Low Temperature Physics/Фізика низьких температур, 2018, т. 44, № 11, с. 1549–1553

Краткие сообщения

Об энергии основного состояния для финитного неоднородного вырожденного бозе-газа

В.Б. Бобров[1,2], А.Г. Загородний[3], С.А. Тригер[1]

[1] *Объединенный институт высоких температур РАН, ул. Ижорская, 13, стр. 2, г. Москва, 125412, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет «МЭИ»*
ул. Красноказарменная, 14, г. Москва, 111250, Россия

[3] *Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины*
ул. Метрологическая, 14-б, г. Киев, 03680, Украина
E-mail: vic5907@mail.ru, azagorodny@bitp.kiev.ua, satron@mail.ru

Статья поступила в редакцию 14 мая 2018 г., после переработки 3 июля 2018 г.,
опубликована онлайн 26 сентября 2018 г.

В рамках самосогласованного приближения Хартри–Фока найдена энергия основного состояния для финитной неоднородной системы бозонов, находящихся в скалярном внешнем поле, на основе представления вторичного квантования без использования формализма аномальных средних. Волновая функция основного состояния соответствует стационарному уравнению Гросса–Питаевского для волновой функции конденсата Бозе–Эйнштейна. Показано, что энергия основного состояния может быть найдена по энергии, определяемой из стационарного уравнения Гросса–Питаевского, только для системы, удовлетворяющей термодинамическому пределу.

Ключевые слова: энергия основного состояния, неоднородный конденсат Бозе–Эйнштейна, самосогласованное приближение Хартри–Фока.

Как известно [1], при описании неоднородного конденсата Бозе–Эйнштейна (БЭК) широко применяется уравнение Гросса–Питаевского [2,3] для волновой функции конденсата в приближении среднего поля. При этом, согласно [3], вывод этого уравнения, как и теория Боголюбова для однородного газа с БЭК [4], основан на использовании формализма «аномальных» средних в рамках большого канонического распределения Гиббса [1,5]. Однако в настоящее время имеются обоснованные сомнения в справедливости гипотезы о существовании аномальных средних, строгое математическое доказательство которой отсутствует (см. [6–13] и цитированную там литературу). Альтернативные результаты для описания равновесного однородного БЭК при использовании большого канонического распределения Гиббса представлены в [14,15], а при описании неоднородного БЭК — в [16]. С другой стороны, в работе Гросса [2] соответствующее уравнение рассматривается в приближении среднего поля для основного состояния в рамках квантовой механики. Для установления соответствия между этими подходами в настоящей работе мы представим вывод выражения для энергии основного состояния на основе представления вторичного квантования в рамках самосогласованного приближения Хартри–Фока без использования формализма аномальных средних. Мы также исследуем возможность определения энергии основного состояния из стационарного уравнения Гросса–Питаевского для системы, удовлетворяющей термодинамическому пределу.

Рассмотрим равновесную неоднородную систему, состоящую из N бозонов с нулевым спином, которые находятся в статическом внешнем поле со скалярным потенциалом $v^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{r})$. Гамильтониан такой системы в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\int d^3r\hat{\Psi}^+(\mathbf{r})\Delta_{\mathbf{r}}\hat{\Psi}(\mathbf{r})+$$
$$+\frac{1}{2}\int d^3r_1d^3r_2u(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}^+(\mathbf{r}_1)\hat{\Psi}^+(\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}(\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}(\mathbf{r}_1)+$$
$$+\int d^3rv^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{r})\hat{\Psi}^+(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \qquad (1)$$

где $\hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ — полевые операторы рождения и уничтожения соответственно, удовлетворяющие коммутационным соотношениям для бозонов, $u(\mathbf{r})$ — парный потенциал взаимодействия бозонов с массой m.

В представлении чисел заполнения полевые операторы могут быть записаны как $\hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})=\sum_k \varphi_k^*(\mathbf{r})\hat{a}_k^{+}$, $\hat{\Psi}(\mathbf{r})=\sum_k \varphi_k(\mathbf{r})\hat{a}_k$. Здесь $\varphi_k(\mathbf{r})$ — полная система одночастичных волновых функций, характеризующихся некоторым набором квантовых чисел k, так что

$$\int d^3 r \varphi_k^*(\mathbf{r})\varphi_l(\mathbf{r})=\delta_{k,l}, \tag{2}$$

соответственно $\hat{a}_k^{+}$ и $\hat{a}_k$ —операторы рождения и уничтожения бозонов в состоянии, отвечающем одночастичной волновой функции $\varphi_k(\mathbf{r})$.

В этом случае система взаимодействующих частиц характеризуется волновой функцией $\Phi(N_0, N_1, \ldots, N_\alpha, \ldots)$ в представлении чисел заполнения в пространстве Фока [17], где $N_k = 0, 1, 2, \ldots.$ — число частиц (число заполнения) в состоянии с набором квантовых чисел k. При этом волновая функция Φ удовлетворяет уравнению $\hat{H}\Phi = E_\Phi \Phi$.

Далее мы ограничимся рассмотрением слабонеидеальной системы бозонов, для описания которой используем самосогласованное приближение Хартри–Фока (self-consistent Hartree–Fock approximation (SHFA)). В этом случае в соответствии с теоремой Вика–Блоха–Доминикиса [18] в применении к квантовой механике ожидаемое значение «нормального» произведения одинакового числа операторов рождения и уничтожения представляется в виде суммы всевозможных произведений ожидаемых значений пар операторов рождения и уничтожения, причем

$$\left\langle \Phi^{SHFA}|\hat{a}_k^{+}\hat{a}_l|\Phi^{SHFA}\right\rangle = N_k\delta_{k,l}, \ \sum_k N_k = N. \tag{3}$$

В свою очередь, значение энергии E_Φ, отвечающее волновой функции Φ^{SHFA}в самосогласованном приближении Хартри–Фока, имеет вид

$$E_\Phi^{SHFA}=\left\langle \Phi^{SHFA}|\hat{H}|\Phi^{SHFA}\right\rangle = \sum_k N_k \int d^3 r \varphi_k^*(\mathbf{r})\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\mathbf{r}} + v^{(\text{ext})}(\mathbf{r})\right\}\varphi_k(\mathbf{r}) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_k N_k(N_k-1)\int d^3 r_1 d^3 r_2 u(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\left|\varphi_k(\mathbf{r}_2)\right|^2\left|\varphi_k(\mathbf{r}_1)\right|^2 +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_k\sum_{l\neq k} N_k N_l \int d^3 r_1 d^3 r_2 u(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\left\{\left|\varphi_k(\mathbf{r}_2)\right|^2\left|\varphi_l(\mathbf{r}_1)\right|^2 + \varphi_k^*(\mathbf{r}_1)\varphi_k(\mathbf{r}_2)\varphi_l^*(\mathbf{r}_2)\varphi_l(\mathbf{r}_1)\right\}. \tag{4}$$

При этом состоянию с волновой функцией Φ^{SHFA} при заданном полном числе частиц N (3) отвечает вполне определенный набор ненулевых значений чисел заполнения $\{N_k\}$. Это означает, что, если соответствующий набор$\{N_k\}$, удовлетворяющих условию (3), известен, энергия рассматриваемой системы E_Φ^{SHFA} в заданном внешнем поле $v^{(\text{ext})}(\mathbf{r})$ является функционалом волновых функций $\varphi_k(\mathbf{r})$: $E_\Phi^{SHFA} = E_\Phi^{SHF}[\varphi_k]$.

Для определения энергии основного состояния E_0^{SHFA} такой системы, казалось бы, можно применить неравенство

$$E_0^{SHFA} \leq E_\Phi^{SHFA}[\varphi_k]. \tag{5}$$

Однако для того, чтобы использовать неравенство (5) в вариационной процедуре, принятой в квантовой механике (см., например, [19]), нам необходимо установить набор ненулевых значений чисел заполнения $\{N_k\}$, отвечающий основному состоянию рассматриваемой системы бозонов. Таким образом, для установления энергии основного E_0^{SHFA} для системы бозонов нам необходимо рассматривать энергию E_Φ^{SHFA} не только как функционал волновых функций φ_α, но и как функцию от чисел заполнения N_k, т.е. $E_\Phi^{SHFA} = E_\Phi^{SHFA}([\varphi_k], \{N_l\})$ с учетом условия (2). Аналогичное утверждение имеет место и в отношении волновых функций $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(\mathbf{r}, \{N_k\})$. Решение такой задачи в настоящее время не представляется возможным, поэтому далее мы будем исходить из «традиционного» допущения о том, что в слабонеидеальном газе бозонов основному состоянию соответствует нахождение всех частиц в одном и том же одночастичном состоянии (см., например, [20]). Тем самым предполагается, что учет взаимодействия между бозонами (два последних слагаемых в правой части (4)) не влияет на ситуацию, которая имеет место для невзаимодействующих бозонов (учет только первого слагаемого в правой части (4)). Это означает, что в основном состоянии рассматриваемой неоднородной системы бозонов

$$N_0 = N, \ \ N_{k\neq 0} = 0, \tag{6}$$

где N_0 — число частиц в одночастичном состоянии с наименьшей энергией ε_0 (основном состоянии).

Тогда, варьируя равенство (4) с учетом (5), (6), приходим к выводу, что одночастичная волновая функция $\varphi_0(\mathbf{r})$, отвечающая основному состоянию в самосогласованном приближении Хартри–Фока, удовлетворяет стационарному нелинейному уравнению

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\mathbf{r}}+v^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{r})+(N-1)\int d^3r_1 u(\mathbf{r}_1-\mathbf{r})\left|\varphi_0(\mathbf{r}_1)\right|^2\right\}\times$$
$$\times\varphi_0(\mathbf{r})=\varepsilon_0\varphi_0(\mathbf{r}) \qquad (7)$$

и условию нормировки (2) Уравнение (7) непосредственно следует из неравенства (5), рассматриваемого как условие минимума функционала (4) с учетом (2) и (5). Этот результат может быть получен из «координатного» представления для многочастичной волновой функции в виде произведения одночастичных волновых функций (см. подробнее [21]).

В случае $N \gg 1$ мы можем заменить в (7) одночастичную волновую функцию $\varphi_0(\mathbf{r})$ на так называемую волновую функцию БЭК

$$\Phi_0^{BEC}(\mathbf{r})=\sqrt{N}\varphi_0(\mathbf{r}), \qquad (8)$$

которая, как нетрудно видеть, удовлетворяет стационарному уравнения Гросса–Питаевского

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\mathbf{r}}+v^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{r})+\int d^3r_1 u(\mathbf{r}_1-\mathbf{r})\left|\Phi_0^{BEC}(\mathbf{r}_1)\right|^2\right\}\times$$
$$\times\Phi_0^{BEC}(\mathbf{r})=\varepsilon_0\Phi_0^{BEC}(\mathbf{r}),$$
$$\int d^3r\left|\Phi_0^{BEC}(\mathbf{r})\right|^2=N. \qquad (9)$$

Таким образом, введение в рассмотрение волновой функции БЭК является формальным математическим приемом, который позволяет всего лишь, исключить из уравнения Шредингера (7) число частиц N, перенеся учет величины N в условие нормировки (9). Прямой физический смысл имеет одночастичная волновая функция $\varphi_0(\mathbf{r})$ (7), отвечающая основному состоянию одной частицы в самосогласованном поле остальных $(N-1)$ частиц с учетом их неразличимости (тождественности).

Из (9) непосредственно следует, что

$$N\varepsilon_0=\int d^3r\Phi_0^*(\mathbf{r})\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\mathbf{r}}+v^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{r})+\right.$$
$$\left.+\int d^3r_1 u(\mathbf{r}_1-\mathbf{r})\left|\Phi_0^{BEC}(\mathbf{r}_1)\right|^2\right\}\Phi_0^{BEC}(\mathbf{r}). \qquad (10)$$

При этом энергия основного состояния системы бозонов согласно (4)–(8) равна

$$E_0^{SHFA}=N\varepsilon_0-\frac{1}{2}\times$$
$$\times\int d^3r_1d^3r_2u(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\left|\Phi_0^{BEC}(\mathbf{r}_2)\right|^2\left|\Phi_0^{BEC}(\mathbf{r}_1)\right|^2, \qquad (11)$$

т.е. энергия основного состояния E_0^{SHFA} системы бозонов в рассматриваемом приближении не определяется только величиной $N\varepsilon_0$.(10). На первый взгляд, учитывая, что энергии E_0^{SHFA} и ε_0 являются функциями числа частиц N, для решения этой проблемы мы можем использовать равенство, которое непосредственно следует из (9)–(11) при условии $N \gg 1$ [21],

$$\frac{dE_0^{SHFA}(N)}{dN}=\varepsilon_0(N). \qquad (12)$$

Однако следует учитывать два существенных обстоятельства. Во-первых, число частиц N является дискретной величиной, поэтому ее минимальной изменение ΔN равно $\Delta N_{\min}=1$. В то же время равенство (12) имеет смысл, если считать, что число частиц N является непрерывной величиной. Во-вторых, интегрирование уравнения (12) подразумевает задание величины $E_0^{SHFA}(N)$ при некотором значении числа частиц N (граничное условие для уравнения (12)) при $N \gg 1$. Кроме того, значение энергии $\varepsilon_0(N)$ существенным образом зависит от граничных условий для волновых функций в (7) и (9).

Таким образом, в общем случае энергия $\varepsilon_0(N)$, найденная из стационарного уравнение Гросса–Питаевского, не определяет энергию основного состояния финитного неоднородного вырожденного бозе-газа, хотя волновая функция БЭК Φ_0^{BEC} (8) и соответствует этому состоянию.

Эти проблемы хорошо известны в статистической термодинамике в связи с определением химического потенциала (см. подробнее [22]). Для их разрешения при описании систем, находящихся в состоянии термодинамического (статистического) равновесия, необходимо учесть процедуру перехода к термодинамическому пределу (см., например, [23])

$$\mathrm{Lim}_T: N\to\infty,\quad V\to\infty,\quad \bar{n}=N/V=\mathrm{const}<\infty, \qquad (13)$$

где $\bar{n}$ — средняя плотность числа частиц в системе, занимающей объем V. При этом величину $\bar{n}$ можно рассматривать как непрерывную переменную.

Введение в рассмотрение объема V, занимаемого системой, означает, что энергии E_0^{SHFA} и ε_0 являются не только функциями числа частиц N, но и объема V:

$$E_0^{SHFA}=E_0^{SHFA}(N,V),\quad \varepsilon_0=\varepsilon_0(N,V). \qquad (14)$$

Тем самым, соотношение (12) следует записать в виде

$$\left(\frac{\partial E_0^{SHFA}(N,V)}{\partial N}\right)_V=\varepsilon_0(N,V). \qquad (15)$$

В результате, после осуществления процедуры перехода к термодинамическому пределу (13) согласно (15) мы получим

$$\mathrm{Lim}_T \varepsilon_0 \left(N,V\right) = \mu, \tag{16}$$

где μ — химический потенциал системы, которая характеризуется средней плотностью числа частиц $\overline{n}$ в состоянии термодинамического равновесия. При этом величина μ является интенсивной термодинамической величиной, поэтому

$$\mathrm{Lim}_T \varepsilon_0 \left(N,V\right) = \varepsilon_0(\overline{n}). \tag{17}$$

В свою очередь, энергия $E_0^{SHFA}(N,V)$ является экстенсивной термодинамической величиной, так что мы можем записать

$$\mathrm{Lim}_T E_0^{SHFA}\left(N,V\right)/N = \varepsilon_0^{SHFA}(\overline{n}), \tag{18}$$

где $\varepsilon_0^{SHFA}(\overline{n})$ — энергия системы, приходящаяся на одну частицу в состоянии термодинамического равновесия. В этом случае с учетом (16)–(18) из равенства (15) следует

$$\frac{d\left(\overline{n}\varepsilon_0^{SHFA}(\overline{n})\right)}{d\overline{n}} = \varepsilon_0(\overline{n}). \tag{19}$$

Для нахождения решения этого дифференциального уравнения необходимо задать значение величины $\varepsilon_0^{SHFA}(\overline{n})$ при некотором значении плотности $\overline{n}$.

Наиболее разумным представляется использование значения $\overline{n} \to 0$, что, очевидно, соответствует приближению идеального газа, причем $\varepsilon_0^{SHFA}(\overline{n} \to 0) = \varepsilon_0(\overline{n} \to 0)$. Для однородного идеального газа величина $\varepsilon_0(\overline{n} \to 0)$ равна нулю, поэтому решение уравнения (19) можно записать в виде

$$\overline{n}\varepsilon_0^{SHFA}(\overline{n}) = \int_0^{\overline{n}} d\alpha \varepsilon_0\left(\alpha\right). \tag{20}$$

Таким образом, для вычисления удельной энергии основного состояния $\varepsilon_0^{SHFA}(\overline{n})$ необходимо определить функцию $\varepsilon_0(\overline{n})$. Прежде всего, отметим, что утверждение (14) означает, что во всех объемных (тройных) интегралах, фигурирующих в тексте статьи, следует осуществить замену:

$$\int d^3r \ldots \to \int_V d^3r \ldots \tag{21}$$

Тем самым, изначально интегрирование производится не по бесконечному пространству, а в пределах заданного объема V с последующим переходом к пределу $V \to \infty$, который должен соответствовать термодинамическому предельному переходу (13) [23]. При этом необходимо найти такое решение уравнения (7) для одночастичной волновой функции основного состояния $\varphi_0(\mathbf{r})$, которое удовлетворяет условию обращения в нуль волновой функции на границах рассматриваемого объема и за его пределами: $\varphi_0(\mathbf{r} \in S) = 0$, $\varphi_0(\mathbf{r} \notin V) = 0$, где S — поверхность ограничивающая объем V.

Такие граничные условия соответствуют рассмотрению состояния термодинамического равновесия системы с использованием микроканонического распределения Гиббса [23].

Чтобы обеспечить выполнение этих условий, следует разложить одночастичную волновую функцию $\varphi_0(\mathbf{r})$ в ряд по некоторому полному набору функций $\chi_l(\mathbf{r})$, удовлетворяющих условиям:

$$\varphi_0\left(\mathbf{r}\right) = \sum_l c_l \chi_l\left(\mathbf{r}\right), \quad \int_V d^3r \chi_k^*\left(\mathbf{r}\right)\chi_l\left(\mathbf{r}\right) = \delta_{k,l},$$
$$\chi_l\left(\mathbf{r} \in S\right) = 0, \quad \chi_l\left(\mathbf{r} \notin V\right) = 0. \tag{22}$$

В этом случае интегро-дифференциальное уравнение (7) примет вид системы алгебраических уравнений для коэффициентов $c_l = c_l(N,V)$ и энергии $\varepsilon_0(N,V)$, зависящих от параметра (N/V).

Обратим внимание, что при рассмотрении системы с заданным числом частиц N (в рамках микроканонического распределения Гиббса) в качестве набора функций $\chi_l(\mathbf{r})$ не могут быть использованы плоские волны, удовлетворяющие периодическим граничным условиям. Применение полного набора плоских волн возможно при использовании большого канонического распределения Гиббса, в котором фиксируется не число частиц, а химический потенциал [24].

Таким образом, энергия основного состояния может быть найдена на основе энергии, определяемой из стационарного уравнения Гросса–Питаевского, только для системы, удовлетворяющей термодинамическому пределу при использовании микроканонического распределения Гиббса.

---

1. F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
2. E.P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
3. Л.П. Питаевский, *ЖЭТФ* **40**, 646 (1961) [*Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961)].
4. Н.Н. Боголюбов, *Известия АН СССР, сер. физ*. **11**, 77 (1947) [*J. Phys.* (*USSR*) **11**, 23 (1947)].
5. C.J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge (2008).
6. W.H. Bassichis and L.L. Foldy, *Phys. Rev.* A **133**, 435 (1964).
7. H. Stolz, *Physica A* **86**, 11 (1977).
8. C.-H. Zhang and H.A. Fertig, *Phys. Rev. A* **74**, 023613 (2006).
9. P. Navez and K. Bongs, *EPL* **88**, 60008 (2009).
10. V.B. Bobrov, S.A. Trigger, and I.M. Yurin, *Phys. Lett. A* **374**, 1938 (2010).

11. A.M. Ettouhami, *Progr. Theor. Phys.* **127**, 453 (2012).
12. В.Б. Бобров, *Письма в ЖЭТФ* **106**, 365 (2017) [*JETP Lett.* **106**, 390 (2017)].
13. В.Б. Бобров, С.А. Тригер, *ТМФ* **194**, 468 (2018) [*Theor. Math. Phys.* **194**, 404 (2018)].
14. Yu.M. Poluektov, *J. Low Temp. Phys.* **186**, 347 (2017).
15. В.Б. Бобров, А.Г. Загородний, С.А. Тригер, *ФНТ* **43**, 420 (2017) [*Low Temp. Phys.* **43**, 343 (2017)].
16. V.B. Bobrov and S.A. Trigger, *J. Low Temp. Phys.* **186**, 1 (2017).
17. V.A. Fock, *Zs. Phys.* **75**, 622 (1932).
18. C. Bloch and C. de Dominicis, *Nucl. Phys.* **7**, 459 (1958).
19. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория.* Наука, Москва (1974) [L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Pergamon Press, Oxford, UK (1977)].
20. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика*, *часть 2*, Наука, Москва (1978) [E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, *Statistical Physics, part 2,* Pergamon, Oxford (1980)].
21. A.J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 307 (2001).
22. В.Б. Бобров, В.Я. Менделеев, С.А. Тригер, *ТВТ* **53**, 634 (2015) [*High Temp.* **53**, 599 (2015)].
23. Н.Н. Боголюбов, Н.Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, Москва (1984) [N.N. Bogolubov and N.N. Bogolubov Jr, *Introduction to Quantum Statistical Mechanics*, Gordon and Breach, London (1992)].
24. R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, New York (1975) [Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, Мир, Москва (1978)].

Про енергії основного стану для фінітного неоднорідного виродженого бозе-газу

В.Б. Бобров, А.Г. Загородній, С.А. Тригер

У рамках самоузгодженого наближення Хартрі–Фока знайдено енергію основного стану для фінітної неоднорідної системи бозонів, які знаходяться у скалярному зовнішньому полі, на основі представлення вторинного квантування без використання формалізму аномальних середніх. Хвильова функція основного стану відповідає стаціонарному рівнянню Гросса–Пітаєвського для хвильової функції конденсату Бозе–Ейнштейна. Показано, що енергію основного стану може бути знайдено по енергії, яка визначається із стаціонарного рівняння Гросса–Пітаєвського, тільки для системи, що задовольняє термодинамічній границі.

Ключові слова: енергія основного стану, неоднорідний конденсат Бозе–Ейнштейна, самоузгоджене наближення Хартрі–Фока.

On the ground state energy for a finite inhomogeneous degenerate Bose gas

V.B. Bobrov, A.G. Zagorodny, and S.A. Trigger

Within the framework of the self-consistent Hartree–Fock approximation, the ground state energy for a finite inhomogeneous system of bosons located in a scalar external field was found on the basis of the second quantization representation without using the formalism of anomalous averages. The wave function of the ground state corresponds to the stationary Gross–Pitaevskii equation for the wave function of the Bose–Einstein condensate. It is shown that the ground state energy can be found from the energy determined from the stationary Gross–Pitaevsky equation only for a system that satisfies the thermodynamic limit.

Keywords: ground state energy, inhomogeneous Bose–Einstein condensate, self-consistent Hartree–Fock approximation.