Low Temperature Physics/Фізика низьких температур, 2018, т. 44, № 12, с. 1673–1677

Калибровочный принцип и спонтанное нарушение симметрии

В.Ф. Клепиков

Институт электрофизики и радиационных технологий НАН Украины
ул. Чернышевская, 28, а/я 8812, Харьков, 61002, Украина
E-mail: vfklepikov@ukr.net

Статья поступила в редакцию 17 июля 2018 г., опубликована онлайн 26 октября 2018 г.

Рассмотрены пространственно модулированные состояния полей параметра порядка как калибровочных (компенсирующих) полей. Показано, что в безграничных физических системах неоднородный вакуум возникает только благодаря введению в лагранжианы высших производных (для скалярных полей). Исследованы возможные фазовые переходы в системах с высшими производными. Обсуждаются дискретные варианты спонтанного нарушения суперсимметрии в теориях классических полей с высшими производными.

Ключевые слова: калибровочный принцип, спонтанное нарушение дискретной суперсимметрии.

1. Введение

Компенсационные (калибровочные) правила и симметрии доминируют в описании эволюции и стабильности в природе.

Реакция физических систем на любые воздействия, как правило, носит компенсирующий характер. Это и закон Ньютона, и принципы относительности Галилея и Эйнштейна, принцип Ле Шателье, принцип неопределенности в квантовой теории и калибровочная инвариантность. Особый интерес представляют компенсирующие реакции на спонтанное нарушение симметрии (СНС), восстанавливающие эту симметрию. В случае нарушения непрерывной глобальной симметрии это эффект Голдстоуна, для локальных симметрий — эффект Хиггса. Калибровочный принцип лежит также в основе объединения всех взаимодействий. В соответствии с калибровочным принципом все взаимодействия в природе возникают из лагранжианов, инвариантных относительно преобразований симметрии, а сам принцип является важным открытием современной физики частиц и полей. Изучение калибровочных полей — главная задача физики [1].

Компенсация, компромисс и конкуренция обеспечивают восстановление нарушенной симметрии и диктуют правила отбора для лагранжианов. Особый интерес при этом вызывают взаимодействия не только амплитуд физических полей, но и степеней свободы полей, которые комплектуются из градиентных слагаемых по принципу близкодействия. Это особенно важно в случае спонтанного нарушения дискретных симметрий. Они описываются (в том числе) высшими производными полей параметров порядка (ППП), без которых невозможно описать многие пространственно модулированные структуры ППП как экстремумы свободной энергии. Это один из примеров использования старших производных ППП в правилах отбора для потенциальной энергии систем.

Эволюция физических систем регулирует процессы установления равновесия и восстановления симметрии, которые развиваются непрерывно: явно (в реальном времени — это обычная эволюция) или неявно (параметрическая эволюция, сопутствующая СНС).

Современная физика строится на основе лагранжианов, содержащих, как правило, только первые производные полей и координат. Это ограничение не позволяет рассмотреть многие процессы в физике критических явлений, ядерной физике и физике частиц и полей, космологии и т.д.

В последнее время в различных областях физики нередко рассматриваются теории с высшими производными (см., например, [2–6]). Чаще всего это имеет место в неточечных теориях, где элементарные объекты обладают ненулевой размерностью: струны, мембраны, *d*-браны и т.п. По-видимому, введение высших производных необходимо для лагранжианов, описывающих ускоренное расширение (сжатие) Вселенной, как и вообще при исследовании ее скрытого «темного» сектора, а также в теории солитонов. Кроме того, соответствующий формализм в таких теориях позволяет улучшить свойства сходимости диаграмм Фейнмана, служит эффективным способом регуляризации и приводит также к описанию высших симметрий типа Ли–Беклунда [6].

Простейшие лагранжианы с высшими производными неизбежны также в теории фазовых превращений, как и вообще в случаях спонтанного нарушения консолидированной четности (КЧ) (например, типа $\varphi(\pm x) = \pm\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — ППП). Добавки в виде старших производных в теориях тяготения могут генерироваться эффектами поляризации вакуума во внешнем гравитационном поле, а также теорией струн. Векторные (тензорные) ППП в таких системах нередко вырождаются в скалярные (в математическом описании). Благодаря этому, а также одномерности полевых градиентов нередко удается решить точно вариационную проблему, определяемую дифференциальными уравнениями (ДУ) высших порядков. Цепочка фазовых переходов, возникающих при нарушении КЧ, содержит в себе дискретный аналог спонтанного нарушения суперсимметрии. ППП в точках такого перехода представляет собой стационарный белл-солитон.

Таким образом, суперсимметрия, обычно связываемая с существованием гипотетических частиц-суперпартнеров в области сверхвысоких энергий, может проявляться и при произвольных энергиях вследствие конкуренции градиентов ППП [4,5].

Модели такого типа также необходимы в связи с переходом материаловедческих исследований в диапазон наномасштабов, требующим преодоления двух барьеров — технологического и фундаментального физического.

2. Модулированные структуры параметров порядка

Рассмотрим теорию скалярного стационарного вещественного поля $\varphi(x)$ с одномерными градиентами. Описание СНС для консолидированной четности $(\varphi(\pm x) = \pm\varphi(x))$ требует конструирования лагранжиана для поля $\varphi(x)$, значения которого в пространственной точке x являются обобщенными координатами данной системы, имеющей бесконечное число степеней свободы. Взаимодействующие соседние в пространстве степени свободы, описываемые градиентами ППП, соответствуют принципу близкодействия, характерному для полевых теорий. Для описания СНС в полевой системе необходимо обеспечить превращение симметричной фазы $\varphi(x) \equiv 0$ в модулированную (длиннопериодическую, несоразмерную) фазу $\varphi(x)$ с бесконечно малой амплитудой и бесконечно большим периодом T путем фазового перехода (ФП) II рода. Эти фазы и их ФП могут быть рассмотрены для произвольных полевых физических систем, а не только в физике конденсированного состояния. Свободная энергия системы (соответствующая ее потенциальной энергии) имеет вид [9,10]

$$\Phi = \frac{1}{T}\int_0^T dx\left\{(\varphi'')^2 - g(\varphi\varphi')^2 + \gamma(\varphi')^2 + q\varphi^2 + \frac{p}{2}\varphi^4 + \frac{h}{3}\varphi^6\right\}, \qquad (1)$$

где g, γ, p, h — параметры, зависящие от внешних и внутренних условий (другие параметры приведены к 1 масштабными преобразованиями для x и $\varphi(x)$).

Вариационное уравнение Эйлера–Пуассона, реализующее экстремум функционала Φ (1), имеет вид

$$\varphi^{(IV)} + g[\varphi^2\varphi'' + \varphi\varphi'^2] - \gamma\varphi'' + q\varphi + p\varphi^3 + h\varphi^5 = 0. \qquad (2)$$

Вариационная задача по поиску периодических фаз

$$\varphi(x+T) = \varphi(x), \quad L\left(x+\frac{T}{2}\right) = L(x), \quad \varphi_{e;o}\left(x+\frac{T}{4}\right) = \Psi_{o;e}(x), \qquad (3)$$

позволяет (в некоторых областях параметров g, γ, r, s) получить точные выражения для фаз типа семейств состояний $\varphi'^2 = c + A(\varphi^2)$, допускающих как четные, так и нечетные по x решения.

Дальнейшая минимизация энергии Φ по произвольным константам интегрирования решает задачу отыскания фаз, соответствующих абсолютному минимуму потенциальной энергии Φ, причем роль параметра порядка в некоторых случаях выполняет среднее значение ППП $\langle\varphi(x)\rangle_T$. В отдельных областях 4-мерной g, γ, r, s фазовой диаграммы системы в цепочке ФП от фазы $\varphi = 0$ к упорядоченной фазе $\varphi = \mathrm{const}$ есть только переходы II рода (хотя возможны и ФП I рода, для описания которых в модель и был введен член $\sim\varphi^6$). Цепочка фаз при этом имеет вид 0 → MSI → MSII →N, где MSI и MSII — модулированные фазы; N — фаза $\varphi(x) = \mathrm{const} \neq 0$. Параметр порядка $\varphi(x)$ носит локальный характер, так как для четно-нечетной фазы MSI $\langle\varphi(x)\rangle_T = 0$. В фазе MSII $\langle\varphi(x)\rangle_T \neq 0$ и переход II рода. MSI → MSII при $\varphi'^2 = A(\varphi^2)$, $c = 0$. Последний переход в цепочке ФП II рода в фазу N происходит при условии $\varphi \to a/\varphi$.

В случае $c = 0$ реализуется вырожденная фаза

$$\varphi(x) = \alpha/\mathrm{ch}(\beta x) \qquad (4)$$

в виде стационарного белл-солитона. Редукция по подгруппам группы вращений, обусловленная понижением размерности пространства d, означает, что для $d = 2$ невозможно различать ферми- и бозе-поля (группа 2-мерных поворотов абелева и не допускает введение понятия спина полей). В случае $d = 1$ группа вращений вырождается в группу отражений, и примитивными аналогами d-мерных полей с целыми и полуцелыми спинами являются четные и нечетные поля, как это имеет место в скалярных моделях с одномерными градиентами, рассматриваемых в данной работе.

Как известно, оператор G, переводящий бозе-поля в ферми-поля, обладает свойством $G^2 = P$, где P — оператор трансляций. Соответствующая этим преобразованиям симметрия получила название «суперсимметрия» [7,8], и, как ожидается, она должна играть важную роль в структуре Вселенной. Здесь показано, что для скалярных полей $\varphi(x)$ с одномерными градиентами, которые переводят четные поля в нечетные и наоборот, реализуется дискретный вариант суперсимметрии, поскольку $L\left(x \pm T/2\right) = L(x)$, а операция дискретного сдвига на $T/4$, реализующая четно-нечетную симметрию, повторенная дважды, соответствует трансляционной симметрии лагранжиана для полей $\varphi(x)$, исследуемых в данной работе.

Таким образом, четно-нечетная симметрия фазы MSI — локальный дискретный пример суперсимметрии (так как путем сдвига на $T/4$ четная фаза может быть превращена в нечетную и наоборот).

Сама же симметричная фаза $\varphi(x) \equiv 0$ является глобально суперсимметричной, так как функция $\varphi(x) \equiv 0$ — единственная функция, которая одновременно является как четной, так и нечетной. Присутствие суперсимметрии в природе обычно связывают с возможным открытием частиц-суперпартнеров в области сверхвысоких энергий. Однако дискретная суперсимметрия (и ее спонтанное нарушение), а также соответствующие свойства операторов шредингеровского типа в квантовой механике (Генденштейн, Криве; Виттен) могут, как мы видим, проявляться и при низких энергиях.

Построение точных солитонных решений методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) основано, как известно, на алгебрах симметрии соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений. Алгебраический подход доминирует также и при описании симметрий (и законов сохранения) в большинстве физических теорий.

С другой стороны, первоначально понятие инвариантности было введено в математику и физику на языке групп, а не алгебр симметрии. Однако, например, в линейных физических теориях групповой анализ менее эффективен, чем алгебраический подход, так как симметрия линейных ДУ избыточна для описания их физически значимых свойств.

Тем не менее и групповое, и алгебраическое описание симметрий (например, и МОЗР, и метод Ли), несомненно, просто различные, но эквивалентные друг другу математические формы проявления инвариантности в природе. Доказательство этой эквивалентности стало бы весьма важным шагом в дальнейшем выяснении причин эффективности математики в естественных науках. В настоящей работе предложен новый, групповой подход в построении солитонных состояний, отличный от МОЗР. Исследована симметрийная природа существования солитонов как точных решений ДУ на примере нелинейного волнового уравнения — одного из основных ДУ теории поля, физики критических явлений и т.д. Показано, что симметрийное описание ДУ и солитонных решений допускает расширение на произвольные вещественные (нецелые) значения порядков ДУ — m и размерности пространства d.

Рассмотрим произвольное d-мерное волновое уравнение

$$\Delta_d^m \varphi + U(\varphi) = 0, \tag{5}$$

где $\Delta^m = \Delta^{m-1}\Delta$, $\Delta = \partial_r^2$, $\varphi(r)$ — скалярное поле, $U(\varphi)$ — потенциал.

В общем случае ДУ (5) инвариантно относительно d-мерных вращений и трансляций. Если

$$U(\varphi) = \mu\varphi^N, \tag{6}$$

то ДУ также допускает дилатации:

$$\mathbf{r}^* = \lambda\mathbf{r}, \quad \varphi^*(\mathbf{r}^*) = \lambda^{-\Delta_\varphi}\varphi(\mathbf{r}), \tag{7}$$

где Δ_φ — аномальная размерность, знак * означает преобразованную величину.

В случае

$$N = \frac{d+2m}{d-2m} \tag{8}$$

ДУ (5) инвариантно также относительно специальных конформных преобразований:

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{1 - 2\mathbf{pr} + p^2r^2} \equiv \frac{\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{F(\mathbf{p},\mathbf{r})}, \\ &\varphi^*(\mathbf{r}^*) = \frac{\varphi(\mathbf{r})}{F^q(\mathbf{p},\mathbf{r})}, \\ &q = \frac{d-1}{2} - 1, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\mathbf{p}$ — произвольный вектор, которые, сами не образуя группу, совместно с трансляциями, вращениями и дилатациями порождают конформную группу — максимальную конечнопараметрическую группу симметрий d-мерного пространства с числом параметров $l = (d+1)(d+2)/2$ (в исключительном случае $d = 2$ конформная симметрия расширяется до группы с бесконечным счетным числом параметров) [11].

Волновое ДУ (1) со степенной нелинейностью представляет собой ДУ Эйлера–Пуассона для свободной энергии вида

$$\Phi = \int \left[\left(\Delta^{m/2}\varphi\right)^2 - \mu\left(N+1\right)^{-1}\varphi^{N+1} \right] d^d\mathbf{r} \tag{10}$$

(частным случаем этого выражения для Φ является функционал Гинзбурга–Ландау–Вильсона при $m = 1$ в критической точке).

Операторы вида Δ^m, где m — нецелое число, следует понимать как псевдодифференциальные операторы, определяемые с помощью преобразований Фурье.

Рассмотрим вначале случай $m = 1$. Редуцируя ДУ (5) в форме (10) по подгруппам трансляций и вращений так, чтобы в сферических координатах сохранить только радиальную зависимость, получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \mu\varphi^N = 0. \qquad (11)$$

Замена переменных

$$\mathbf{r} = e^t, \quad \varphi = e^{\frac{2t}{N-1}} z \qquad (12)$$

приводит ДУ (11) к виду

$$z'' + \left(d - 2\frac{N+1}{N-1}\right)z' + 2\left(\frac{2N}{(N-1)^2} + \frac{d}{N-1}\right)z + \mu z^N = 0. \qquad (13)$$

Легко видеть, что ДУ (5) интегрируется в квадратурах при условии $N = (d + 2)/(d - 2)$, совпадающем с условием (8) конформной инвариантности исходного ДУ (5). Условие (8), в свою очередь, совпадает с условием вариационности для масштабной симметрии, когда и ДУ Эйлера–Пуассона, и функционал Ф одновременно инвариантны относительно преобразований (7).

Соотношение (8) оказывается для ДУ (7), (13) необходимым и достаточным условием не только интегрируемости в квадратурах, но и наличия у ДУ (13) белл-солитонного решения вида

$$\left(\frac{d(d-2)}{4\mu\,\mathrm{ch}^2 t}\right)^{(d-2)/4}, \qquad (14)$$

где сдвиговая произвольная постоянная положена равной нулю.

Для уравнения (11) соответствующее (14) решение представляет собой алгебраический солитон:

$$\varphi(r) = \frac{\left[d(d-2)\right]^{(d-2)/4} c^{(d-2)/2}}{\mu^{(d-2)/4}\left(r^2 + c^2\right)^{(d-2)/2}}, \qquad (15)$$

где c — произвольная постоянная.

Как известно, симметрийные свойства ДУ (1) с нелинейностью вида (6), (8) справедливы и в случае произвольных (нецелых) значений параметров m, N и d. Конформная и вариационная масштабная симметрии, как удалось показать, обеспечивают существование точных солитонных решений типа (14), (15) и в случае нецелых значений. Для натуральных значений $m > 1$ доказательство проводится методом математической индукции. Затем этот результат обобщается на случай произвольных рациональных $m = p/q$, после чего нетрудно доказать его для произвольных вещественных m. Кроме того, условие (4) — одновременно условие для критической размерности d_c и перенормируемости модели (6).

В полевых моделях с высшими производными ППП благодаря конкуренции градиентных слагаемых существуют стабильные модулированные структуры. Точные одномерные солитонные решения в теории модулированных структур также обусловлены скрытыми симметриями моделей. Набор таких решений, полученных ранее в работах автора, можно дополнить в рамках следующей модели. Рассмотрим вспомогательный функционал в пространстве размерности d:

$$F = \frac{1}{V}\int\Big[(\Delta f)^2 + gr^{\alpha} f^2(\Delta f)^2 + hr^{\beta}(\Delta f)^2 + kr^{\delta} f^2 + s\frac{r^{\varepsilon}}{2} f^4 + p\frac{r^{\mu}}{3} f^6\Big] d^d\mathbf{r}, \qquad (16)$$

где $f(r)$ — поле параметров порядка, g, h, k, s, p, $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \mu$ — материальные параметры.

Условие вариационной масштабной инвариантности для функционала F и для ДУ Эйлера–Пуассона имеют вид

$$\alpha = d - 6,\ \beta = -2,\ \delta = -4,\ \varepsilon = d - 8,\ \mu = 2\alpha. \qquad (17)$$

Заменой переменных

$$t = \ln r, \quad z = r^{\frac{d}{2}-2} f \qquad (18)$$

уравнение Эйлера–Пуассона для F сводится к стандартному ДУ теории модулированных структур:

$$z^{(IV)} - g\left(z^2 z'' + zz'^2\right) + \left(2d - \frac{d^2}{2} - 4 - h\right)z'' + \left(k + 4h - 2dh + \frac{d^4}{16} - \frac{d^3}{2} + d^2 + \frac{hd^2}{4}\right)z + \left(s - 4dg + 8g + \frac{gd^2}{2}\right)z^3 + pz^5 = 0. \qquad (19)$$

Это уравнение только благодаря скрытой вариационной 6-мерной масштабной симметрии F обладает солитонным решением вида

$$z(t) = \frac{A}{\mathrm{ch}\,(Bt)}. \qquad (20)$$

Проблема введения высших (старших) временных производных в кинетическую энергию лагранжианов тесно связана с описанием «темного» сектора Вселенной и ее ускоренного расширения (сжатия) и, видимо, может быть решена в процессе поиска простых групп (супергрупп) Ли (Ли–Беклунда) инвариантности мира. Так, например, известна только одна простая группа

Ли инвариантности мира — группа де Ситтера D [12] (вещественная некомпактная форма простой алгебры Ли B_2). Группа D — группа симметрий расширяющейся Вселенной без материи (т.е. заполненной только частицами с нулевой массой покоя). Радиус кривизны такой Вселенной $R(t)$ — линейная функция времени:

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = 0. \qquad (21)$$

Группа D вырождается в группу Пуанкаре в пределе плоского пространства:

$$\lim R(t) \to \infty \qquad (22)$$

3. Заключение

Исследовано спонтанное нарушение четности полей параметра порядка, приводящее к их модулированным периодическим структурам, а также фазовые превращения этих структур. Эти результаты — следствие конкуренции (компенсации) калибровочных структур, возникающих благодаря включению в лагранжиан систем высших (старших) производных полей параметров порядка. Параметрическая эволюция модулированных состояний рассмотрена как цепочка фазовых переходов.

1. А.М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск (1999).
2. D. Baleanu, *J. Math. Phys*. **47**, 103503 (2006).
3. F. Ahmad, F. Soleymani, F. Khaksar Haghani, and S. Serra-Capizzano, *Appl. Math. Comp*. **314**, 199 (2017).
4. M. M. W. Shawa and A. J. M. Medved, *Phys. Rev. D* **97**, 086002 (2018).
5. R. Casana, M.M. Ferreira, L. Lisboa-Santos, E. P. Frederico dos Santos, and M. Schreck, *Phys. Rev. D* **97**, 115043 (2018).
6. Д.Н. Гитман, И.В. Тютин, Каноническое квантование полей со связями, Наука, Москва (1986).
7. Ю.А. Гольфанд, Е.П. Лихтман, *Письма в ЖЭТФ* **13**, 452 (1971); D.V. Volkov and V.P. Akulov, *Phys. Lett. B* **46**, 109 (1973).
8. Л.Э. Генденштейн, И.В. Криве, *УФН* **146**, 553 (1985).
9. A. Michelson, *Phys. Rev. B* **16**, 577 (1977).
10. A. Michelson, *Phys. Rev. B* **16**, 585 (1977); *ibid.* **16**, 5121 (1977).
11. Н.Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, Москва (1988).
12. Ф.Дж. Дайсон, *УМН* **35**, 171 (1980).

Калібрувальний принцип і спонтанне порушення симетрії

В.Ф. Клепіков

Розглянуто просторово модульовані стани полів параметра порядку як калібрувальні (компенсувальні) поля. Показано, що в безмежних фізичних системах неоднорідний вакуум виникає тільки завдяки введенню до лагранжіанів вищих похідних (для скалярних полів). Досліджено можливі фазові переходи в системах з вищими похідними. Обговорюються дискретні варіанти спонтанного порушення суперсиметрії в теоріях класичних полів з вищими похідними.

Ключові слова: калібрувальний принцип, спонтанне порушення дискретної суперсиметрії.

Gauge principle and spontaneous symmetry breaking

V.F. Klepikov

The spatially modulated states of the order parameter fields as gauge (compensating) fields are considered. It is shown that in infinite physical systems inhomogeneous vacuum arises only due to the introduction of higher derivatives (for scalar fields) into Lagrangians. Possible phase transitions in systems with higher derivatives are investigated. Discrete variants of the spontaneous supersymmetry breaking in classical fields theories with higher derivatives are discussed.

Keywords: gauge principle, spontaneous discrete supersymmetry breacking.