zeta_\beta(\tilde{\xi}, t) \zeta_\alpha(\xi_1, t) \rangle. \quad (14)$$

Функциональная производная $\delta W(\xi, t) / \delta \zeta_\alpha(\tilde{\xi}, t)$ вычисляется с использованием цепного правила

$$\frac{\delta W(\xi, t)}{\delta \zeta_\alpha(\tilde{\xi}, t')} = \int d\xi_2 \frac{\delta W(\xi, t)}{\delta \mathbf{s}_\beta(\xi_2, t)} \frac{\delta \mathbf{s}_\beta(\xi_2, t)}{\delta \zeta_\alpha(\tilde{\xi}, t')}, \quad (15)$$

где функция Грина $\delta \mathbf{s}_\beta(\xi_2, t) / \delta \zeta_\alpha(\tilde{\xi}, t')$ при $t \rightarrow t'$ удовлетворяет условию

$$\frac{\delta \mathbf{s}_\beta(\xi_2, t)}{\delta \zeta_\alpha(\tilde{\xi}, t')} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta(\xi_2 - \tilde{\xi}). \quad (16)$$

Собрав все выкладки вместе и подставляя результат в (13), получим (заменяв переменную интегрирования ξ на ξ_1),

$$\begin{aligned} \frac{dW(\{\mathbf{P}(\xi)\}, t)}{dt} &= -\frac{1}{2} \iint d\xi_1 d\xi_2 \mathbf{P}'_\alpha(\xi_1) \mathbf{P}'_\alpha(\xi_2) F(\xi_1 - \xi_2) + \\ &+ i \int d\xi_1 \mathbf{P}'_\alpha(\xi_1) \dot{\mathbf{s}}_i. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (17) — искомое эволюционное уравнение Фоккера–Планка для характеристического функционала $W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\})$ (см. [25]). В этой форме оно весьма неудобно, так как переменные $\mathbf{s}(\xi)$ не полностью исключены, они входят в выражение $\dot{\mathbf{s}}_i$ для формулы Био–Савара. Исключение функции $\mathbf{s}(\xi)$ может быть выполнено с помощью \mathbf{k} -представления. В \mathbf{k} -пространстве закон Био–Савара гласит

$$\dot{\mathbf{s}}(\xi, t) = \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int i\mathbf{k} \times \mathbf{s}' \exp i\mathbf{k} [\mathbf{s}(\xi, t) - \mathbf{s}(\xi_2, t)] d\xi_2 \frac{4\pi d^3\mathbf{k}}{k^2}. \quad (18)$$

Эту формулу легко получить, используя \mathbf{k} -представление для поля завихренности (3) и формулу $\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = i\mathbf{k} \times \mathbf{w}_{\mathbf{k}} / k^2$. Учтем далее, что s' равно $\delta / i\delta\mathbf{P}$ (применительно к экспоненте), перепишем уравнение (17) в следующем виде:

$$\frac{\partial W(\{\mathbf{P}(\xi)\}, t)}{\partial t} = \int d\xi_1 \mathbf{P}'_{\alpha}(\xi_1) \int d\xi_2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \times \left[-\frac{1}{2} F(\mathbf{k}) \mathbf{P}'_{\alpha}(\xi_2) - i \frac{e_{\alpha\beta\gamma} k_{\gamma}}{k^2} \frac{\delta}{\delta \mathbf{P}_{\beta}(\xi_2)} \right] \times W[\mathbf{P}(\xi) + \mathbf{k}\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi), t]. \quad (19)$$

В последующем соотношение будем называть как «уравнение Мигдала». Здесь функция $\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi)$ определяется с помощью ступенчатой функции $\theta(\xi)$:

$$\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi) = \theta(\xi - \xi_1) - \theta(\xi - \xi_2). \quad (20)$$

Эта функция появилась из использования преобразования Фурье для выражения $\mathbf{s}(\xi, t) - \mathbf{s}(\xi_2, t)$, входящего в закон Био–Савара. Функциональное уравнение (19) является аналогом известного уравнения Хопфа [26] для классической турбулентности, соответственно, оно также необычайно сложно. В настоящее время не имеется никаких перспектив решить эту проблему. Тем не менее уравнение (19) позволяет сделать некоторые выводы, касающиеся стохастической динамики вихрей (см. оригинальную статью [25]). Мигдал также предложил способ изучения этого уравнения численно на основе вариационного принципа. Мы хотели бы обратить внимание читателей, что процессы пересоединения и рекомбинации вихревых петель полностью остаются вне рассмотрения в данном формализме.

3. Термодинамическое равновесие вихрей в покоящемся гелии

Функциональный формализм Мигдала, описанный в разд. 2, хотя он и не рассматривал процессы реконнекций, является очень сложным и нуждается в существенных упрощениях. Имеется один физический важный случай, когда уравнение Фоккера–Планка имеет точное решение — это случай термодинамического равновесия. Квантованные вихри играют фундаментальную роль в термодинамических свойствах квантовых жидкостей, сверхпроводников и других систем. Фазовые превращения, кинетические свойства, а также много других физических явлений связаны с появлением в системах квантованных вихрей и их динамикой. Так же, как и в случае квантовой турбулентности, вихревые нити могут развиваться в запутанные хаотические структуры — вихревые клубки. Поэтому чтобы описать любые термодинамические явления в квантовых жидкостях, содержащих вихревые клубки, необходимо иметь информацию относительно их структуры и статистики. Самый широко распространенный способ преодолеть

эту трудность состоит в том, чтобы трактовать вихревые петли как своего рода тепловые возбуждения и использовать термодинамические методы. Другими словами, предполагается, что набор хаотических вихревых петель находится в тепловом равновесии с основной системой (квантовой жидкостью).

Предположение о тепловом равновесии основано на фундаментальных физических принципах, если рассматривать квантованные вихри как подсистему, погруженную в термостат, с которым вихри обмениваются энергией. Роль термостата в данном случае играет соответствующее физическое поле, образующее сверхтекучую компоненту плюс тепловые возбуждения — квазичастицы.

Хорошо известно, что распределение Гиббса может быть альтернативно получено в рамках некоторых модельных задач, например, из кинетических уравнений или из уравнений Фоккера–Планка. Этот путь, конечно, не имеет такую большую общность как принцип максимальной энтропии, но он позволяет проследить динамические детали установления распределения Гиббса. Это, в свою очередь, может прояснить также динамические детали и механизмы разрушения равновесного состояния. В этом разделе мы выбираем этот способ и ставим своей целью изучить, как в рамках ланжевеновского подхода устанавливается тепловое равновесие в системе хаотических вихревых петель.

Чтобы показать это, сначала получим уравнение Фоккера–Планка, соответствующее ланжевеновской динамике вихревой петли. В отличие от рассмотренного выше изложения Мигдала (см. разд. 2), мы используем не характеристический функционал, а непосредственно функционал распределения вероятности. Кроме того, применим уравнение движения вихревой нити (5) со слагаемыми, отвечающими за взаимодействие с нормальной компонентой.

Рассмотрим динамику вихревых петель в трехмерном пространстве без границ. Выберем уравнение движения элементов вихревой линии в виде (5) с опущенным малым слагаемым, содержащим коэффициент α' :

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_i(\xi) - \alpha(\mathbf{s}' \times \dot{\mathbf{s}}_i) + \zeta(\xi, t), \quad (21)$$

где $\dot{\mathbf{s}}_i$ — самоиндуцированная скорость (4). Также в этом разделе исследуем случай, когда внешнее течение отсутствует, $\mathbf{v}_s = 0$, $\mathbf{v}_n = 0$. Предполагается, что корреляционная функция для ланжевеновской силы $\zeta(\xi, t)$ связана с температурой системы через флуктуационно-диссипативную теорему

$$\langle \zeta_{\alpha}(\xi_1, t) \cdot \zeta_{\beta}(\xi_2, t') \rangle = \frac{k_B T \alpha}{\rho_s \pi (\hbar / m)} \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(t - t') \delta_{\alpha\beta}. \quad (22)$$

Введем следующий функционал распределения вероятности случайной конфигурации вихревых нитей $\{\mathbf{s}(\xi)\}$:

$$\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t) = \langle \delta(\mathbf{s}(\xi) - \mathbf{s}(\xi, t)) \rangle, \quad (23)$$

где δ является дельта функционалом в пространстве конфигураций вихревых петель. Усреднение выполняется по ансамблю случайной силы. Эволюция величины $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \left\langle - \int d\xi \left\{ \frac{\delta \mathcal{P}}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \dot{\mathbf{s}}_{\text{det}} \right\} \right\rangle - \int d\xi \left\{ \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \langle \zeta(\xi, t) \mathcal{P} \rangle \right\}, \quad (24)$$

где $\dot{\mathbf{s}}_{\text{det}}$ — детерминированная часть скорости, определенная уравнением (5). Опуская стандартные детали (см., например, [27]), запишем следующее из (24) функциональное уравнение Фоккера–Планка для эволюции функционала распределения вероятности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \int d\xi \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \{ [\dot{\mathbf{s}}_i(\xi) + \alpha \mathbf{s}'(\xi) \times \dot{\mathbf{s}}_i(\xi)] \mathcal{P} \} + \\ + \iint d\xi d\xi' \frac{1}{2} \langle \zeta_\alpha(\xi) \cdot \zeta_\beta(\xi') \rangle \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\beta(\xi')} \mathcal{P} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $\langle \zeta_\alpha(\xi) \cdot \zeta_\beta(\xi') \rangle$ — корреляционная функция случайной силы, действующей на линию (см. (22)).

Наша цель теперь состоит в том, чтобы доказать, что уравнение (25) имеет решение в виде $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}) = \mathcal{N} \exp(-H\{\mathbf{s}\}/T)$, где \mathcal{N} — нормировочный множитель. Величина $H\{\mathbf{s}\}$ — энергия вихревой системы (см. уравнение (6)).

Мы начинаем доказательство с первого слагаемого в подынтегральном выражении (25). Используя параметризацию, в которой скорость $\dot{\mathbf{s}}_i(\xi_0)$ нормальна вихревой нити, перепишем (7) в виде

$$\dot{\mathbf{s}}_i(\xi) = \frac{1}{\rho_s \kappa} \mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta H(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)}. \quad (26)$$

Тогда первое слагаемое в подынтегральном выражении (25) имеет вид

$$\mathcal{N} \frac{1}{\rho_s \kappa} \int d\xi \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \left(\mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta H(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \exp(-H(\{\mathbf{s}\})/k_B T) \right). \quad (27)$$

Выполняя функциональное дифференцирование и используя тензорные обозначения, перепишем (27) в следующем виде (опускаем коэффициент перед интегралом):

$$\begin{aligned} \int d\xi \exp(-H\{\mathbf{s}\}/k_B T) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta \mathbf{s}'_\beta(\xi)}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \frac{\delta H(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}_\gamma(\xi, t)} + \\ + \int d\xi \exp(-H\{\mathbf{s}\}/k_B T) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left(\mathbf{s}'_\beta(\xi) \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \frac{\delta H(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}_\gamma(\xi, t)} \right) + \\ + (1/k_B T) \int d\xi \exp(-H\{\mathbf{s}\}/k_B T) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}'_\beta(\xi) \frac{\delta H(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}_\gamma(\xi, t)} \frac{\delta H(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi, t)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор. Функциональная производная $\delta \mathbf{s}'_\beta(\xi) / \delta \mathbf{s}_\alpha(\xi) \propto \delta_{\beta\alpha}$, по-

этому все члены тождественно исчезают из-за симметрии. Таким образом, обратимый (не связанный с диссипацией) член в исходном уравнении движения (5) не дает вклада в динамику функционала распределения вероятности. Принято говорить, что это дивергентно-свободное слагаемое. Понятно, что сказанное выше относится только к случаю теплового равновесия, т.е. справедливо только для решения Гиббса.

Последнее слагаемое в подынтегральном выражении (25) может быть преобразовано с помощью флуктуационно-диссипативной теоремы для линии (22) следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint d\xi d\xi' \frac{1}{2} \langle \zeta_\alpha(\xi) \cdot \zeta_\beta(\xi') \rangle \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\beta(\xi')} \mathcal{P} = \\ = \int d\xi \int d\xi' \frac{k_B T \alpha}{\rho_s \kappa} \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(t_1 - t_2) \delta_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\beta(\xi')} \times \\ \times \exp(-H\{\mathbf{s}\}/k_B T). \end{aligned} \quad (29)$$

Воспользовавшись соотношениями (7) и (26) и используя тензорные обозначения, легко убедиться, что получившееся выражение точно компенсирует второе слагаемое в подынтегральном выражении (25), как это и должно быть.

4. Тепловое равновесие вихревых линий в противотоке Не II

В этом разделе опишем динамику вихревой нити под действием случайной ланжевеновской силы в присутствии относительной скорости \mathbf{v}_{ns} . Мотивация данной темы обусловлена тем, что хаотическое множество вихревых нитей, так называемая квантовая турбулентность, развивается в противотоке сверхтекучего гелия без случайного перемешивания, поэтому важно сравнить оба механизма генерации вихревого клубка. Выберем уравнение движения вихревой линии элементов в виде соотношения (5) с опущенным малым слагаемым, содержащим коэффициент α' ,

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_i(\xi) + \mathbf{v}_s + \alpha \mathbf{s}'(\xi) \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \dot{\mathbf{s}}_i(\xi)) + \zeta(\xi, t). \quad (30)$$

Предполагается, что корреляционная функция для ланжевеновской силы $\zeta(\xi, t)$ удовлетворяет флуктуационно-диссипативной теореме (22). Уравнение Фоккера–Планка для эволюции во времени для функционала распределения вероятностей $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t) = \langle \delta(\mathbf{s}(\xi) - \mathbf{s}(\xi, t)) \rangle$ (см. определение (23)) может быть получено из уравнения движения (30) стандартным образом (см., например, [27] а также предыдущие два раздела)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \int d\xi \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \{ [\dot{\mathbf{s}}_i(\xi) + \mathbf{v}_s + \alpha \mathbf{s}'(\xi) \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \dot{\mathbf{s}}_i(\xi))] \mathcal{P} \} + \\ + \iint d\xi d\xi' \frac{1}{2} \langle \zeta_\alpha(\xi) \cdot \zeta_\beta(\xi') \rangle \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\beta(\xi')} \mathcal{P} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Нашей целью является продемонстрировать, что уравнение (31) имеет решение в виде распределения Гиббса

$$\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T}\right), \quad (32)$$

где гамильтониан $H_c(\{\mathbf{s}\})$ в присутствии относительной скорости \mathbf{v}_{ns} имеет вид

$$H_c(\{\mathbf{s}\}) = E(\{\mathbf{s}\}) - \mathbf{P}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s). \quad (33)$$

Здесь \mathbf{P} — это импульс Лэмба, определенный формулой (8). В обычной статистической механике, когда \mathbf{P} это истинный импульс частицы (или квазичастицы), справедливость уравнений (32), (33) очевидна и вытекает из преобразований Галилея. Так как импульс Лэмба не является «реальным» импульсом, справедливость соотношений (32), (33) не является очевидной и нуждается в детальной проверке. Далее мы приведем доказательство реализации распределения Гиббса в виде уравнения (32) с гамильтонианом (33).

В первую очередь мы приведем два тождества. Вариационная производная энергии вихрей по переменной $\mathbf{s}(\xi)$ связана с самоиндуцированной скоростью $\dot{\mathbf{s}}_i(\xi)$ Био–Савара следующим образом:

$$\dot{\mathbf{s}}_i(\xi) = \frac{1}{\rho_s \kappa} \mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} \Rightarrow \rho_s \kappa \mathbf{s}'(\xi) \times \dot{\mathbf{s}}_i(\xi) = \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)}. \quad (34)$$

Что касается вариационной производной от функционала $\mathbf{P}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$, то для постоянного вектора $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ имеет место следующее соотношение:

$$\rho_s \kappa \mathbf{s}'(\xi) \times \mathbf{v}_{ns} = \frac{\delta(\mathbf{P} \mathbf{v}_{ns})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)}. \quad (35)$$

В качестве следующего шага мы должны подставить распределение Гиббса (32) в уравнение Фоккера–Планка (31). В случае постоянного противотока величина \mathbf{v}_n является независимой от времени и пространственных координат, что допускает возможность работать в системе координат, где \mathbf{v}_n равна нулю.

Начнем с недиссипативных членов, это первые два слагаемых в квадратных скобках в первой строчке уравнения Фоккера–Планка (31). Легко проверить, что они преобразуются к следующему виду:

$$\int d\xi \exp\left(-\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T}\right) \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \left[\frac{1}{\rho_s \kappa} \mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} + \mathbf{v}_s \right] - \quad (36)$$

$$-\frac{1}{k_B T} \int d\xi \left[\frac{1}{\rho_s \kappa} \mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} + \mathbf{v}_s \right] \times \quad (37)$$

$$\times \left(-\frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} + \mathbf{s}'(\xi) \times \mathbf{v}_s \right) \exp\left(-\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T}\right)$$

Давайте проверим первую строку (36), которая включает в себя дифференцирование слагаемых внутри квадратной скобки:

$$\int d\xi \left\{ \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \left[\frac{1}{\rho_s \kappa} \mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} + \mathbf{v}_s \right] \right\} \exp\left(-\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T}\right). \quad (38)$$

Выполняя функциональное дифференцирование и используя тензорные обозначения, получим, что первое слагаемое в квадратных скобках пропорционально

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta}{\delta s_\alpha(\xi)} \left(\mathbf{s}'_\beta(\xi) \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta s_\gamma(\xi, t)} \right). \quad (39)$$

Функциональная производная $\delta \mathbf{s}'_\beta(\xi) / \delta s_\alpha(\xi) \propto \delta_{\beta\alpha}$, поэтому этот член исчезает в силу симметрии. Кроме того, функциональная производная от постоянной скорости \mathbf{v}_s , очевидно, также обращается в нуль, $\delta \mathbf{v}_s / \delta \mathbf{s}(\xi) = 0$.

Слагаемые в (37), могут быть переписаны следующим образом:

$$-\frac{1}{k_B T} \int d\xi \left\{ \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \left[\mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \right] - \right.$$

$$- \rho_s \kappa (\mathbf{s}'(\xi) \times \mathbf{v}_s) \left[\mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \right] +$$

$$\left. + \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \mathbf{v}_s - \rho_s \kappa (\mathbf{s}'(\xi) \times \mathbf{v}_s) \mathbf{v}_s \right\} \exp\left(-\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T}\right). \quad (40)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках обращается в нуль в силу симметрии, а четвертый член исчезает, так как произведение $\mathbf{s}'(\xi) \times \mathbf{v}_s$ нормально вектору \mathbf{v}_s . Остальные преобразуются к следующему выражению (мы опускаем фактор $-1/k_B T$ и выбираем параметризацию, где $\mathbf{s}'(\xi) \mathbf{s}'(\xi) = 0$):

$$\int d\xi \left[\frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \mathbf{v}_s - \rho_s \kappa (\mathbf{s}'(\xi) \times \mathbf{v}_s) \left(\mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \right) \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T}\right) =$$

$$= \int d\xi \left[-\mathbf{v}_s \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} + (\mathbf{s}'(\xi) \mathbf{v}_s) \left(\mathbf{s}'(\xi) \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \right) + \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \mathbf{v}_s \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T}\right). \quad (41)$$

В силу тождества (34) комбинация $\mathbf{s}'(\xi) \delta E(\{\mathbf{s}\}) / \delta \mathbf{s}(\xi, t) = 0$, и все члены уравнения (41) равны нулю.

Таким образом, обратимые (не связанные с диссипацией) члены в исходном уравнении движения (30) не приводят к эволюции функционала распределения вероятностей $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t)$. Мы опять говорим, что это дивергентно-свободный член. Понятно, что вышеизло-

женное относится только к случаю теплового равновесия, т.е. справедливо только для решения (32).

Группируем оставшиеся диссипативное и «ланжевенновское» слагаемые в уравнении Фоккера–Планка (31):

$$\int d\xi \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \{ \alpha \mathbf{s}'(\xi) \times [\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \dot{\mathbf{s}}_i(\xi)] \mathcal{P} \} + \iint d\xi d\xi' \frac{1}{2} \langle \zeta_\alpha(\xi) \cdot \zeta_\beta(\xi') \rangle \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\beta(\xi')} \mathcal{P} = 0. \quad (42)$$

Последнее слагаемое в подынтегральном выражении (42) может быть переписано с помощью флуктуационно-диссипативной теоремы (22) следующим образом:

$$\int d\xi \int d\xi' \frac{k_B T \alpha}{\rho_s \kappa} \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(t_1 - t_2) \delta_{\alpha, \beta} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\beta(\xi')} \mathcal{P}. \quad (43)$$

Подставляя $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t) = \mathcal{N} \exp(-H_c(\{\mathbf{s}\}) / k_B T)$ и применяя тождества (26) и (35), мы можем легко убедиться, что полученное выражение (43) точно компенсирует диссипативный член в выражении (42) (напомним, что мы работаем в системе отчета, где \mathbf{v}_n равна нулю). Это означает, что распределение Гиббса с гамильтонианом $H_c(\{\mathbf{s}\})$ (33) — действительно решение уравнения Фоккера–Планка, как это и должно быть в соответствии с общими физическими принципами. Важно отметить, что импульс Лэмба \mathbf{P} (8) сыграл роль реального импульса.

5. Заключение

Таким образом, исследуя ланжевенновскую динамику хаотического набора квантовых вихревых нитей, мы проследили механизм установления термодинамического равновесия в вихревом клубке. При анализе нашего доказательства можно видеть, что основная причина состоит в том, что случайная сила $\zeta(\xi, t)$, действующая на элементы вихревой нити, в уравнении Фоккера–Планка точно компенсирует диссипативный поток распределения вероятности. Причем компенсация происходит в подынтегральном выражении, иными словами, реализуется детальный баланс между накачкой и диссипацией. В свете этого наблюдения представляется естественным, что при возникновении других источников случайного воздействия на систему, например, при развитии неустойчивости в текущем гелии возможен переход в неравновесное (турбулентное) состояние.

На основании полученных результатов, описанных в статье, можно исследовать задачи по динамике вихревых нитей в термодинамическом приближении. Например, рост вихревых зародышей под действием термических флуктуаций, как это было сделано Иорданским [28] в случае идеальных вихревых колец. Другой пример ка-

сается равновесной (квазиравновесной) динамики вихрей вблизи точки фазового перехода, которая описывает рост плотности вихревых нитей при приближении к T_λ (см., например, [29,30]). В этом случае температура T является обычной температуры системы.

Можно исследовать, однако, задачи по стохастическому поведению вихревых нитей, безотносительно термодинамики, но когда корреляционная функция является белым шумом как в пространстве, так и во времени. Данная ситуация может реализоваться, например, когда изучаемая вихревая нить окружена ансамблем других вихревых нитей. В этом случае флуктуирующее дельта-коррелированное поле скоростей окружающего вихревого клубка играет роль «перемешивающей силы» для изучаемой вихревой нити. Температура в этом случае, в соответствии с флуктуационно-диссипативной теоремой, будет неким искусственным параметром, связанным с интенсивностью «перемешивающей силы». Другим близким примером статической задачи, где появляется искусственная температура, является известная модель Онзагера по статистической механике двумерных вихрей [31–33]. Схожие вопросы для классической турбулентности обсуждены в известной книге McComb [34].

Показано, что в противотоке He II также может быть реализовано состояние термодинамического равновесия вихревых линий. Это является замечательным результатом, так как обычно в этой ситуации рассматриваются только турбулентные явления. Соотношение (32) предназначено для вычисления статистической суммы и, соответственно, для определения различных свойств вихревого клубка. Примером реализации такой стратегии могут служить работы по статистической механике взаимодействующих струн (см., например, [35,36]). С использованием этой методики можно вычислить структурные факторы квантовой турбулентности, например, среднюю поляризацию вихревых петель, входящих в состав вихревого клубка в противотоке He II, а также анизотропию и среднюю кривизну. Эти величины были ранее получены только в численной работе Шварца [4]. Представляет интерес сравнить результаты по равновесным свойствам вихревого клубка, которые могут быть получены на основании развитого здесь формализма, с данными по квантовой турбулентности.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ-№ 14-19-00352.

1. R.P. Feynman, *Progress in Low Temp. Phys.*, North-Holland, Amsterdam (1955), Vol. 1, p. 17.
2. L. Onsager, *Nuovo Cimento* **6**, 279 (1949).
3. R.J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1991).
4. K.W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **38**, 2398 (1988).
5. S.V. Alekseenko, P.A. Kuibin, and V.L. Okulov, *Theory of Concentrated Vortices*, Springer (2007).

6. P.G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1992).
7. G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1967).
8. C.J. Gorter and J.H. Mellink, *Physica* **15**, 285 (1949).
9. V. Chagovets, I. Gritsenko, E. Rudavskii, G. Sheshin, A. Zadorozhko, and B. Verkin, *J. Phys.: Conf. Ser.* **150**, 032014 (2009).
10. Г.А. Шешин, А.А. Задорожко, Э.Я. Рудавский, В.К. Чаговец, Л. Скрбек, М. Блажкова, *ФНТ* **34**, 1111 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 875 (2008)].
11. I. Gritsenko and G. Sheshin, *J. Low Temp. Phys.* **175**, 91 (2014).
12. И.А. Гриценко, К.А. Клокол, С.С. Соколов, Г.А. Шешин, *ФНТ* **42**, 23 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 21 (2016)].
13. W.F. Vinen, *J. Low Temp. Phys.* **161**, 419 (2010).
14. S.K. Nemirovskii, *Sov. Phys. JETP* **64**, 803 (1986).
15. S.K. Nemirovskii, *J. Low Temp. Phys.* **171**, 504 (2013).
16. В.А. Андрущенко, С.К. Немировский, *ФНТ* **43**, 150 (2017) [*Low Temp. Phys.* **43**, 125 (2017)].
17. E.J. Copeland, T.W.B. Kibble, and D.A. Steer, *Phys. Rev. D* **58**, 043508 (1998).
18. F.R.N. Nabarro, *Theory of Crystal Dislocations*, Clarendon, Press Oxford (1967).
19. H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter Physics*, World Scientific, Singapore (1990).
20. Mark Davidson, *Physica E* **42**, 317 (2010).
21. A. Melatos and C. Peralta, *Astrophys. J. Lett.* **662**, L99 (2007).
22. S.K. Nemirovskii, *Phys. Rep.* **524**, 85 (2013).
23. S.K. Nemirovskii, *Theor. Math. Phys.* **141**, 1452 (2004).
24. S.K. Nemirovskii, *J. Low Temp. Phys.* **185**, 365 (2016).
25. А.А. Мигдал, *Вопросы кибернетики* (1986), с. 122.
26. A.S. Monin and A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, MIT, Press Cambridge, Massachusetts (1975), Vol. 2.
27. Jean Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford (2002).
28. S.V. Iordanskii, *Sov. Phys. JETP* **21**, 467 (1965).
29. W.H. Zurek, *Phys. Rep.* **276**, 177 (1996).
30. Nuno D. Antunes, Luis M.A. Bettencourt, and Mark Hindmarsh, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 908 (1998).
31. L. Onsager, *Statistical Hydrodynamics, Nuovo Cimento Suppl.* **6**, 249 (1949).
32. E.A. Novikov, *Sov. Phys. JETP* **68**, 1868 (1975).
33. T.S. Lundgren and Y.B. Pointin, *J. Stat. Phys.* **17**, 323 (1977).
34. W.D. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence*, Oxford University Press Inc., New York (1991).
35. E. Copeland, D. Haws, S. Holbraad, and R. Rivers, *Physica A* **179**, 507 (1991).
36. H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter Physics*, World Scientific, Singapore (1991).

Стохастичний рух вихрових нитей в He II під дією випадкової сили

С.К. Неміровський

Сформульовано ланжевенівську динаміку — стохастичний рух вихрових нитей в He II під дією випадкової сили. Викладено функціональний формалізм, що є модифікацією методу, який розроблено раніше Мігдалом для роботи із стохастичною динамікою класичних вихрових нитей. Зокрема, стартуючи з рівняння ланжевенівського типу, отримано функціональне рівняння Фоккера–Планка щодо характеристичного функціонала. На основі цього рівняння та в припущенні, що корелятор випадкової сили задовольняє флуктуаційно-дисипативній теоремі, досліджено термодинамічну рівновагу у системі хаотичних квантованих вихорів. Розглянуто випадок нерухомого гелію, а також випадок протитечі з постійним значенням відносної швидкості нормальної та надплинної компонент. Обговорено деякі фізичні наслідки отриманих результатів.

Ключові слова: ланжевенівська динаміка, вихрові ниті, He II, рівняння Фоккера–Планка.

Stochastic motion of the vortex filaments in He II under the influence of random force

S.K. Nemirovskii

Langevin dynamics is formulated — the stochastic motion of vortex filaments in He II under the action of random force. A functional formalism is described, which is a modification of the method developed earlier by Migdal to work with the stochastic dynamics of classical vortex filaments. In particular, starting from the Langevin-type equation, the Fokker–Planck functional equation for the characteristic functional obtained. On the basis of this equation and under the assumption that the random force correlator satisfies the fluctuation-dissipative theorem, thermodynamic equilibrium in a system of chaotic quantized vortices is investigated. The case of stationary helium is considered, as well as the counterflow case with a constant value of the relative velocity of the normal and superfluid components. Some physical consequences of the results are discussed.

Keywords: Langevin dynamics, vortex filaments, He II, Fokker–Planck equation.