

# Диссипативное движение вихрей в пространственно неоднородных конденсатах Бозе–Эйнштейна

Т.И. Зуева

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины  
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина  
E-mail: zueva@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 26 июня 2018 г., опубликована онлайн 26 ноября 2018 г.

Рассмотрена диссипативная модель движения вихрей в рамках двумерного уравнения Гросса–Питаевского. Методом асимптотического согласования решений получена система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих движение вихрей во вращающемся конденсате Бозе–Эйнштейна. Модель учитывает влияние различных внешних факторов: частот ловушки, числа частиц в конденсате, угловой скорости вращения конденсата, параметра диссипации и др. В частных случаях бездиссипативного движения результаты согласуются с известными результатами других авторов. Добавление диссипации обобщает известные уравнения и позволяет увидеть движение вихрей к точкам равновесия и определить равновесные конфигурации любого числа вихрей. Модель иллюстрируется большим количеством примеров.

Ключевые слова: конденсаты Бозе–Эйнштейна, квантованные вихри, вихревые решетки, диссипативное движение, равновесные конфигурации вихрей.

## 1. Введение

Экспериментальное открытие в 1995 году атомных конденсатов Бозе–Эйнштейна (БЭК) предоставило новое поле деятельности для изучения особенностей нелинейной динамики квантованных вихрей. Самые популярные объекты исследования: образование нескольких вихрей; динамика вихревых решеток; распад вихрей с кратной циркуляцией в совокупность единичных вихрей; генерация квантовой турбулентности и др. [1]. Вихрь представляет собой хорошо заметный дефект плотности, который можно отслеживать визуально: радиус ко́ра вихря в БЭК достигает 0,2 мкм (в гелии он составляет всего ~10 нм [2]). Более того, современные технологии позволяют с помощью двух лазерных лучей генерировать пары вихрей в любой точке конденсата. Тогда при выключении лазера можно наблюдать свободную динамику вихревой системы [1,3].

Возможность помещения вихрей в произвольные точки в конденсате и визуализация их движения сделали актуальной задачу теоретического описания законов динамики произвольного числа вихрей.

В качестве исходного уравнения для изучения движения квантованных вихрей берется уравнение Гросса–Питаевского [4,5], описывающее поведение волно-

вой функции  $\Psi$  конденсата из слабо взаимодействующих атомов, помещенного во внешнее поле с потенциалом  $V_{\text{tr}}$ . Для трехмерного конденсата, вращающегося с угловой скоростью  $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ , это уравнение записывают в виде

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{tr}} + g_{3D} |\Psi|^2 - \mu + i\hbar(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \right] \Psi.$$

Здесь  $g_{3D} = 4\pi\hbar^2 a / m$  — постоянная взаимодействия, пропорциональная амплитуде рассеяния  $a$ ;  $m$  — масса атома;

$$V_{\text{tr}} = \frac{m}{2} \sum_{\alpha=x,y,z} \omega_{\alpha}^2 x_{\alpha}^2$$

— захватывающий потенциал ловушки в трехмерном случае; слагаемое с  $\mathbf{\Omega}$  обусловлено переходом во вращающуюся систему координат; химический потенциал  $\mu$  — множитель Лагранжа, обеспечивающий выполнение условия нормировки волновой функции  $\int |\Psi|^2 dV = N$ ,  $N$  — число атомов в конденсате.

Если прижимающее поле в направлении  $z$  намного больше, чем в поперечном направлении,  $\omega_z \gg \omega_r$ , конденсат сплющивается и принимает вид практически

двумерного диска. В этом случае можно использовать двумерную модель в плоскости  $(x, y)$  [6]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{m}{2} \sum_{\alpha=x,y} \omega_{\alpha}^2 r_{\alpha}^2 \psi + g_{2D} \psi |\psi|^2 - \mu \psi + i\hbar(\Omega \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \psi. \quad (1)$$

Здесь  $g_{2D} = g_{3D} \sqrt{m\omega_z / 2\pi\hbar}$ , волновая функция  $\psi = |\psi| \exp(i\phi)$  зависит только от двух пространственных переменных, градиент и лапласиан уже двумерные, а вихрь представляет собой точку-сингулярность, удовлетворяющую условию квантования циркуляции

$$\oint_{\Gamma} \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

$\Gamma$  — любой замкнутый контур, охватывающий вихрь. Число возникающих в конденсате вихрей  $N_v$  зависит прежде всего от угловой скорости  $\Omega$ , однако искусственно можно генерировать любое число вихрей.

Переход к двумерной системе позволил активно использовать теорию функций комплексного переменного и получить явные уравнения движения вихрей. Первые работы, в которых были получены уравнения, описывающие движение отдельных вихрей, появились более двух десятилетий назад: [7–9] для однородных сред; [10] для абстрактной неоднородной среды; в работах [11–13] и др. были получены уравнения движения вихрей в конденсатах Бозе–Эйнштейна. Одна из самых плодотворных идей заключается в использовании метода согласования асимптотических разложений, предложенного Писменом и Рубинштейном [8,10] и позднее применяемого многими авторами.

В двумерной модели рассматривались два вида уравнений: уравнение Шредингера и уравнение потока тепла. В простейшем случае однородной модели уравнение Шредингера

$$\Delta \psi + (1 - |\psi|^2) \psi = -i\psi_t$$

давало периодические траектории одинаковых вихрей или движение по замкнутым контурам для вихрей разных знаков [7,14], в то время как уравнение потока тепла, представляющее собой уравнение Шредингера с мнимым временем  $\tau = it$ ,

$$\Delta \psi + (1 - |\psi|^2) \psi = \psi_{\tau},$$

приводило к движению вихрей к точкам равновесия [7]. Это свойство использовалось в работе [6] для получения равновесного состояния системы.

Бездиссипативная ситуация описывалась уравнением Шредингера и приводила к гамильтоновым уравнениям [9,10]. Модель давала периодические [1,15,16] или почти периодические траектории со сносом, обу-

словленным вращением [17]. Траектории сильно зависели от начального положения вихрей.

Между тем в экспериментальных работах было обнаружено затухание коллективных возбуждений в охлажденных бозе-газах [18,19], т.е. наличие диссипации. Изначально диссипация в уравнение Гросса–Питаевского была введена феноменологически [20] для учета роли конечных температурных флуктуаций в динамике БЭК. В более поздних работах ([21] и др.) было предложено добавлять диссипативный член в уравнение Гросса–Питаевского (1) как дополнительное слагаемое в производной по времени:

$$(i - \gamma_0) \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{m}{2} \sum_{\alpha=x,y} \omega_{\alpha}^2 r_{\alpha}^2 \psi + g_{2D} \psi |\psi|^2 - \mu \psi + i\hbar(\Omega \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \psi, \quad (3)$$

т.е., по сути, в уравнении Шредингера использовалось комплексное время. (Во избежание путаницы в параметре диссипации введен индекс 0: буквой  $\gamma$  без индекса обозначают постоянную Эйлера  $\gamma \approx 0,5772$ , которая появится в решениях.) Часть решения, соответствующая реальному времени, давала периодическое движение; слагаемое с мнимой частью времени отвечало за диссипацию, приводящую к движению к точкам равновесия. Объединение этих двух эффектов позволяло увидеть как движение к точкам равновесия по спиралевидным траекториям [1,22], так и выведение вихрей за пределы конденсата, если их существование было энергетически невыгодным [23].

Параметр  $\gamma_0$  в работах Tsubota и его группы ([21] и др.) полагался равным  $\gamma_0 = 0,03$ , в соответствии с экспериментальными оценками [19]. Другие авторы используют параметр диссипации в диапазоне от 0,01 до 0,03 и даже предлагают зависящую от температуры формулу для его вычисления [24].

В большей части работ диссипативные уравнения изучаются численно, исходя из уравнения (3). Между тем уравнения движения отдельных вихрей для бездиссипативной модели уже активно использовались [15,16,25].

Настоящая работа посвящена получению уравнений, описывающих диссипативное движение вихрей во вращающихся конденсатах Бозе–Эйнштейна. Это исследование обобщает хорошо изученный в литературе бездиссипативный случай и является логическим продолжением предыдущей работы [17]. Уравнения приводятся к безразмерному виду. Методом асимптотического согласования решений выводится система уравнений первого порядка, описывающая динамику отдельных вихрей (разд. 2). Приведена явная формула нахождения равновесного радиуса окружности, на которой выстраиваются вихри с заданной угловой скоростью, пока их число невелико (разд. 3).

Модель учитывает как взаимное влияние вихрей, так и влияние внешних факторов: числа атомов в конденсате, угловой скорости вращения конденсата как целого, соотношения частот ловушки и параметра диссипации (разд. 4). При увеличении угловой скорости число вихрей растет, и распределяются они уже в виде некоторой решетки. Задавая начальные положения вихрей, из динамических уравнений можно получить равновесную конфигурацию, которая может быть сопоставлена с экспериментальными результатами. Многочисленные графики иллюстрируют приведенные уравнения.

## 2. Переход к безразмерным переменным и идея метода асимптотического согласования

Используем приближение Томаса–Ферми: будем полагать, что кинетическая энергия, связанная с изменением плотности, пренебрежимо мала по сравнению с энергией ловушки и энергией взаимодействия. Параболический профиль Томаса–Ферми для уравнения (1) для симметричной ловушки ( $\omega_x = \omega_y = \omega_r$ ) определяется как

$$|\psi|^2 = \frac{\mu - m\omega_r^2 r^2 / 2}{g_{2D}},$$

а радиус Томаса–Ферми, полученный из условия  $|\psi|^2 = 0$ , оказывается равным

$$R_{TF}^2 = \frac{2\mu}{m\omega_r^2}. \quad (4)$$

Из условия нормировки  $\int |\psi|^2 dV = N$  получаем зависимость химического потенциала от числа атомов:

$$\mu = \sqrt{\frac{Ng_{2D}m\omega_r^2}{\pi}}. \quad (5)$$

Заметим, что в отличие от жидкости, заключенной в сосуд, газообразный конденсат не имеет четко определенной границы, поэтому корректное граничное условие имеет вид  $\psi|_{\infty} = 0$ . Это означает, что радиус Томаса–Ферми позволяет только оценить характерный размер конденсата, но не определяет его физическую границу.

Чтобы использовать метод асимптотического согласования, необходимо в уравнении (3) выбрать малый параметр. В качестве такого параметра обычно берется отношение радиуса кора вихря к характерному внешнему размеру [10].

Перейдем в уравнении (3) к безразмерным переменным. В качестве нормировочного параметра для химического потенциала возьмем  $\mu_0 = \hbar\omega_z$  [1,25], тогда  $\tilde{\mu} = \mu / \mu_0$ . Соответствующий радиус Томаса–Ферми (4) равен  $R_0^2 = 2\hbar\omega_z / (m\omega_r^2)$ . Остальные переменные перенормируем так:  $\rho = \mathbf{r} / R_0$ ,  $\tilde{\Omega} = \Omega t_0$ ,  $\Omega_{tr} = \omega_r / \omega_0$ ,  $\tilde{t} = t / t_0$ ,  $\tilde{\psi} = \psi \varepsilon R_0$ , где  $\omega_0 = \omega_r$ . Нормировочное время  $t_0$

и параметр  $\varepsilon$  получаются естественным образом при подстановке этих новых переменных в уравнение (3):  $t_0 = 2mR_0^2 / \hbar$ ,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu_0 t_0}} = \frac{\omega_r}{2\omega_z}. \quad (6)$$

Для дискообразного конденсата ( $\omega_z \gg \omega_r$ )  $\varepsilon$  мало. Можно проверить, что  $\varepsilon = \xi_0 / R_0$ , где длина когерентности  $\xi_0$  определяется как  $\xi_0 = (8\pi a \mu_0 / g_{2D})^{-1/2}$  [26].

Частота ловушки  $\Omega_{tr}$  нормируется на  $\omega_0 = \omega_r$  и оказывается равной 1. Однако чтобы не потерять в уравнениях слагаемые, обусловленные наличием ловушки, сохраним обозначение  $\Omega_{tr}$ . Безразмерное уравнение в этих переменных запишется как

$$(i - \gamma_0) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{t}} = -\Delta \tilde{\psi} - \frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{\psi} (\tilde{\mu} - \Omega_{tr}^2 \rho^2 - g^2 |\tilde{\psi}|^2) + i(\tilde{\Omega} \times \rho) \cdot \nabla \tilde{\psi}. \quad (7)$$

Здесь  $g^2 = g_{2D} 2m / \hbar^2$ . Размер конденсата  $\tilde{R}$  и химический потенциал  $\tilde{\mu}$  оказываются порядка 1, а радиус кора вихря имеет порядок  $\varepsilon$ .

При значениях параметров, соответствующих реальным экспериментальным данным, все величины можно вычислить явно. Так, для конденсата из атомов рубидия ( $m = 87$  а.е.,  $a \sim 5,3$  нм) для ловушки с частотами [1]  $\omega_r = 2\pi \cdot 2$  Гц,  $\omega_z = 2\pi \cdot 90$  Гц параметр  $\varepsilon \sim 0,011$ . Задавая число атомов  $N$ , можно примерно оценить безразмерный химический потенциал  $\tilde{\mu}$ , размерный ( $R_{TF}$ ) и безразмерный ( $\tilde{R}_{TF} = \tilde{R}$ ) радиусы конденсата, а также длину когерентности  $\xi$  (см. табл. 1). В первой строчке выписаны значения параметров при  $\mu = \mu_0$ .

Таблица 1. Параметры конденсата

$N$	$\tilde{\mu}$	$R_{TF}$ , мкм	$\tilde{R}_{TF}$	$\xi$ , мкм
$2,72 \cdot 10^5$	1,00	73,2	1,000	0,80
$4,40 \cdot 10^5$	1,27	81,5	1,127	0,71
$1,00 \cdot 10^6$	1,91	100,1	1,384	0,58
$1,50 \cdot 10^6$	2,35	110,8	1,532	0,52
$2,00 \cdot 10^6$	2,71	119,1	1,646	0,49

С ростом  $N$  радиус Томаса–Ферми и химический потенциал растут как  $\mu \sim \sqrt{N}$ ,  $R_{TF} \sim \sqrt[4]{N}$ , а длина когерентности убывает. Явная зависимость безразмерных  $\tilde{\mu}$  и  $\tilde{R}_{TF}$  от числа частиц показана на рис. 1.

В реальных физических экспериментах значение химического потенциала  $\tilde{\mu} = 1,5$  соответствует примерно  $\sim 4,4 \cdot 10^5$  атомам рубидия, радиусу Томаса–Ферми  $\sim 87$  мкм и радиусу вихря  $\xi \sim 0,64$  мкм [1], что находится в хорошем согласии с приведенными формулами.

Для реализации метода асимптотического согласования построим два асимптотических решения в окре-

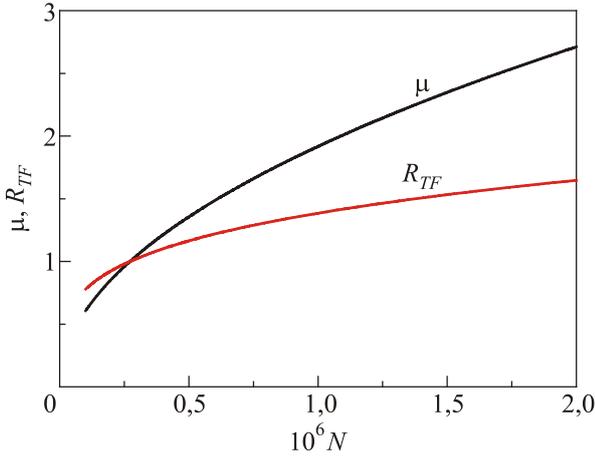


Рис. 1. Безразмерный химический потенциал и радиус Томаса–Ферми как функция числа частиц.

стности  $j$ -го вихря,  $j$  — любой номер от 1 до  $N_v$ , в двух разных линейных масштабах, соответствующих исходным и растянутым координатам [8,10]. Более строгое математическое обоснование метода приведено в книге [27].

В уравнении (7) перейдем в систему координат, связанную с  $j$ -м вихрем:  $\mathbf{p} = \xi_j(t) + \mathbf{r}$ , где  $\xi_j(t) = (\eta_j(t), \zeta_j(t))$  — координаты  $j$ -го вихря:

$$(i - \gamma_0) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} - (\dot{\xi}_j \cdot \nabla) \Psi \right) = -\nabla^2 \Psi - \frac{1}{\varepsilon^2} \Psi (\mu - \Omega_{\text{tr}}^2 (\xi_j + \mathbf{r})^2 - g^2 |\Psi|^2) + i\varepsilon (\boldsymbol{\Omega} \times (\xi_j + \mathbf{r})) \cdot \nabla \Psi. \quad (8)$$

Для упрощения записи тильды над всеми буквами опущены.

Уравнение (8) выписано в исходных координатах и соответствует внешнему уравнению (far field equation). В области  $B_{\text{out}} = \{\varepsilon^{1/2} < r < \infty\}$  вокруг  $j$ -го вихря строим решение, учитывающее поведение системы вдали от вихря, т.е. влияние других вихрей и граничные условия.

Внутреннее уравнение (core solution) описывает структуру волновой функции вблизи вихря. Чтобы удобней

было изучать поведение решения, перейдем к растянутым координатам  $\mathbf{R} = \mathbf{r} / \varepsilon$ :

$$(i - \gamma_0) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \varepsilon (\dot{\xi}_j \cdot \nabla_R) \Psi \right) = -\nabla_R^2 \Psi - \Psi \left( \mu - \Omega_{\text{tr}}^2 (\xi_j + \varepsilon \mathbf{R})^2 - g^2 |\Psi|^2 \right) + i\varepsilon (\boldsymbol{\Omega} \times (\xi_j + \varepsilon \mathbf{R})) \cdot \nabla_R \Psi. \quad (9)$$

Решение строим в области  $B_{\text{inn}} = \{1 < R < 2\varepsilon^{-1/2}\}$  с учетом условия на границе вихря (при  $R = 1$ ). В промежуточной области — кольце  $K = \{\varepsilon^{-1/2} < R < 2\varepsilon^{-1/2}\}$  — решения должны совпадать [27]. Сопоставление решений и дает искомые уравнения движения вихря. Заметим, что в кольце  $K$   $r$  мало ( $r \ll 1$ ), а  $R$  велико ( $R \gg 1$ ).

Волновые функции строятся в виде разложений по малому параметру  $\varepsilon$ :  $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}, t) + \varepsilon \psi_1(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 \psi_2(\mathbf{r}, t) + \dots$ . Подстановка этого разложения в уравнение (8) и приравнивание нулю коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  дает уравнения для функций  $\psi_0, \psi_1, \dots$ . Решения ищем в виде рядов Фурье. Вычисления показывают, что в разложения при малых  $r$  входят слагаемые порядка  $r$  и  $r \ln r$  [9,10].

Аналогично находится решение внутреннего уравнения. В разложения при больших  $R$  тоже входят слагаемые порядка  $R \ln R$ . При сопоставлении решений необходимо учесть, что  $R = r / \varepsilon$ , и это даст  $\ln \varepsilon$  в системе уравнений (см. также [12], уравнение (31)).

Самый интересный момент — нахождение произвольных постоянных, фигурирующих в решениях. Для их определения используется либо асимптотика вблизи вихря, либо интегральное условие совместности.

Детали вывода достаточно утомительны, хотя легко воспроизводимы. Подробный вывод уравнений движения вихрей вынесен в отдельную статью [28]. Некоторые интересные моменты, касающиеся определения постоянных интегрирования, приведены в Приложении. Конечный результат имеет вид системы уравнений, описывающих диссипативную динамику вихрей в неоднородном конденсате Бозе–Эйнштейна:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_j - \Omega \zeta_j = -2 \sum_{k \neq j} \frac{n_k (\zeta_j - \zeta_k)}{|\xi_j - \xi_k|^2} - \frac{2n_j \Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} \zeta_j \ln \frac{2a_1 \Xi_j}{\varepsilon m_j e^{\gamma-1/2}} + n_j \gamma_0 \zeta_j \ln \frac{2a_1 \Xi_j}{\varepsilon m_j e^{\gamma+1/2}}, \\ \dot{\zeta}_j + \Omega \eta_j = 2 \sum_{k \neq j} \frac{n_k (\eta_j - \eta_k)}{|\xi_j - \xi_k|^2} + \frac{2n_j \Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} \eta_j \ln \frac{2a_1 \Xi_j}{\varepsilon m_j e^{\gamma-1/2}} - n_j \gamma_0 \eta_j \ln \frac{2a_1 \Xi_j}{\varepsilon m_j e^{\gamma+1/2}}. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь  $\Xi_j^2 = \mu - \Omega_{\text{tr}}^2 \xi_j^2$  — плотность неоднородного конденсата в точке  $\xi_j$ ,

$$m_j^2 = \frac{\Omega_{\text{tr}}^2 (2\mu + \Omega_{\text{tr}}^2 \xi_j^2)}{(\mu - \Omega_{\text{tr}}^2 \xi_j^2)^2}$$

(см. Приложение),  $n_j$  — интенсивность  $j$ -го вихря (см. (2)),  $\gamma \approx 0,5772$  — постоянная Эйлера. Численный параметр  $a_1$  связан с плотностью конденсата в окрестности  $j$ -го вихря и оценивается как  $a_1 \approx e^{0,405}$  [10]. Параметр  $\varepsilon$  определяется соотношением частот ловушки:  $\varepsilon = \omega_r / (2\omega_z)$ .

Приведенные уравнения получены для  $j$ -го вихря, однако процедура может быть проведена для каждого из  $N_v$  вихрей, составляющих вихревую систему. Меняя  $j$  от 1 до  $N_v$ , получаем систему  $2N_v$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих движение вихрей во вращающемся конденсате Бозе–Эйнштейна. При  $\gamma_0 = 0$  получаем бездиссипативные уравнения, которые можно записать в гамильтоновом виде [17]. Уравнения с диссипацией гамильтоновыми не являются.

Обозначив

$$\omega_j = \frac{2n_j\Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} \ln \frac{2a_1\Xi_j}{\varepsilon m_j e^{\gamma-1/2}}, \quad \Gamma_j = n_j \ln \frac{2a_1\Xi_j}{\varepsilon m_j e^{\gamma+1/2}},$$

$$\mathbf{K}_{1j} = (C_{1j}, S_{1j}) = \sum_{k \neq j} \frac{n_k (\xi_j - \xi_k)}{|\xi_j - \xi_k|^2},$$

запишем систему (10) в векторном виде:

$$(\dot{\xi}_j + \boldsymbol{\Omega} \times \xi_j) \times \mathbf{k}_j = 2n_j \mathbf{K}_{1j} + (\boldsymbol{\omega}_j \times \xi_j) \times \mathbf{k}_j - n_j \gamma_0 \Gamma_j \dot{\xi}_j. \quad (11)$$

Здесь введены обозначения для векторов:  $\boldsymbol{\omega}_j = (0, 0, \omega_j)$ ;  $\mathbf{k}_j = (0, 0, n_j)$  — гировектор  $j$ -го вихря,  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ ,  $\xi_j = (\eta_j, \zeta_j, 0)$ .

Система (11) имеет наглядный и понятный вид. Слева в скобках стоит скорость  $j$ -го вихря в лабораторной системе координат:  $\mathbf{v}_j = \dot{\xi}_j + \boldsymbol{\Omega} \times \xi_j$ , вращение конденсата как целого дает дополнительное слагаемое  $(\boldsymbol{\Omega} \times \xi_j)$ .  $\mathbf{K}_{1j}$  описывает влияние остальных  $N_v - 1$  вихрей и может быть записано в виде (см. (23) в [17], (34) в [29] и (7) в [30])

$$n_j \mathbf{K}_{1j} = -\frac{dE}{d\xi_j}, \quad E = -\sum_{k, j(k \neq j)}^{N_v} n_j n_k \ln |\xi_j - \xi_k|^2.$$

Слагаемое с  $\boldsymbol{\omega}_j$  обусловлено неоднородностью конденсата (ср. с выражением (87) в [11]); и наконец, последнее слагаемое описывает силу трения, действующую на вихрь (см. формулу (22) в [31]).

Количество вихрей и характер их движения зависят от внешних параметров системы:

- числа частиц  $N$  — от него зависит химический потенциал  $\mu$  и радиус Томаса–Ферми;
- частот магнитной ловушки  $\omega_r, \omega_z$ ; хотя явно они в уравнения не входят, и даже  $\Omega_{\text{tr}}$  оказалось равным 1, их влияние заключено в параметре  $\varepsilon = \omega_r / (2\omega_z)$ ;
- угловой скорости вращения  $\Omega$ ;
- параметра диссипации  $\gamma_0$ .

Поскольку при выводе уравнений мы ограничились только первыми членами разложения волновых функций и пренебрегли слагаемыми порядка  $\varepsilon$  и выше, полученные уравнения применимы до тех пор, пока расстояния между вихрями остаются большими по сравнению с размером кора вихря и вихри не подходят слишком

близко к границе конденсата, где плотность по абсолютной величине сравнима с  $\varepsilon$ . Это означает, что система не описывает слияние вихрей и исчезновение вихря при подходе к границе.

В простейших случаях система (10) сводится к известным результатам.

1. Для одного вихря в бездиссипативном конденсате без вращения получается скорость вихря (23) из работы [10]:

$$\mathbf{v}_1 \equiv \dot{\xi}_1 = \frac{2n_1\Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_1^2} \ln \frac{2a_1\Xi_1}{\varepsilon m_1 e^{\gamma-1/2}} (-\zeta_1, \eta_1),$$

если согласовать обозначения:

$$e^{\mu_0} = \Xi_1, \quad \nabla\mu(\mathbf{r}_0) = -(\Omega_{\text{tr}}^2 / \Xi_1^2)(\eta_1, \zeta_1).$$

2. В работе [12] выписано уравнение прецессии единственного вихря в неоднородном конденсате (31). Авторы шли другим путем и обнаружили зависимость угловой скорости прецессии от положения вихря (знаменатель  $(1 - \eta_1^2)$  и соответствующий множитель в логарифме), обусловленную неоднородностью конденсата. В это уравнение в явном виде входит малый параметр  $\xi / R = \varepsilon$ .

3. Скорость единственного вихря во вращающемся конденсате имеет вид (90) в работе [11]. В работе [13] (формула (1)) учитывается неоднородность конденсата.

4. В [25] используется асимптотика вблизи вихря и уточняется выражение для угловой скорости прецессии. Уравнения принимают вид (3), (4) (см. также систему (2) в [16]). Именно к такому виду сводится система уравнений (10), если вихрь находится недалеко от центра конденсата:  $\Xi_j / m_j \approx \sqrt{\mu^2 / (2\Omega_{\text{tr}}^2)}$ . Однако в случае произвольного расположения вихрей нужно учитывать зависимость параметров  $\Xi_j$  и  $m_j$  от координат вихря.

5. И наконец, отметим работу [22], в которой были получены диссипативные уравнения. Авторы исходили из известного факта [6], что энергия в диссипативном случае — убывающая функция времени, а скорость ее убывания пропорциональна диссипации. Полученная система уравнений подобна (10), а коэффициент при параметре диссипации найден численно из аппроксимации Паде для некоторых значений химического потенциала. В системе (10) этот коэффициент вычисляется непосредственно из общих параметров задачи.

Таким образом, система (10) охватывает все рассмотренные ранее случаи, хорошо с ними согласуется, однако является более общей и может быть применена к самым разным ситуациям без ограничений.

### 3. Условия равновесия кольца вихрей

При наличии диссипации вихри движутся к точкам равновесия. Равновесные положения вихрей определяются из общей системы уравнений (10) при  $\dot{\eta}_j = \dot{\zeta}_j = 0$ .

В общем случае произвольной конфигурации вихрей получаем систему  $2N_v$  алгебраических уравнений относительно координат  $\{\eta_j, \zeta_j\}$ ,  $j = 1, N_v$ , решение которой при больших  $N_v$  становится трудоемкой задачей. В частном случае цепочки из одинаковых вихрей ( $n_j = 1$  для всех  $j$ ), расположенных на окружности радиуса  $r_0$ , условие равновесия выписывается явно:

$$\Omega r_0 - \frac{N_v - 1}{r_0} + \omega_j(r_0)r_0 = 0. \quad (12)$$

Численные расчеты показывают, что при  $N_v > 5$  более предпочтительной является конфигурация с центральным вихрем. К подобному выводу пришли и авторы статьи [12]. Для такой системы условие равновесия ( $N_v - 1$ ) вихрей записывается в виде

$$\Omega r_0 - \frac{N_v}{r_0} + \omega_j(r_0)r_0 = 0. \quad (13)$$

При  $N_v = 1$  уравнение (12) имеет корень  $r_0 = 0$  при любой угловой скорости. При большем числе вихрей, равномерно распределенных на одной окружности, с центральным вихрем или без него, наличие корней зависит от угловой скорости  $\Omega$ . Уравнение, определяющее равновесный радиус кольца вихрей, (12) или (13), при малых угловых скоростях решения не имеет (рис. 2): существование вихрей энергетически невыгодно, и они выводятся за пределы конденсата. Начиная с некоторого значения  $\Omega$  появляются два корня: неустойчивый (ближе к краю) и устойчивый (ближе к центру). Сингулярность вблизи границы конденсата на рисунке не изображена.

С ростом  $\Omega$  при фиксированном числе вихрей значение  $r_0$  уменьшается (см. рис. 2); равновесное кольцо сжимается. В реальной ситуации при увеличении угловой скорости появляются новые вихри и радиус кольца растет. В табл. 2 показана зависимость радиуса окружности, на которой находится цепочка вихрей, от угловой скорости при разном количестве вихрей (при значениях внешних параметров (14), см. ниже). Последние три строчки — конфигурация с центральным вихрем. Минимальное значение угловой скорости, при которой

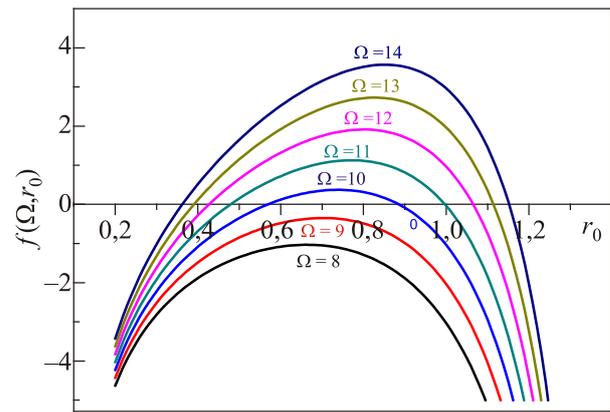


Рис. 2. (Онлайн в цвете) Левая часть уравнения (12) для двух вихрей при разных значениях угловой скорости.

уравнение имеет корни, для значений  $N_v = 2, 3, 4, 5, 6$  оказывается равным  $\Omega = 10, 11, 13, 15, 16$  соответственно.

Конфигурация с центральным вихрем (уравнение (13)) появляется при числе вихрей больше пяти; для  $N_v = 6, 7, 8$  это происходит при  $\Omega = 17, 18, 19$  (см. табл. 2).

#### 4. Численные эксперименты: зависимость решения от внешних параметров

Проведены расчеты для ловушки с частотами  $\omega_r = 2\pi \cdot 2$  Гц,  $\omega_z = 2\pi \cdot 90$  Гц [1] для числа частиц  $N = 1 \cdot 10^6$ . Безразмерная частота  $\Omega_{tr} = 1$ , безразмерный радиус Томаса–Ферми, химический потенциал и малый параметр (см. табл. 1) равны соответственно

$$\tilde{R}_{TF} = 1,384, \quad \tilde{\mu} = 1,917, \quad \varepsilon = 0,011. \quad (14)$$

Для иллюстрации будем проследивать зависимость от разных внешних параметров: угловой скорости, параметра диссипации  $\gamma_0$ , числа вихрей; от соотношения частот ловушки (параметр  $\varepsilon$ ). Стартовать будем с простейшего случая одного вихря в конденсате без вращения; затем будем последовательно добавлять диссипацию, вращение, количество вихрей.

При расчетах использовалась схема Рунге–Кутты четвертого порядка.

Таблица 2. Радиус окружности с цепочкой вихрей в зависимости от угловой скорости  $\Omega$  при разном количестве вихрей  $N_v$

$\Omega$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$N_v = 2$	0,57	0,48	0,43	0,39	0,36							
$N_v = 3$		0,57	0,53	0,49	0,46	0,44	0,42	0,40	0,38			
$N_v = 4$				0,76	0,67	0,62	0,58	0,54	0,52	0,49	0,47	
$N_v = 5$						0,74	0,68	0,64	0,60	0,58	0,55	0,53
$N_v = 6$							0,79	0,73	0,69	0,65	0,62	0,60
$N_v = 5 + 1$								0,83	0,77	0,72	0,69	0,66
$N_v = 6 + 1$									0,86	0,80	0,75	0,72
$N_v = 7 + 1$										0,88	0,82	0,78

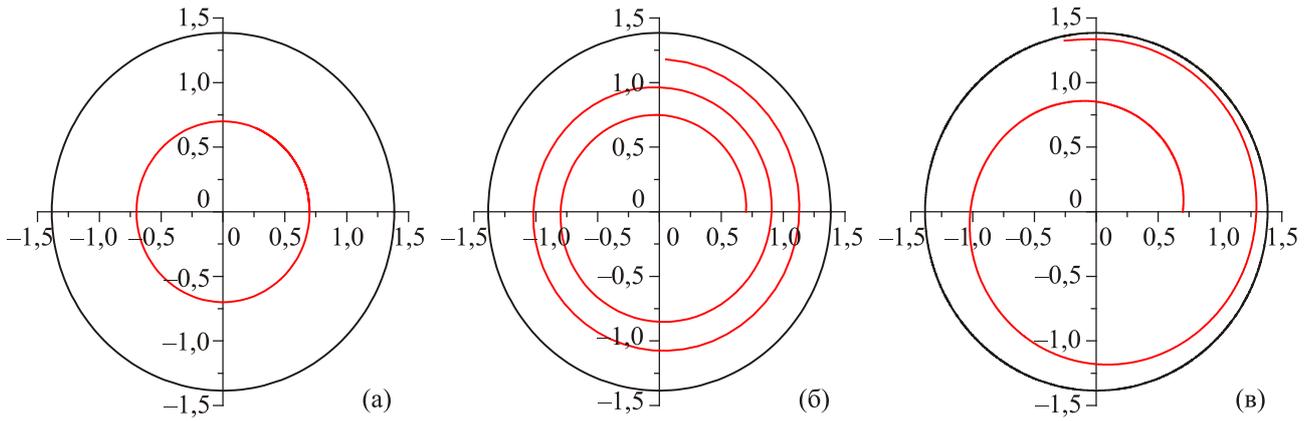


Рис. 3. Движение одного вихря в конденсате без вращения:  $\gamma_0 = 0$  (а),  $\gamma_0 = 0,01$  (б),  $\gamma_0 = 0,03$  (в).

#### 4.1. Влияние диссипации

Рассмотрим простейший случай: конденсат без вращения и без диссипации. При нулевой угловой скорости появление вихря энергетически невыгодно, однако если поместить его в конденсат принудительно, он будет вращаться по окружности того радиуса, куда был помещен изначально (рис. 3(а)). Добавление диссипации отражает реальную ситуацию: вихрь будет выведен за пределы конденсата, причем чем больше диссипация  $\gamma_0$ , тем быстрее это произойдет (рис. 3(б), (в)).

#### 4.2. Влияние вращения

Зафиксируем параметр диссипации,  $\gamma_0 = 0,03$ , и начальное положение вихря — скажем,  $(\eta_1 = 0,7, \zeta_1 = 0,0)$ , — и будем менять скорость вращения. При малых угловых скоростях вихрь будет по-прежнему выводиться за пределы конденсата (рис. 4(а)), но при некоторой угловой скорости (здесь при  $\Omega \approx 7,5$ ) вихрь остановится, а потом, по мере увеличения угловой скорости, по спирали начнет двигаться к центру (рис. 4(б),(в)). Чем больше скорость вращения, тем быстрее движется вихрь — время эксперимента на рисунках (б) и (в) одинаковое.

Определенная таким образом критическая угловая скорость зависит от начального положения вихря: чем ближе к границе конденсата находится вихрь, тем большую скорость вращения нужно приложить, чтобы заставить его двигаться к центру.

#### 4.3. Траектории движения двух вихрей

4.3.1. Два вихря одного знака. При отсутствии вращения и диссипации два вихря, расположенные в начальный момент времени на одном диаметре, движутся по окружности. При отклонении от этой тривиальной ситуации картинка усложняется.

Для наглядности на рис. 5(а)–(г) взяты одни и те же несимметричные начальные положения  $(0,7; 0,0)$  и  $(0,2; 0,3)$ . Даже простейший случай  $\gamma_0 = 0, \Omega = 0$  дает сложные траектории со сносом, обусловленным неоднородностью конденсата (рис. 5(а)).

Добавление вращения ( $\Omega = 3$ ) дает снос траекторий пропорционально угловой скорости (рис. 5(б)). Можно убедиться, что диссипация при этой заведомо недостаточной скорости вращения выводит вихри за пределы конденсата.

Увеличим скорость вращения. На рис. 5(в) при  $\Omega = 9$  один из вихрей уже приблизился к границе, а второй

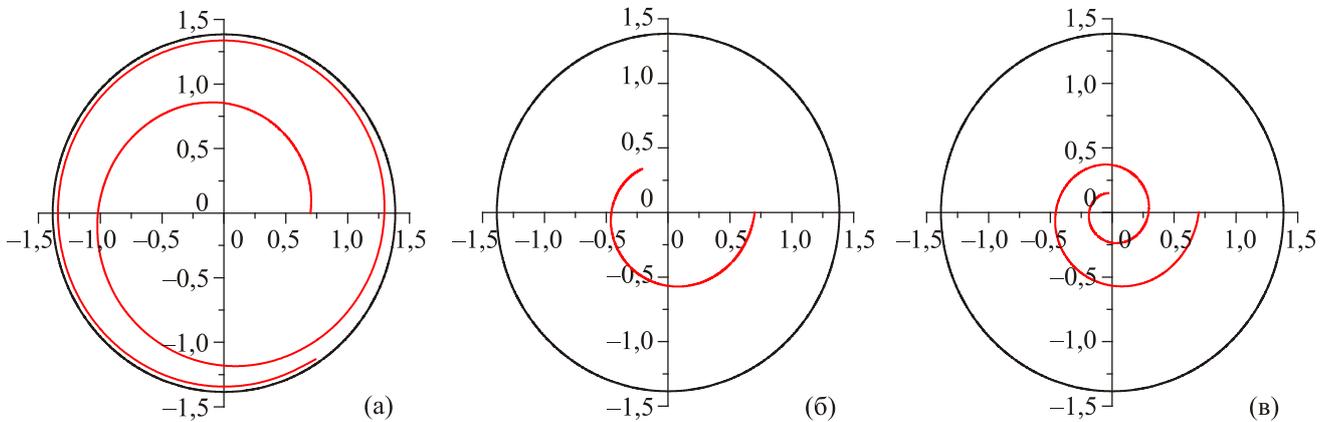


Рис. 4. Влияние вращения на движение одного вихря:  $\Omega = 2$  (а),  $\Omega = 9$  (б),  $\Omega = 12$  (в).

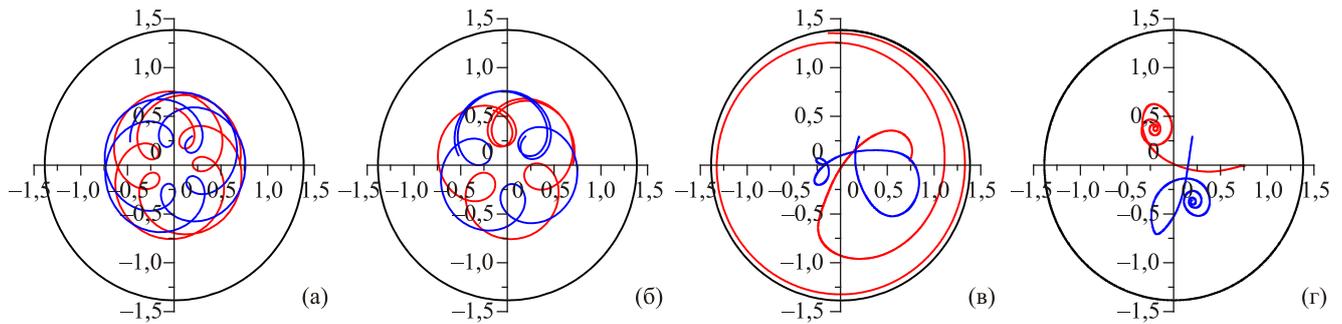


Рис. 5. (Онлайн в цвете) Движение двух вихрей одного знака: (а)  $\gamma_0 = 0$ ,  $\Omega = 0$ , (б)  $\gamma_0 = 0$ ,  $\Omega = 3$ , (в)  $\gamma_0 = 0,03$ ,  $\Omega = 9$ , (г)  $\gamma_0 = 0,03$ ,  $\Omega = 12$ .

явно направляется к центру конденсата — в равновесную позицию (счет прерывается, когда хотя бы один вихрь подходит близко к границе). И только достаточно большая угловая скорость ( $\Omega = 12$ , рис. 5(г)) обеспечивает движение обоих вихрей к точкам равновесия, соответствующим расчетным значениям (12).

4.3.1. Два вихря разных знаков (диполь). Рассмотрим ту же последовательность примеров.

(1) Нет ни вращения, ни диссипации. Симметричные начальные положения дают замкнутые траектории, по которым вихри движутся в противоположных направлениях. Внешний контур соответствует начальным позициям  $\{(1, 0; 0, 0), (0, 0; 1, 0)\}$ , внутренний  $\{(0, 7; 0, 0), (0, 0; 0, 7)\}$  (рис. 6(а)). Произвольные начальные положения дают траектории со сносом, обусловленным неоднородностью среды, со временем плотной сеткой покрывающие все пространство. Рисунок 6(б) построен для начальных положений  $\{(0, 8; 0, 0), (0, 2; 0, 0)\}$  (ср. с рис. 3 [1]).

(2) Вращение в бездиссипативном случае дает дополнительный снос. Случай симметричных начальных положений  $\{(0, 8; 0, 0), (0, 0; 0, 8)\}$  для  $\Omega = 2$  показан на рис. 6(в). На рис. 6(г) к случаю (б) добавлено вращение.

Картина бездиссипативного движения пары вихрь–антивихрь аналогична вращению вихревой пары во-

круг дефекта в магнетиках (см. [30], рис. 5(в)): уравнения, описывающие обе системы, записываются в виде уравнений Тиле (7) [30].

(3) Самый любопытный случай — с диссипацией. Случай без вращения (рис. 7(а)) при симметричных начальных позициях дает симметричные траектории: вихри разных знаков движутся навстречу друг другу или в противоположных направлениях, в зависимости от выбора порядка вихрей, и аннигилируют.

Небольшое вращение ( $\Omega = 4$ ) сносит эти траектории против часовой стрелки (рис. 7(б)), а дальнейшее увеличение скорости вращения ( $\Omega = 5$ ) приводит к удалению вихрей из конденсата (рис. 7(в)). Интересно было бы проследить, при какой угловой скорости за пределы конденсата выводится только отрицательный вихрь, а положительный занимает свое равновесное положение в центре, но модель не допускает изменения числа вихрей.

Таким образом, существование вихрей с отрицательной циркуляцией энергетически невыгодно. Если в идеальном бездиссипативном случае такие вихри чисто теоретически могут существовать, то добавление даже небольшой диссипации приводит к их взаимному уничтожению или выведению за пределы конденсата.

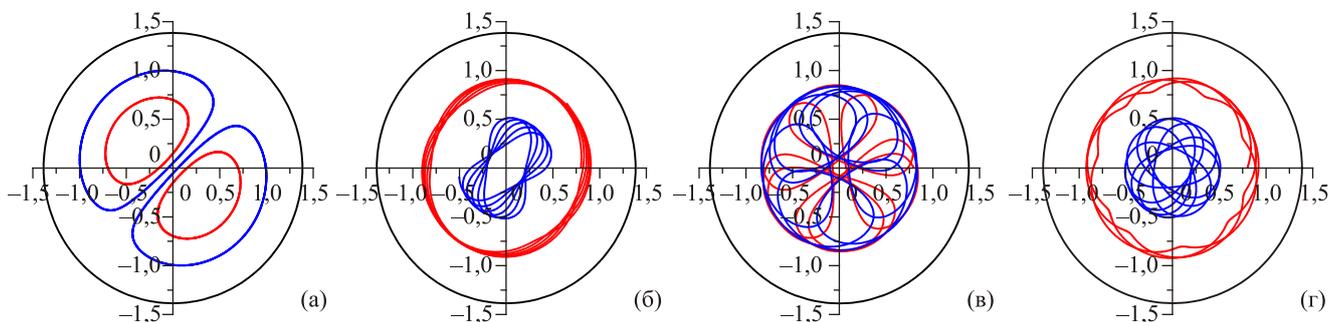


Рис. 6. (Онлайн в цвете) Движение двух вихрей разных знаков: случай без диссипации ( $\gamma_0 = 0$ ): (а)  $\Omega = 0$ , симметричные начальные положения; (б)  $\Omega = 0$ , несимметричные начальные положения; (в), (г) — к случаям (а) и (б) добавлено вращение  $\Omega = 2$ .

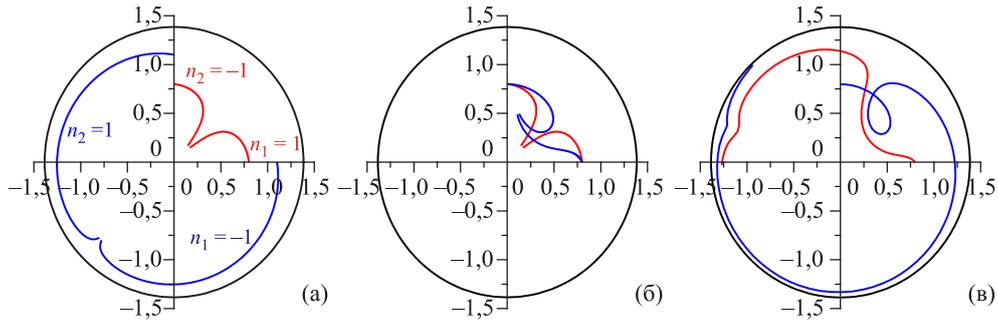


Рис. 7. (Онлайн в цвете) Движение двух вихрей разных знаков при наличии диссипации,  $\gamma_0 = 0,03$ : (а) случай без вращения,  $\Omega = 0$ , — симметричные кривые; (б) снос, обусловленный небольшим вращением ( $\Omega = 4$ ); (в)  $\Omega = 5$  — вихри уходят за пределы конденсата.

4.4. Равновесные конфигурации при большом числе вихрей

При  $N_v > 5$  реализуется ситуация с центральным вихрем, когда вокруг одного вихря в центре движется кольцо вихрей. Равновесный радиус этого кольца определяется уравнением (13).

Расчетные позиции великолепно согласуются с точками, в которые со временем попадают вихри в численных экспериментах. На рис. 8 показано движение вихрей к точкам равновесия. Чтобы не загромождать рисунок, начальные участки траекторий вихрей не показаны, показано только движение в окрестности точек равновесия.

Конфигурация с центральным вихрем (рис. 8(б)) прослеживается вплоть до  $N_v = 8$ . И уже при  $N_v \geq 9$

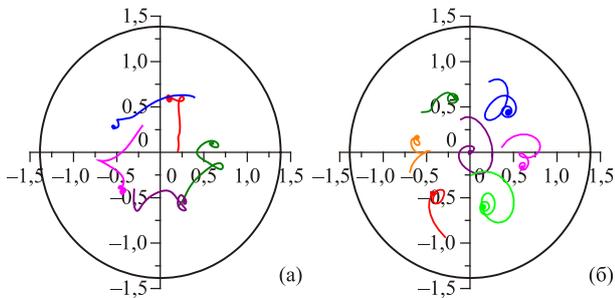


Рис. 8. (Онлайн в цвете) Движение вихрей к точкам равновесия:  $N_v = 5$ ,  $\Omega = 19$  (а),  $N_v = 7$ ,  $\Omega = 25$  (б).

равновесная система представляет собой вихревую решетку.

Задавая угловую скорость и произвольные начальные положения вихрей (при условии, что расстояния между любыми двумя вихрями должны быть много больше  $\epsilon$ ) и запуская вычислительный процесс (10), через некоторое число шагов получаем равновесные конфигурации вихрей. На рис. 9(а)–(в) показаны равновесные структуры для  $N_v = 9, 15, 20$ . При  $N_v = 9$  внутри кольца оказываются уже два вихря, и внешнее кольцо превращается в эллипс. Вихревые структуры с большим числом вихрей приближаются к треугольной решетке.

Если число вихрей зафиксировать, а угловую скорость увеличивать, равновесная конфигурация будет сжиматься: вращение создает дополнительную центростремительную силу. На рис. 9(г) угловая скорость удвоена по сравнению с 9(в). В реальном конденсате освободившееся место занимают новые вихри.

4.5. Влияние числа частиц в конденсате и соотношения частот магнитной ловушки

Все приведенные графики построены для параметров (14). Однако внешние параметры можно менять произвольно — например, в соответствии с экспериментальными данными.

Изменение числа частиц повлечет за собой изменение радиуса Томаса–Ферми и химического потенциала в соответствии с формулами (4) и (5) (см. рис. 1).

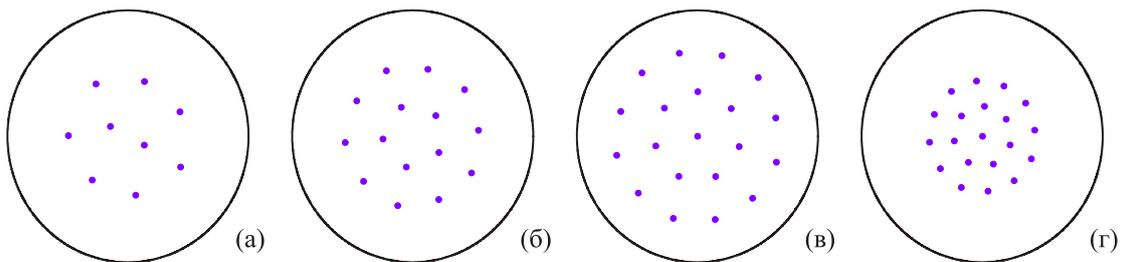


Рис. 9. Вихревая решетка при:  $N_v = 9$ ,  $\Omega = 30$  (а),  $N_v = 15$ ,  $\Omega = 40$  (б),  $N_v = 20$ ,  $\Omega = 40$  (в),  $N_v = 20$ ,  $\Omega = 80$  (г).

Изменение соотношения частот ловушки изменит малый параметр  $\varepsilon$  (6). Нужно помнить, что приведенная модель описывает систему, близкую к двумерной, т.е. для  $\omega_z \gg \omega_r$ , тогда  $\varepsilon$  мало.

Уменьшение  $\varepsilon$  делает конденсат еще более плоским, радиус конденсата растет, влияние неоднородности плотности ослабляется, модель сводится к почти однородной плоской модели в неограниченном пространстве. В реальных экспериментах частоты ловушки конечны, и конденсат удерживается в ограниченном объеме.

Увеличение  $\varepsilon$  в конце концов приводит к трехмерной системе, тогда наша модель не работает.

### 5. Заключение

Получены уравнения движения вихрей (10) в неоднородном конденсате Бозе–Эйнштейна при наличии вращения и диссипации. Уравнения выведены непосредственно из двумерного диссипативного уравнения Гросса–Питаевского (3) методом асимптотического согласования решений.

Система уравнений (10) позволяет определить траектории движения заданного числа вихрей, запущенных из заданных начальных положений. Внешние параметры — соотношение частот ловушки, число частиц в конденсате, угловая скорость вращения — также задаются.

Преимуществом системы является минимальное количество численных параметров: кроме параметра  $a_1$ , определяемого интегралом от плотности конденсата в окрестности вихря, все остальные коэффициенты уравнений вычисляются либо из внешних параметров (частот ловушки, числа частиц и т.п.), либо с помощью известных параметров (постоянная Эйлера  $\gamma$  и физические константы: постоянная Планка, масса атома и т.п.).

Полученные результаты хорошо согласуются с численными результатами других авторов. Было бы интересно сопоставить численные траектории с экспериментальными данными.

Автор выражает признательность участникам семинара отдела теоретической физики №26 Физико-технического института низких температур им. Б.И. Веркина (рук. д.ф.-м.н. И.В. Криве) за искренний интерес к работе и эмоциональную поддержку. Особая благодарность д.ф.-м.н. А.С. Ковалеву и д.ф.-м.н. С.И. Шевченко за полезные обсуждения и ценные замечания.

### Приложение

Волновые функции  $\psi_0(\mathbf{r}, t), \psi_1(\mathbf{r}, t), \dots$ , составляющие решения внешнего (8) и внутреннего (9) уравнений, ищем в виде  $\psi_k(\mathbf{r}) = f_k(\mathbf{r}) \exp(i\Phi_k(\mathbf{r}))$ , где плотность и фаза находятся в виде рядов Фурье:  $f_k(\mathbf{r}) = f_{0k}(r) + f_{1c,k}(r) \cos \theta + f_{1s,k}(r) \sin \theta + \dots$ . Для функций  $f_{1c,k}(r), f_{1s,k}(r), \dots$  получаем обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с правой

частью. Асимптотику решений внешнего уравнения ищем вблизи вихря, т.е. при малых  $r$ , внутреннего — вдали от вихря, при больших  $R$ . В полученные асимптотические разложения входят произвольные постоянные, которые нужно определить из дополнительных условий.

Вблизи вихря внешнее уравнение нулевого порядка специальными преобразованиями (см. [10,25,28]) сводится к уравнению модифицированных функций Бесселя нулевого порядка  $K_0(m_j r)$ , где  $m_j^2 = -\Delta v + (\nabla v)^2$  и  $v(r)$  связано с плотностью Томаса–Ферми как  $v(r) = 1/2 \ln(\mu - \Omega_{\text{tr}}^2 r^2)$ . Вычисляя градиент и лапласиан от этого выражения в точке дислокации  $j$ -го вихря, получаем значение  $m_j$ , приведенное выше.

Для определения произвольных постоянных, входящих во внутреннее решение, запишем уравнения для функций нулевого и первого порядка

$$\Delta \Psi_0 + \Psi_0 (\Xi_j^2 - g^2 |\Psi_0|^2) = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_1 + \Psi_1 (\Xi_j^2 - 2g^2 |\Psi_0|^2) - g^2 \Psi_0^2 \overline{\Psi_1} = \\ = i(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\xi}_j) \cdot \nabla \Psi_0 - 2\Psi_0 \Omega_{\text{tr}}^2 (\boldsymbol{\xi}_j \cdot \mathbf{R}) - (i - \gamma_0) (\boldsymbol{\xi}_j \cdot \nabla \Psi_0) \end{aligned}$$

и воспользуемся условием совместности [7,10]:

$$\int_{\mathcal{D}} \text{Re}(u \overline{\mathcal{L}v} - v \overline{\mathcal{L}u}) dx = \int_{\partial \mathcal{D}} \text{Re}(u \overline{\partial_n v} - v \overline{\partial_n u}) dl.$$

Здесь  $u(x), v(x)$  — заданные гладкие функции,  $\mathcal{D}$  — двумерная область,  $d\mathcal{D}$  — ее граница,  $\partial_n$  — производная по внешней нормали,  $\mathcal{L}$  — оператор в левой части уравнения для  $\Psi_1$ . В качестве функций  $u$  и  $v$  возьмем  $u = \hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla \Psi_0$  ( $\hat{\mathbf{e}} = (e_1, e_2)$  — произвольный единичный вектор),  $v = \Psi_1$ , а черта означает комплексное сопряжение. Область  $\mathcal{D}$  выберем в виде круга радиусом  $L = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2}) \gg 1$  вокруг  $j$ -го вихря таким образом, чтобы граница круга попадала в область сопоставления решений, а остальные вихри располагались далеко за пределами круга. Легко убедиться, что  $\mathcal{L}u = \mathcal{L}(\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla \Psi_0) = 0$ . Производная по внешней нормали — производная по  $R$ ,  $\mathcal{L}\Psi_1$  совпадает с правой частью уравнения для  $\Psi_1$ , и интегральное тождество принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \text{Re}((\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla \Psi_0) \overline{\mathcal{L}\Psi_1}) dx = \\ = \int_{\partial \mathcal{D}} \text{Re} \left( (\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla \Psi_0) \frac{\partial \overline{\Psi_1}}{\partial R} - \Psi_1 \frac{\partial (\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla \Psi_0)}{\partial R} \right) dl. \end{aligned}$$

Интегралы по границе вычисляются явно, если знать асимптотику  $\Psi_0$  и  $\Psi_1$  при больших  $R$ . Она найдена с точностью до произвольных постоянных. По кругу интегрируется только функция нулевого порядка, которая имеет вид  $\Psi_0(R, \theta) = f_0(R) \exp(in_j \theta)$  и в окрест-

ности вихря хорошо изучена. Интеграл по кругу сводится к линейной комбинации четырех интегралов:

$$i_1 = \int_0^L f_0 f_0' dR, \quad i_2 = \int_0^L f_0 f_0' R^2 dR, \quad i_3 = \int_0^L f_0'^2 R dR,$$

$$i_4 = n_j^2 \int_0^L \frac{f_0^2}{R} dR.$$

Первые два интеграла вычисляются явно:

$$i_1 = \int_0^L f_0 f_0' dR = \frac{f_0^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\Xi_j^2}{2g^2},$$

$$i_2 = \int_0^L f_0 f_0' R^2 dR = \frac{n_j^2}{g^2} \ln(a_1 \Xi_j L)$$

( $i_2$  вычислен в статье [10], численный параметр  $a_1 \approx e^{0,405}$ ). Оставшиеся два сводятся к двум первым:

$$i_3 + i_4 = \Xi_j^2 i_2 - 2n_j^2 i_1.$$

Подставляя все найденные значения интегралов в условие совместности, вычисляем постоянные интегрирования и получаем внутреннее решение. Сопоставление двух решений дает систему (10).

1. B. Gertjerenken, P.G. Kevrekidis, R. Carretero-Gonzalez, and B.P. Anderson, *Phys. Rev. A* **93**, 023604 (2016).
2. *Progress in Low Temperature physics: Quantum Turbulence*, Vol. XVI, M. Tsubota and W.P. Halperin (eds.), Elsevier (2009), pp. 253, 362.
3. E.C. Samson, K.E. Wilson, Z.L. Newman, and B.P. Anderson, *Phys. Rev. A* **93**, 023603 (2016).
4. E.P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
5. L.P. Pitaevskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **40**, 646 (1961).
6. Y. Castin and R. Dum, *Eur. Phys. J. D* **7**, 399 (1999).
7. J. Neu, *Physica D* **43**, 385 (1990).
8. L.M. Pismen and J. Rubinstein, *Physica D* **47**, 353 (1991).
9. E. Weinan, *Physica D* **77**, 383 (1994).
10. B.Y. Rubinstein and L.M. Pismen, *Physica D* **78**, 1 (1994).
11. A.L. Fetter and A.A. Svidzinsky, *J. Phys.: Condens. Matter* **13**, R135 (2001).
12. Jong-Kwan Kim and A.L. Fetter, *Phys. Rev. A* **70**, 043624 (2004).
13. D.V. Freilich, D.M. Bianchi, A.M. Kaufman, T.K. Langin, and D.S. Hall, *Science* **329**, 1182 (2010).
14. Т.И. Зуєва, *ФНТ* **26**, 119 (2000) [*Low Temp. Phys.* **26**, 85 (2000)].
15. P.J. Torres, R. Carretero-Gonzalez, S. Middelkamp, P. Schmelcher, D.J. Frantzeskakis, and P.G. Kevrekidis, *Communications on Pure and Applied Analysis* **10**, 1589 (2011).
16. R. Navarro, R. Carretero-Gonzalez, P.J. Torres, and P.G. Kevrekidis, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 225301 (2013).

17. Т.И. Зуєва, *Мат. Методи та Фіз.-Мех. Поля* **57**, 68 (2014).
18. D.S. Jin, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 420 (1996).
19. S. Choi, S.A. Morgan, and K. Burnett, *Phys. Rev. A* **57**, 4057 (1998).
20. L.P. Pitaevskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **35**, 408 (1958).
21. M. Tsubota, K. Kasamatsu, and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **65**, 023603 (2002).
22. D. Yan, R. Carretero-Gonzalez, D.J. Frantzeskakis, P.G. Kevrekidis, N.P. Proukakis, and D. Spirn, *Phys. Rev. A* **89**, 043613 (2014).
23. E.J.M. Madarassy and C.F. Barenghi, *J. Low Temp. Phys.* **152**, 122 (2008).
24. C.W. Gardiner, J.R. Anglin, and T.I.A. Fudge, *arXiv:cond-mat/0112129*.
25. S. Middelkamp, P.G. Kevrekidis, D.J. Frantzeskakis, R. Carretero-Gonzalez, and P. Schmelcher, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43**, 155303 (2010).
26. P.G. Kevrekidis, D.J. Frantzeskakis, and R. Carretero-Gonzalez, *Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics*, Vol. 45 (2008).
27. А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин, А.С. Шамаев, *Усреднение. Методы и приложения*, Новосибирск: Тамара Рожковская (2007).
28. Т.И. Зуєва, *Мат. Методи та Фіз.-Мех. Поля*, в печати.
29. А.С. Ковалев, *ФНТ* **43**, 334 (2017) [*Low Temp. Phys.* **43**, 274 (2017)].
30. А.С. Ковалев, Я.Е. Прилепский, *ФНТ* **44**, 847 (2018) [*Low Temp. Phys.* **44**, 663 (2018)].
31. Е.В. Сонин, *Phys. Rev. B* **55**, 485 (1997).

## Дисипативний рух вихорів у просторово неоднорідних конденсатах Бозе–Ейнштейна

Т.И. Зуєва

Розглянуто дисипативну модель руху вихорів в межах двовимірного рівняння Гросса–Пітаєвського. Методом асимптотичного зіставлення розв'язків отримано систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, що описують рух вихорів у конденсатах Бозе–Ейнштейна, що обертаються. Модель враховує вплив різних зовнішніх факторів: частот магнітної пастки, числа атомів у конденсаті, кутової швидкості обертання конденсату, параметру дисипації та ін. В окремих випадках бездисипативного руху результати узгоджуються з відомими результатами інших авторів. Додавання дисипації узагальнює відомі рівняння і дозволяє побачити рух вихорів до точок рівноваги та визначити рівноважні конфігурації будь-якої кількості вихорів. Значна кількість малюнків ілюструє модель.

Ключові слова: конденсати Бозе–Ейнштейна, квантовані вихорі, вихорові гратки, дисипативний рух, рівноважні конфігурації вихорів.

Dissipative motion of vortices in spatially inhomogeneous Bose–Einstein condensates

T.I. Zueva

The problem of dissipative vortex motion in frame of 2D Gross–Pitaevskii equation is considered. Using the method of matched asymptotic expansion we construct the system of ordinary differential equations describing the vortex dynamics in the rotating Bose–Einstein condensate. The model takes into account the influence of different

outer factors, such as magnetic trap frequencies, number of atoms in the condensate, angular velocity, dissipation parameter and others. In special cases of non-dissipative motion the results are consistent with known results of other authors. Addition of dissipation generalizes the known equations and allows to see the motion of the vortices to equilibrium points and determine equilibrium configuration of any number of vortices. A large number of examples illustrates the model.

Keywords: Bose–Einstein condensate, quantized vortices, vortex lattice, dissipative motion, vortex equilibrium configuration.