

## Малоамплитудные трехмерные структуры в магнетиках

А.Б. Борисов<sup>1,2</sup>, В.В. Киселев<sup>1,3</sup>, А.А. Расковалов<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>ИФМ им. М.Н. Михеева УрО РАН, ул. Софьи Ковалевской, 18, г. Екатеринбург, 620108, Россия

<sup>2</sup>Институт естественных наук и математики УрФУ, ул. Куйбышева, 48, г. Екатеринбург, 620026, Россия

<sup>3</sup>Физико-технологический институт УрФУ, ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия

E-mail: kiseliev@imp.uran.ru

Статья поступила в редакцию 18 декабря 2017 г., опубликована онлайн 28 мая 2018 г.

Найден новый класс малоамплитудных магнитных дефектов в неограниченной среде и пленке трехмерных ферромагнетиков в модели Гейзенберга. Такие структуры содержат источники и вихри. Показано, что их дипольные конфигурации имеют конечную энергию. Обсуждается устойчивость найденных структур.

Знайден новий клас малоамплітудних магнітних дефектів в необмеженому середовищі та плівці тривимірних ферромагнетиків в моделі Гейзенберга. Такі структури містять джерела та вихори. Показано, що їх дипольні конфігурації мають кінцеву енергію. Обговорюється стійкість знайдених структур.

PACS: 75.60.Ch Доменные стенки и доменная структура;

75.25.+z Расположение спинов в магнитоупорядоченных материалах.

Ключевые слова: модель Гейзенберга, вихри, источники, уравнение Ландау–Лифшица, диполи.

Теория локализованных структур в магнетиках, которая стала развиваться в конце 70-х годов после пионерских работ А.М. Косевича с учениками и коллегами [1,2], в последние десятилетия получила бурное развитие. В частности, активно исследуются статические и динамические свойства наномангнетиков в связи с перспективой их использования в устройствах хранения и записи информации. Повышенный интерес наблюдается к киральным магнетикам, где предсказанные два десятилетия назад [3,4] компактные киральные скирмионы могут найти важное применение в беговой памяти.

Несмотря на многолетнее изучение магнитных структур в больших (bulk) магнитных образцах трехмерные статические магнитные солитоны теоретически недостаточно изучены. К настоящему времени в этих системах изучены магнитные «ежи», магнитные капли [1], хопфионы, вихревые спиральные солитоны в соизмеримых и несоизмеримых кристаллах [5]. Ввиду этого важное значение приобретает изучение трехмерных структур аналитическими методами. Аналитические методы, как правило, применимы к трехмерным моделям, которые обладают высокой степенью симметрии. Хотя полученные этими методами результаты обладают ограниченной применимостью, их научная значимость для анализа сингулярных нелинейных структур несомненна. Они позволяют достаточно полно описать

вид нелинейной структуры в ядре ее формирования и качественно учесть влияние других взаимодействий.

В настоящей работе мы обсуждаем структуру малоамплитудных магнитных дефектов в трехмерных ферромагнетиках. Показано, что такие структуры формируются основным обменным взаимодействием. Мы находим новый класс точных решений в неограниченной среде и пленке нелинейных уравнений модели Гейзенберга с помощью определенной специальных подстановок. Вначале мы строим функцию от исходных динамических переменных, удовлетворяющую линейному уравнению Лапласа. Обратное преобразование приводит к решениям исходной нелинейной модели в виде некоторых элементарных функций от гармонических решений уравнения Лапласа. В конце статьи мы обсуждаем устойчивость найденных структур.

Рассмотрим стандартный изотропный гейзенберговский гамильтониан

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j$$

спина  $S$  на квадратной решетке, описывающего взаимодействие ближайших соседей ( $J > 0$  — обменный интеграл), и используем континуальный вариант спиновых уравнений движения в терминах спиновых угловых переменных  $\theta$  и  $\Phi$  ( $\mathbf{n} = \{\sin \theta \cos \Phi, \sin \theta \sin \Phi, \cos \theta\}$ )

). Тогда стационарные решения определяются системой нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \Delta\theta = \sin\theta \cos\theta (\nabla\Phi)^2 \\ \nabla(\sin^2\theta \nabla\Phi) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Эта система уравнений с гамильтонианом  $H$

$$H = \frac{\alpha M_0^2}{2} \int d\mathbf{r} (\nabla\mathbf{n})^2, \quad (2)$$

согласно теореме Деррика, имеет только сингулярные решения. Здесь  $\alpha$  — постоянная обменного взаимодействия,  $M_0$  — спонтанная намагниченность.

Нелинейные спиральные трехмерные структуры в уравнениях (1) с ограничением  $\nabla\Phi \perp \nabla\theta = 0$  были найдены в работе [6]. Для поиска решений другого класса мы используем подстановку

$$\nabla\Phi = F(\theta)\nabla\theta. \quad (3)$$

Подобная подстановка была впервые введена Б. Риманом для описания бегущих одномерных волн в гидродинамике, когда два уравнения для плотности  $\rho$  и скорости  $v$  подстановкой  $v(\rho)$  сводятся к одному. Положим, что азимутальный угол есть функция полярного угла. Тогда, согласно (1), функция  $F$ , может быть найдена из уравнения Бернулли

$$\sin\theta \frac{dF}{d\theta} + 2F \cos\theta + F^3 \sin^2\theta \cos\theta = 0. \quad (4)$$

Общее решение уравнения (4) определяется однопараметрическим семейством функций

$$F(\theta) = \frac{1}{\sqrt{c^2 \sin^4\theta - \sin^2\theta}} \quad (5)$$

с произвольной константой  $c^2 > 1$ . С использованием соотношений (3) и (5) исходная система (1) может быть представлена в виде уравнения Лапласа

$$\Delta \left( \arccos \left[ \frac{c \cos\theta}{\sqrt{c^2 - 1}} \right] \right) = 0, \quad (6)$$

решение которого есть гармоническая функция

$$a(x, y, z) = \arccos \left[ \frac{c \cos\theta}{\sqrt{c^2 - 1}} \right] \quad (\Delta a = 0). \quad (7)$$

В итоге углы намагниченности определяются только полем  $a$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c} \cos a, \\ \Phi = (ca) + \Phi_0. \end{cases} \quad (8)$$

Такие решения могут быть названы малоамплитудными, поскольку угол  $\theta$  лежит в диапазоне

$\pi/2 - \theta_{\max} \leq \theta < \pi/2 + \theta_{\max}$  с максимальным значением  $\theta_{\max} = \arcsin \sqrt{c^2 - 1}/c$ . При этом гамильтониан (2) преобразуется к простому виду

$$H = \frac{\alpha M_0^2}{2} \int d\mathbf{r} (\nabla a)^2. \quad (9)$$

Мы обсудим вначале решения для  $a(x, y, z)$  в следующем виде:

$$a = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\sqrt{(x-x_{0i})^2 + (y-y_{0i})^2 + (z-z_{0i})^2}}. \quad (10)$$

Семейство решений (8), (10) определяется параметрами  $q_i$ ,  $c$ , а также координатами положений источников  $(x_{0i}, y_{0i}, z_{0i})$ . Параметр  $q_i$  с произвольным значением может быть назван, по аналогии с гидродинамикой, «мощностью» источника. Наконец, параметр  $c \geq 1$  управляет «амплитудой» выхода спинов из плоскости  $xy$ , предельное значение  $c=1$  соответствует  $xy$ -модели ( $\theta = \pi/2$ ). При  $N=1$  структура (8), (10) напоминает структуру «луковицы», в которой на расстояниях

$$R_n = \frac{qR_0}{q - 2n\pi R_0} > 0 \quad (n \in \mathbb{Z}, R_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}) \quad (11)$$

значения компоненты  $n_3 = \cos\theta$  совпадают. Структура поля  $\Phi$  (рис. 1) и поля  $n_3 = \cos\theta$  (рис. 2) быстро осциллирует вблизи начала координат и на рисунках изображены только при  $0,6 < r < 1,1$ . Энергия структуры обратно пропорциональна  $b$  — величине порядка постоянной решетки, на которой неприменима макроскопическая теория. Отметим, что поле  $a$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta a = -4q\pi\delta(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Нетопологические малоамплитудные структуры с источниками, где поле источника  $a$  удовлетворяло уравнению (12) в плоскости и было пропорционально

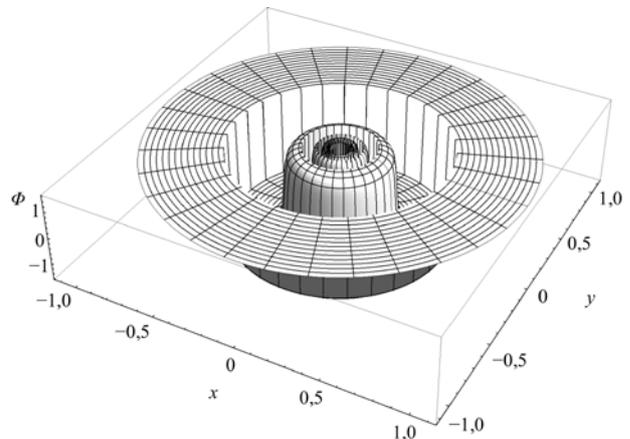


Рис. 1. Локализованная структура азимутального угла  $\Phi$  для источника ( $q=1, c=10$ ) в плоскости  $z=0$  при  $0,6 < r < 1,1$ .

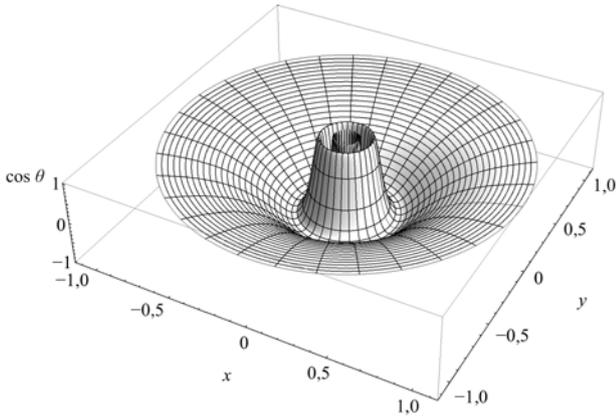


Рис. 2. Локализованная структура  $\cos \theta$  для источника ( $q = 1$ ,  $c = 10$ ) в плоскости  $z = 0$  при  $0,6 < r < 1,1$ .

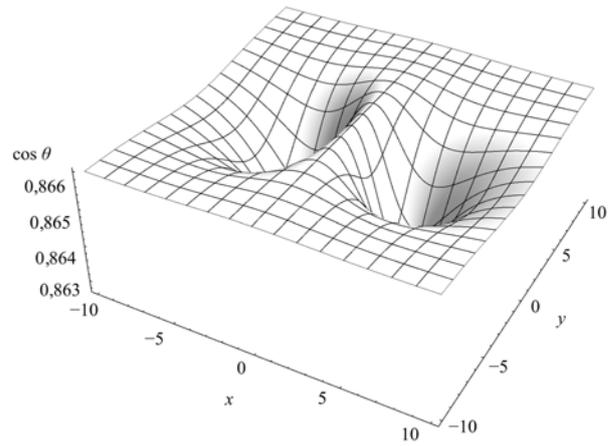


Рис. 3. Структура диполя (в плоскости  $z = 4$ ) из двух источников с параметрами ( $q = 1$ ,  $q = -1$ ),  $c = 10$ .

In ( $r$ ) рассматривались в работе [7]. В результате численных расчетов было показано что оно создается локальной анизотропией или локальным магнитным полем. В трехмерном случае поле источника можно создать только локальной анизотропией. Кроме того, такие структуры можно реализовать в большом образце изотропного ферромагнетика, где помещен ферромагнитно-упорядоченный кластер радиуса  $\rho$  с большой одноосной анизотропией. Пусть направление намагниченности в кластере характеризуется углами (на поверхности шарика радиуса  $\rho$ )  $\Phi_0$  и  $\theta_0$ . На бесконечно удаленной поверхности направление намагниченности (например, определяемое внешним магнитным полем) задается другими значениями углов. Эти граничные условия конкретизируют произвольные постоянные.

Используя (9), получаем выражение для энергии взаимодействующих источников

$$E = 2\pi\alpha M_0^2 \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{R} \right) q_i^2 + \sum_{i,j=1(i \neq j)}^N \left( \frac{1}{d_{ij}} - \frac{1}{R} \right) q_i q_j \right],$$

где  $d_{ij} = \sqrt{(x_{0i} - x_{0j})^2 + (y_{0i} - y_{0j})^2 + (z_{0i} - z_{0j})^2}$  — расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м источниками,  $R$  — размер системы. Взаимодействие структуры с параметрами ( $q$  и  $-q$ ) на расстоянии  $d$  имеет характер притяжения. Подобно плоским вихрям [8], она образует диполь (рис. 3) с конечной энергией

$$E = 4\alpha M_0^2 \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right) q^2.$$

При уменьшении  $d$  амплитуда (10) падает и структура аннигилирует. Из-за малой энергии активации такие диполи могут зарождаться термофлуктуационным способом и вносить вклад в термодинамические свойства системы.

Рассмотрим далее вихревые структуры в пленке ( $-\infty < x, y < \infty - L < z, L$ ). Свободные граничные условия на поверхности пленки для вектора  $\mathbf{n}$  с учетом (3) имеют простой вид

$$a_z(z = L) = a_z(z = -L) = 0. \quad (13)$$

Используем подстановку

$$a(x, y, z) = a\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) + \sum_{i=1}^N \operatorname{arctg}\left(\frac{y - y_{i0}}{x - x_{i0}}\right) Q_i,$$

где целые числа  $Q_i$  определяют заряд вихря в точке  $(x_{i0}, y_{i0})$ . Тогда поле  $a(r, z)$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) удовлетворяет уравнению

$$\frac{a_r}{r} + a_{r,r} + a_{z,z} = 0.$$

Его решения при граничном условии (13), пропорциональны  $\cos(\pi(L - z)k_i / (2L))$ , ( $k_i \in Z$ ). В итоге гармоническая функция имеет вид

$$a(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \operatorname{arctg}\left(\frac{y - y_{i0}}{x - x_{i0}}\right) Q_i + \sum_{i=1}^N K_0\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{c}_i| \pi k_i}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi(L - z)k_i}{2L}\right) q_i. \quad (14)$$

Здесь координаты постоянного вектора  $\mathbf{c}_i$  не совпадают с  $(x_{i0}, y_{i0})$  в общем случае. Свойства и форма этих решений во многом определяются асимптотическим поведением функции Макдональда  $K_0$ :

$$K_0(r) \rightarrow -\ln\left(\frac{r}{2}\right) \quad (r \ll 1),$$

$$K_0(r) \rightarrow e^{-r} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \quad (r \gg 1).$$

Изолированный магнитный дефект описывается формулой (8), где

$$a(x, y, z) = Q\varphi + K_0 \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{c}| \pi k}{2L} \right) \cos \left( \frac{\pi(L-z)k}{2L} \right) q, (\mathbf{r} = x, y) \quad (15)$$

характеризуется параметрами  $Q, q, \mathbf{c}$ . В плоскости  $z = z_0$  компонента  $n_z$  постоянна на кривых, которые являются  $Q$ -заходными спиральями

$$Q\varphi + K_0 \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{c}| \pi k}{2L} \right) \cos \left( \frac{\pi(L-z_0)k}{2L} \right) q = \text{const}, (-\infty < \varphi < \infty).$$

В этой плоскости магнитная структура содержит вихрь в начале координат и логарифмический источник в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{c}$ . При  $\mathbf{c} \rightarrow 0$  она совпадает в начале координат со структурой двумерного спирального вихря, найденного в работе [9]. Однако в отличие от спирального вихря при  $r \rightarrow \infty$  источник с  $K_0(r)$  (совпадающий с магнитным полем вихря в теории сверхпроводимости) имеет локализованный характер. В итоге поле  $\Phi$  описывает вихрь, структура которого модулирована по оси  $z$  и неоднородна в плоскости  $z = z_0$  (рис. 4). Прямые вычисления показывают, что ее энергия

$$E = \alpha M_0^2 L \pi \left( \log \left( \frac{4L}{bk\pi\gamma} \right) q^2 + 2Q^2 \log \left( \frac{R}{b} \right) \right) + O(b)$$

логарифмически зависит от радиуса ядра  $b$ , толщины пленки  $L$  и размеров пленки  $R$  в  $(x, y)$  направлениях. Здесь  $R \gg 1$  и  $\gamma$  — постоянная Эйлера. Отметим независимость энергии источника от размеров пленки  $R$  и параметра  $c$ , амплитуды выхода спинов из плоскости  $xu$  и значительно меньшую энергию источника по сравнению с энергией вихря. В выражении для энергии  $E_s$  системы дефектов (14) после интегрирования по толщине пленки отсутствуют перекрестные слагаемые вида  $Q_i q_j$ . Это означает, что вихри и источники не взаимодействуют друг с другом. Формула для энергии  $E_s$  включает только энергию вихрей  $E_{s_1}$  и энергию источников  $E_{s_2}$ . Выражение для  $E_{s_1}$  пропорционально энергии системы плоских вихрей

$$E_{s_1} = \alpha M_0^2 2L\pi \left\{ \sum_i (Q_i^2) \ln \frac{R}{b} + \sum_{i \neq j} (Q_i Q_j) \ln \frac{R}{d_{ij}} \right\},$$

где  $d_{ij}$  расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м вихрями. Структуры с параметрами  $Q$  и  $-Q$  на расстоянии  $d$  образуют диполь (рис. 5) с конечной энергией, пропорциональной  $\ln(d/b)$ , и могут также зарождаться термофлуктуационным способом. Энергия источников  $E_{s_2}$  не вычисляется в явном виде, но из предыдущего изложения ясно, что она не зависит от радиуса  $R$ .

Наконец отметим, что как и вихри Костерлица–Таулесса, найденные решения оказываются устойчивыми

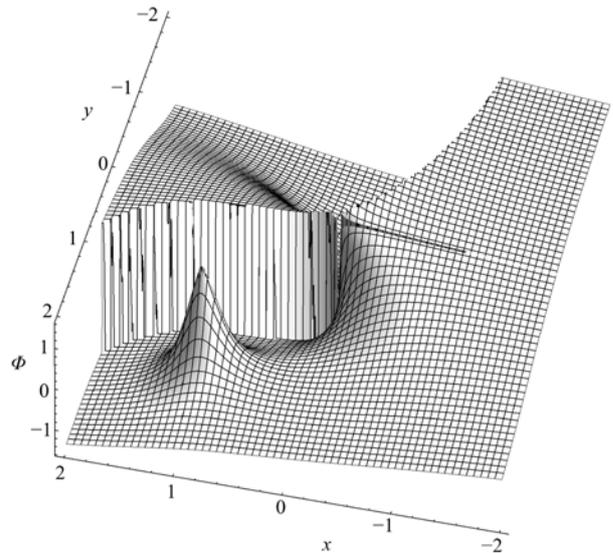


Рис. 4. Структура сложного вихря в плоскости  $z = 0$ : плоский вихрь ( $Q = 1$ ) с центром на оси  $Oz$  деформирован полем источника ( $q = 1$ ) с центром в точке  $(1, 1, 0)$ ,  $c = 2$ ,  $L = 8$ ,  $k = 1$ .

в своем классе решений. Это утверждение вытекает из явного выражения для энергии (9) и положительной определенности оператора Лапласа. В самом деле, пусть  $\delta\phi$  — малая вариация гармонического решения  $a$ , тогда

$$\begin{aligned} E[a + \delta\phi] &= \frac{\alpha M_0^2}{2} \int d\mathbf{r} (\nabla a + \nabla \delta\phi)^2 = \\ &= \frac{\alpha M_0^2}{2} \int d\mathbf{r} \left( (\nabla a)^2 + 2(\nabla a)(\nabla \delta\phi) + (\nabla \delta\phi)^2 \right) = \\ &= \frac{\alpha M_0^2}{2} \int d\mathbf{r} \left( (\nabla a)^2 + (\nabla \delta\phi)^2 \right) > E[a]. \end{aligned}$$

Авторы глубоко признательны проф. А.С. Ковалеву

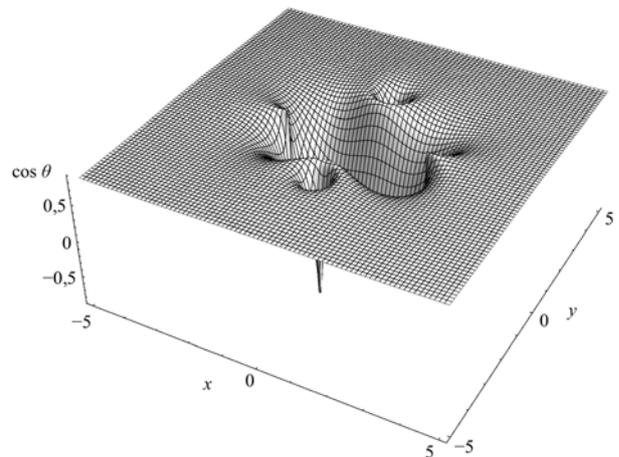


Рис. 5. Локализованная структура  $\cos \theta(x, y)$  для диполя в плоскости  $z = 8$ ,  $c = 2$ ,  $L = 8$ . Параметры вихрей и их центры:  $(Q_1 = 1, (0, -2, 8))$  и  $(Q_2 = -1, (0, 2, 8))$ . Параметры источников и их центры:  $(q_1 = 1, k_1 = 1, (0, 2, 8))$  и  $(q_2 = -1, k_2 = 1, (0, -2, 8))$ .

за приглашение участвовать в выпуске этого журнала, посвященного памяти А.М. Косевича, Д.В. Долгих за помощь в оформлении рисунков, а также рецензенту за указание физической интерпретации структур с источниками. Работы харьковской школы по солитонам и нелинейным структурам в магнетиках оказали неоценимое влияние на нас.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО России (тема «Квант», номер г. р. 01201463332).

1. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983), с. 193.
2. А.М. Kosevich, B.A. Ivanov, and A.S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
3. A.N. Bogdanov and D.A. Yablonskii, *Sov. Phys. JETP* **68**, 101 (1989).
4. B.A. Ivanov, V.A. Stephanovich, and A.A. Zhmudskii, *J. Magn. Magn. Mater.* **88**, 116 (1990).
5. А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, УрО РАН, Екатеринбург (2011).
6. A.B. Borisov, *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* **76**, 95 (2002) [*JETP Lett.* **76**, 84 (2002)].
7. A.B. Borisov, I.G. Bostrem, and A.S. Ovchinnikov, *Phys. Rev. B* **72**, 134423 (2005).

8. J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6**, 1181 (1973); J.M. Kosterlitz, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **7**, 1046 (1974).
9. A.B. Borisov, *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* **75**, 287 (2001) [*JETP Lett.* **75**, 287 (2001)].

---

### Low-amplitude three-dimensional structures in magnets

A.B. Borisov, V.V. Kiselev, and A.A. Raskovalov

A new class of low-amplitude magnetic defects in an infinite medium and the film three-dimensional ferromagnetic materials in the Heisenberg model are found. Such structures contain sources and vortices. It is shown that their dipole configurations have finite energy. A stability of structures are discussed.

PACS: 75.60.Ch Domain walls and domain structure;  
75.25.+z Spin arrangements in magnetically ordered materials.

Keywords: Heisenberg model, domain vortices, non-linear sources, Landau–Lifshitz equation, dipole.