

К вопросу об универсальности критических индексов в режиме квантового эффекта Холла

Ю.Г. Арапов¹, С.В. Гудина¹, Е.В. Дерюшкина¹, Н.Г. Шелушнина¹, М.В. Якунин^{1,2}

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики металлов им. М.Н. Михеева Уральского отделения РАН, ул. С. Ковалевской, 18, г. Екатеринбург, 620990, Россия
E-mail: arapov@imp.uran.ru

²Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина
ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия

Статья поступила в редакцию 27 ноября 2018 г., опубликована онлайн 20 декабря 2018 г.

Проведен критический анализ работ в рамках концепции двухпараметрического скейлинга, а также дан краткий обзор современных перколяционных моделей для квантового фазового перехода плато-плато в режиме квантового эффекта Холла. Мотивацией работы являлось обсуждение теоретических моделей для описания влияния перекрытия и смешивания плотностей локализованных и делокализованных состояний на уровнях Ландау на универсальность критических индексов.

Ключевые слова: гипотеза скейлинга, перколяционные модели, квантовый эффект Холла.

1. Введение

Представление о последовательности квантовых фазовых переходов в сильном магнитном поле в режиме квантового эффекта Холла порождает ряд принципиальных вопросов. 1) Какова природа металлического (в центре уровня Ландау) и диэлектрического (между уровнями Ландау) поведения проводимости в режиме целочисленного квантового эффекта Холла (ЦКЭХ)? 2) Если описать квантовые переходы между плато в рамках теории двухпараметрического скейлинга, то насколько эта теория устойчива при изменении вида потенциала рассеяния, при смешивании уровней Ландау с большими номерами (при факторе заполнения больше единицы), при наличии сильного электрон-электронного, обменного и спин-орбитального взаимодействия, к различным механизмам неупругого рассеяния (сбоя фазы) в конкретных экспериментальных системах? 3) Что произойдет с универсальностью критических индексов при переходах между вырожденными по спину диэлектрическими состояниями ЦКЭХ? В последнее время к этой проблеме добавилась еще одна: что произойдет с универсальностью критических индексов для переходов при наличии вырождения по псевдоспину в структурах с двумя слоями, с туннельно-связанными двойными квантовыми ямами, для графена вследствие наличия у него двух подрешеток?

2. Теория двухпараметрического скейлинга

История исследования скейлингового поведения кинетических коэффициентов в квантовых фазовых переходах (КФП) из локализованных состояний в делокализованные в режиме целочисленного квантового эффекта Холла в двумерных (2D) электронных системах насчитывает более 30 лет [1–67]. В экспериментальном плане развитие шло по пути проверки устойчивости универсальности скейлингового поведения и реальных значений теоретически предсказанных величин критических индексов (длины локализации $\xi \sim |v - v_c|^{-\gamma}$, $\gamma = 7/3$, температурных зависимостей длины сбоя фазы $L_\phi \propto T^{-p/2}$, $p = 2$, и полуширины пиков $\rho_{xx} \Delta B(T) \sim (T/T_0)^k$, $k = 0,42$) этих КФП. Пионерский эксперимент (1988 г.) по температурной зависимости перехода между двумя холловскими плато ρ_{xy} и ширины на половине высоты пика диагонального сопротивления ρ_{xx} подтвердил универсальность критического индекса $k = 0,42 \pm 0,04$ [5]. Практически сразу же были обнаружены и отклонения от предсказаний теории скейлинга [6–23]. Выяснилось, что критический индекс k зависит от типа потенциала беспорядка, уровня легирования, изменяясь от 0,4 до 0,8 [6,7,10,11,17,22]. Критический индекс γ определяется типом и параметрами потенциала беспорядка — при этом может изменяться от $\gamma = 4/3$ (в классической модели перколяции) до $\gamma = 7/3$ (в квантовой модели перколяции) [2,3]. Кри-

тический индекс температурной зависимости длины сбега фазы p зависит от механизмов неупругого рассеяния делокализованных электронов в сильном магнитном поле в центре уровней Ландау (УЛ) и изменяется от $p = 1,0$ до $3,0-4,0$ [44].

На сегодняшний день как экспериментаторы, так и теоретики пришли к выводу, что теория двухпараметрического скейлинга [1–4] экспериментально не подтверждается.

По каким причинам?

Во-первых, специфические особенности исследуемых 2D-электронных систем, как правило, существенно отличаются от заложенных в первоначальную теорию двухпараметрического скейлинга, предсказания которой не зависят от микроскопических деталей беспорядка и электрон-электронного взаимодействия [1,2,6–7].

1) Критический индекс κ , в принципе, может быть извлечен из любого зависящего от температуры транспортного параметра. В идеале было бы предпочтительнее извлечь критическое поведение из проводимостей σ_{xx} и σ_{xy} , поскольку они являются двумя соответствующими параметрами теории двухпараметрического скейлинга и рабочими параметрами для любой теории переноса. Однако в экспериментах необходимо найти компромисс между возможностью непосредственно измерять только один коэффициент проводимости, σ_{xx} на диске Корбино, или измерением обеих компонент тензора сопротивления на холловских мостиках, одновременно используя холловские контакты и потом преобразуя их в проводимости. Осложнение в этом последнем процессе может заключаться в том, что компоненты сопротивления измеряются на разных частях образца, так что небольшие различия в электронной плотности или наличие других макронеоднородностей приводят к искажениям значений критических индексов [37].

2) В современных наноструктурах с высокими подвижностями флуктуации потенциала беспорядка имеют дальнедействующий характер вместо короткодействующего, заложенного в теорию. Иногда в образцах обнаруживались макронеоднородности (например, градиенты концентрации носителей заряда) [3,6,7,15,37].

3) Конечно же, присутствовало дальне- и короткодействующее кулоновское электрон-электронное взаимодействие [39,46,50], а в структурах с затвором — экранирование [54,55].

4) Особое значение имеют исследования спин-зависимых эффектов при перекрытии и смешивании спин-поляризованных уровней Ландау, когда нужно учитывать обменное и спин-орбитальное взаимодействие [17–31].

5) Появились структуры с псевдоспином — структуры с двумя слоями, с туннельно-связанными двойными квантовыми ямами, графен с двумя подрешетками, где уровни Ландау 4-кратно вырождены [33].

б) Различные физические ситуации и теоретические подходы предсказывают различные температурные зависимости кинетических коэффициентов в переходной области и, как следствие, при анализе экспериментальных результатов нужно очень осторожно относиться к выбору выражения, связывающего все критические индексы:

а) $\kappa = 1/2\gamma$, если $L_{in} = (D\tau_{in})^{1/2}$, $\tau_{in} \sim T^{-1}$ для диффузионного транспорта [4];

б) $\kappa = 2/\gamma$, если $\tau_{in} \sim T^{-2}$ для механизма неупругого электрон-электронного рассеяния Ландау в чистых металлах [2,6];

в) $\kappa = p/\gamma$, если $\tau_{in} \sim T^{-2}$ для неупругого электрон-фононного механизма рассеяния при $p = 1,0-4,0$, в зависимости от диапазона температуры и магнитного поля [4,7] и мультифрактальности волновой функции электрона [7];

г) в отличие от случая невзаимодействующих электронов, модель квантовой перколяции с кулоновским взаимодействием дает динамический скейлинговый критический индекс $z = 1,0$ [43], что приводит к $\kappa = 1/z\gamma = 1/\gamma$.

д) наконец, для прыжкового транспорта (variable range hopping conduction) в хвостах уширенных беспорядком уровней Ландау в случае рассеяния на короткодействующем потенциале получено $\kappa = 1/\gamma$ [58].

7) Однако основным недостатком подавляющего числа экспериментальных работ было то, что *измерялся один критический индекс*, а значения остальных считались универсальными или рассчитывались по соотношениям, приведенным в б). И только в последнее время в работах N.A. Doodoo-Amoo *et al.* [44] были одновременно измерены значения всех трех критических индексов независимыми методиками. Более того, каждый критический индекс желательно измерять несколькими методами.

На образцах GaAs/Al_xGa_{1-x}As с разным содержанием Al, отвечающим за смену типа рассеивающего потенциала, независимыми методами были определены критический индекс длины локализации γ , критический индекс длины сбега фазы p и критический индекс ширины полосы делокализованных состояний κ [44]. Было показано, что при смене масштаба рассеивающего потенциала изменяется значение извлеченного из частотных зависимостей критического индекса κ_c с универсального $\kappa_c = 0,42$ (мелкомасштабный потенциал) на неуниверсальное $\kappa_c = 0,6$ (крупномасштабный). Уникальными являются результаты работ [44], где авторам удалось показать смену режима квантового протекания на классическое по изменению значения критического индекса длины локализации при изменении масштаба рассеивающего потенциала (образцы с разным содержанием Al) и при изменении соотношения характерных длин l_ϕ , ξ и ξ_p с увеличением частоты. Значения других критических индексов оказались

зависимы: κ — от номера уровня Ландау, p — от величины подвижности электронов.

Нетрудно убедиться, что все соотношения, связывающие критические индексы в рамках теории скейлинга и соответствующей ей перколяционной модели Чалкера–Коддингтона [4], не выполняются при подстановке экспериментально независимо полученных значений критических индексов.

Когда уровни Ландау перекрываются, возникает вопрос, остается ли при этом неизменной универсальность критического поведения [1,2]. С одной стороны, на основе различных моделей и методов расчета во многих теоретических работах утверждается, что, несмотря на сильное перемешивание, класс универсальности каждого перехода остается прежним [18,19]. Однако учет взаимодействий (электрон-электронного или спин-орбитального), а также типа потенциала беспорядка может существенно изменить ситуацию [20,21,24–28,30,31]. Следует отметить, что отсутствует систематическое экспериментальное исследование этой проблемы. Есть лишь несколько экспериментов в случае смешивания (миксинга) уровней Ландау.

И наконец, во-вторых. Возможно, все наблюдаемые аномалии связаны с *фундаментальными причинами* в самой теории двухпараметрического скейлинга [1–3]. Ненулевое продольное магнитосопротивление в режиме квантового эффекта Холла в настоящее время понимается в терминах перколяции двумерного электронного газа по контурам неупорядоченного потенциала, так называемым эквипотенциалам. В сетевой модели электронных траекторий одномерные линии передачи соединены седловыми точками, где может происходить рассеяние или туннелирование между эквипотенциалами [4]. Если энергия электрона меньше энергии седловой точки $\varepsilon < E_c$, траектории отражаются седловой точкой, и электроны движутся вокруг потенциальной долины — по эквипотенциалам. Если энергия электрона ε больше или равна седловому потенциалу $\varepsilon \geq E_c$, электрон туннелирует через потенциальный барьер, и туннельные процессы должны быть приняты во внимание, так как электроны могут прыгать между различными эквипотенциалами. При этой энергии появляется возможность для электронов протечь (перколировать) через весь образец, что приводит к конечным значениям сопротивлений в пиках в переходных областях между различными квантовохолловскими плато.

В течение десятилетий теоретики пытаются усовершенствовать перколяционную модель [4], в рамках которой получены соотношения, связывающие критические индексы, чтобы объяснить наблюдаемые аномалии. В частности, проверить соотношение $\kappa = p/2\gamma$, где κ , p и γ — критические индексы температурных зависимостей ширины пиков сопротивления, длины

неупругого рассеяния (сбоя фазы) и длины локализации соответственно.

Слишком много приближений и ограничений было заложено в раннюю перколяционную модель. Электрон-электронное взаимодействие как в центрах плато ЦКЭХ, так и в центрах УЛ не учитывалось. Общепринятая картина целочисленного квантового эффекта Холла подразумевает, что существует только одно де локализованное состояние в центре уширенного за счет беспорядка уровня Ландау с энергией $E = E_c$ (одна критическая точка).

Практически сразу же возникли трудности при интерпретации экспериментальных результатов с помощью этой простой модели, когда, например, значение критического индекса длины локализации отличалось от универсального $\gamma \neq 7/3$ [23].

Авторы [57] отмечали, что, несмотря на обилие экспериментальных работ, ни в одной из них не было проверено, действительно ли обнаруженные скейлинговые соотношения наблюдаются в пределах квантовой критической области. На их взгляд, именно определение границ квантовой критической области в разных координатах, отражающих характерные масштабы длин, и управляющие параметры переходов в КЭХ даст, наконец, прояснение в вопросе об универсальных и не универсальных значениях критических индексов, получаемых в эксперименте. К настоящему моменту в научной литературе появились попытки построить такие фазовые диаграммы. В работе [44] авторы схематически представляют квантовую критическую область и область классического протекания в координатах магнитное поле B –обратная длина сбоя фазы $1/L_\phi$, которая зависит от температуры и частоты. Основная идея этой схемы, подтверждаемой и теорией протекания и экспериментальными данными, показать, что существует разрушение квантовой критической природы переходов плато–плато КЭХ при достаточно высоких температурах. Еще в одной известной нам работе [56] схематически построена зависимость ширины перехода от характерных масштабов длины в системе, которая помогает качественно объяснить экспериментально наблюдаемые закономерности. Эта идея кажется нам более красивой, так как унифицирует больше параметров, от которых зависит система. Таким образом, построение фазовых диаграмм переходов между состояниями разных квантовохолловских жидкостей с указанием квантовой критической области и соответствующих соотношений характерных длин в реальных системах представляется весьма интересной и важной задачей в качестве жирной точки в вопросе об универсальности критических индексов.

Основные проблемы появились, когда начались исследования спин-зависимых эффектов при перекрытии и смешивании (миксинге) спин-поляризованных УЛ. Сразу же возникли вопросы, что будет с универсаль-

ностью при сближении двух критических точек, так как первоначальная теория скейлинга построена на предположении одной критической точки. Эксперимент [25] демонстрировал удвоение значения критического индекса длины локализации $\gamma = 2 \cdot 7/3$.

При смешивании спин-поляризованных уровней Ландау возникающее взаимодействие (обменное, спин-орбитальное) электронов на разных уровнях Ландау усложняет эту задачу и ставит под сомнение устойчивость указанной выше универсальности скейлингового поведения. С одной стороны, основываясь на различных моделях (в частности, 2-канальная модель Чалкера–Коддингтона [4,18,19]) и расчетных подходах, во многих теоретических работах авторы пришли к выводу, что смешивание уровней Ландау не изменит универсальности квантовохолловского фазового перехода при одном условии — если уровни Ландау не взаимодействуют.

Нежизнеспособность этой идеализированной модели была очевидна, так как роль различных типов взаимодействия электронов (обменного, неупругого, спин-орбитального и т.п.) при смешивании спин-поляризованных уровней Ландау существенно возрастает. В частности, спин-орбитальное взаимодействие (СОВ) вызывает ярко выраженные эффекты в неупорядоченных системах.

Очевидно, что *аномальное поведение скейлинговых зависимостей* для двух перекрытых уровней Ландау могут быть объяснены только с учетом спин-орбитального взаимодействия. Возникает вопрос, как может слабое СОВ взаимодействие так сильно проявиться в проводимости?

3. Перколяционные модели КФП плато–плато в режиме КЭХ

С начала 90-х годов усилия теоретиков [18–22, 38,39,46–50,60,61,63–77] были направлены на создание усовершенствованной перколяционной (протекательной) модели КФП плато–плато в режиме КЭХ с учетом перечисленных выше проблем. За последние 30 лет имеется порядка 100 теоретических работ, в которых предпринимались усилия разработать перколяционную модель, которая расставила бы все точки над «i» в проблеме универсальности критических индексов КФП в режиме квантового эффекта Холла.

Мы даем краткий обзор этих работ, чтобы понять, в каком направлении следует сосредоточить дальнейшую работу при объяснении экспериментально наблюдаемых аномалий. Начнем с модели Чалкера–Коддингтона [4].

3.1. Модель Чалкера–Коддингтона

Модель Чалкера–Коддингтона — самая популярная решеточная модель ЦКЭХ [4]. Она позволяет достаточно просто и наглядно описать квантовый фазовый

переход между плато в КЭХ при нулевой температуре [2,4]. Поведение кондуктанса в такой ситуации в окрестности перехода между плато удалось исследовать в рамках модели Чалкера–Коддингтона как численно [2], так и с помощью метода ренормализационной группы в реальном пространстве [1,3]. Квантовая частица (электрон) пролетает по связям простой квадратной решетки, рассеиваясь на ее узлах так, что дальнейшее направление движения задается магнитным полем, в котором находится эта решетка.

Несмотря на кажущуюся простоту, эта модель все-таки достаточно сложна в силу сложности интерференции, которая сопровождает процесс распространения квантовой частицы в системе с большим числом центров рассеяния. Природа квантовой локализации в ней не изучена достаточно полно. Например, до сих пор неизвестно с необходимой точностью значение критического индекса длины локализации [65].

Рассмотренный же классический перколяционный аналог этой модели допускает простое описание критического поведения, причем обнаруживает некоторые общие черты со своим прообразом — в критические зависимости для сопротивления и проводимости и в их функции распределения в точке порога протекания входит только критический индекс длины локализации γ . Можно сделать вывод, что это свойство является следствием не квантовой природы перехода между плато в целочисленном эффекте Холла, а скорее общей геометрии рассматриваемых задач.

В [65] отмечается также, что в работе [4] использованы крайне простые и нетрудоемкие методы расчета критических индексов, не применялись какие-либо «изошренные» вычислительные процедуры вроде метода Монте-Карло, вообще говоря, пригодного для задач данного круга. Тем не менее критические индексы получены с удивительно высокой точностью, которую трудно достичь при исследовании обычной задачи протекания.

Можно указать на две причины столь высокой точности. Во-первых, пути, по которым может двигаться частица, имеют в рассматриваемой ситуации очень простую структуру — они не могут сходитьсь, разветвляться и пересекаться друг с другом. Это значительно упрощает ренорм-групповую процедуру. Во-вторых, удачно выбраны кластеры для преобразований ренормализационной группы.

3.2. Классические и квантовые протекательные модели

Что общего и в чем различие классической и квантовой протекательных моделей для частицы, движущейся в случайной неупорядоченной среде?

Локализованное состояние в квантовом случае описывается волновой функцией, распространяющейся на конечное расстояние, называемое длиной локализации.

В классическом случае траектории частиц представляют собой замкнутые орбиты, ограниченные по протяженности. Механизм, с помощью которого локализация может происходить в этих двух случаях, очень различен, так как квантовая интерференция и квантовое туннелирование, которые играют решающую роль в квантовой локализации, не имеют классического аналога.

Теоретические исследования локализации в режиме КЭХ за отправную точку обычно берут квазиклассическую картину. Согласно квазиклассической теории, электронное состояние в сильном магнитном поле и в плавном потенциале может быть разложено на быстрое циклотронное движение и медленно дрейфующее движение центров циклотронных орбит. Кинетическая энергия циклотронного движения квантована $E_c = (n + 1/2)\hbar\omega_c$, где ω_c — частота циклотронного движения, а n — индекс уровня Ландау. Траектория дрейфующего движения центра циклотронной орбиты проходит по эквипотенциальному контуру величины $V_0 = E - E_c$, где E — полная энергия электрона. Эквипотенциальный контур состоит из множества петель, и каждая петля соответствует одному квантовому состоянию. Квантово-механические свойства проявляются в седловых точках потенциала, где электрон может туннелировать с одной эквипотенциальной орбиты на другую.

В полуклассических приближениях [4] интерференционные эффекты (обратное рассеяние), как представляется, играют лишь незначительную роль, и только туннелирование отвечает за изменение классической экспоненты перколяции $\gamma_{2D} = 4/3$ в квантовую $\gamma = 1 + \gamma_{2D} = 7/3$. Настоящее понимание сетевых моделей состоит в том, что и квантовое туннелирование, и интерференционные эффекты важны для получения *правильного* (!) значения критического индекса.

Другими словами, вблизи E_c существует узкая «туннельная» полоса шириной $\Delta_t = \Gamma(l_B/d)^2$, где Γ — ширина уровня Ландау, l_B — магнитная длина, а d — длина корреляции случайного потенциала. В этой полосе необходимо учитывать квантовые туннельные эффекты. В этом случае длина локализации ξ_{loc} расходится как $|E - E_c|^{-\gamma}$, где $\gamma = 7/3$ [2].

Вне этой полосы ($|E - E_c| > \Delta_t$) квантовые эффекты не играют никакой роли, и *перколяция становится классической*. При этом электрон рассеивается между линиями передачи (эквипотенциалами), образующими перколяционный кластер с характерной длиной ξ_p . Размер перколяционного кластера расходится по универсальному закону $\xi_p \sim |E - E_c|^{-4/3}$ [2,3]. В *квантовом режиме интерференция* между электронными волнами отвечает за локализацию. Это вносит в задачу энергетический масштаб Δ_c , в пределах которого локализацию можно рассматривать с точки зрения длины сбега фазы. Скейлинговый анализ диффузионного переноса [4] показывает, что переход между локализо-

ванными и делокализованными состояниями определяется условием

$$L_{in} \sim \xi_{loc}(\Delta_c), \quad (1)$$

где L_{in} — длина сбега фазы из-за неупругого рассеяния. Вторую энергетическую шкалу Δ_c можно определить из уравнения (1). Из-за существования двух энергетических шкал поведение системы должно зависеть от отношения Δ_c/Δ_t [4]. Таким образом, только для $\Delta_c/\Delta_t \ll 1$ и $kT \ll \Delta_t$ справедливо отношение (1), и Δ_c проявляет универсальное скейлинговое поведение (это случай короткодействующего потенциала). В противном случае ширина пика проводимости растет линейно с ростом температуры, однако для короткодействующего потенциала, даже при выполнении условия универсального скейлинга (1), температурная зависимость переходной области не универсальна, а зависит от неупругого рассеяния:

$$|E - E_c| \sim T^k, \quad (2)$$

с $k = p/\gamma$, где p — критический индекс механизма неупругого рассеяния.

3.3. Учет типа потенциала: короткодействующий беспорядок

Характерный пространственный масштаб, с которым следует сравнивать масштаб изменения случайного потенциала, определяется магнитной длиной l_B , а характерная энергия — это циклотронная энергия. Поэтому возможны два предельных вида случайного потенциала: короткодействующий, если изменение потенциальной энергии электрона на магнитной длине сравнимо с циклотронной энергией или превышает ее, и плавный в противном случае. В первых экспериментах исследуемые структуры имели короткодействующий случайный потенциал, созданный близко расположенными к двумерным электронам примесями и шероховатостями поверхности. Позднее были созданы структуры с плавным (дальнодействующим) потенциалом. Результаты, полученные до 1995 года, рассматриваются в ссылках [2,3]. Применялись различные подходы: рекурсивный метод функций Грина, эволюция с размером образца числа состояний с ненулевыми числами Черна и анализ размерным скейлингом числа Таулесса [2].

Неуниверсальность критического индекса k была интерпретирована как взаимодействие между различными механизмами рассеяния [66] или как следствие влияния подвижности на электрон-фононное рассеяние [67]. Неуниверсальное поведение k было объяснено как переход от короткодействующего потенциала к дальнодействующему случайному потенциалу. В этом случае $d \gg l_B$, так что для реалистичных температур $kT \gg \Delta_t$ ширина пика проводимости будет расти ли-

нейно с T , что даст $\kappa \approx 1$ в отношении (2) [24]. Однако точные доказательства трудно привести, отчасти потому, что температурная зависимость измеряет общий показатель κ и не различает критические индексы взаимодействия и перколяции.

Преыдушие численные исследования [2] показывают, что длина локализации увеличивается с приближением к центру полосы УЛ с критическим индексом длины локализации $\gamma = 7/3$. В этих исследованиях случайный потенциал предполагался короткодействующим и коррелированным. Вопрос о том, как степень корреляции потенциала может влиять на величину $\gamma = 7/3$, рассмотрен в [79].

3.5. Учет типа потенциала: дальнедействующий беспорядок

Все численное моделирование [4,19,48] проводилось в рамках представлений сетевой модели Чалкера–Коддингтона [4]. Рассматриваемые вопросы были по существу такими же, как и в случае короткодействующего беспорядка. Помимо расчета γ [4,61], сетевая модель использовалась для исследования

- а) спин-вырожденного случая [19,48];
- б) влияния смешивания уровней Ландау на положение делокализованных состояний [60];
- в) для демонстрации того, что это смешивание не изменяет класс универсальности КФП [18];
- г) для анализа продольной и поперечной проводимости в области перехода [19];
- д) чтобы проследить размытие единичного делокализованного состояния в металлическую полосу в сверхрешетке [78].

3.6. Учет электрон-электронного взаимодействия

Теоретические представления [1–4] относятся к системе невзаимодействующих электронов, тогда как в реальных системах необходимо учитывать электрон-электронное ($e-e$) взаимодействие. Попытки учесть влияние $e-e$ взаимодействия на критические свойства переходов плато–плато в режиме целочисленного КЭХ предпринимались и ранее (см., например, [18,19]), однако последовательный подход развит в работе [46] и изложен в работе [38]. Обобщенный подход, предложенный в этих работах, согласовывает механизм делокализации в условиях сильного квантующего магнитного поля с теорией Финкельштейна для эффектов локализации и $e-e$ взаимодействия [50]. При этом обосновывается применимость скейлинговой концепции при рассмотрении ширины переходов плато–плато КЭХ для взаимодействующих электронов (трехпараметрический скейлинг). В частности, для случая короткодействующего потенциала $e-e$ взаимодействия фиксированная точка, соответствующая делокализованному состоянию при $\sigma_{xy} = i + 1/2$, остается стабильной относительно взаимодействия [18,19,38,39].

Теории двухпараметрического скейлинга (для невзаимодействующих электронов) или трехпараметрического скейлинга (с учетом $e-e$ взаимодействия), решая принципиальные вопросы, не дают конкретных значений критических индексов. Результаты численных расчетов критического индекса длины локализации для модели невзаимодействующих электронов, полученные Хакестейном и Крамером [74] и подтвержденные во многих последующих работах (см. обзор Хакестейна, а также ссылку [6] в работе [38]), таковы: $\gamma = 2,35 \pm 0,03$. Эти результаты в последнее время подвергнуты ревизии, что привело к большему значению $\gamma = 2,62 \pm 0,06$ (см. [75], а также [39] и ссылки там).

Количественные оценки предполагаемого значения параметра κ в моделях с учетом короткодействующего $e-e$ взаимодействия немногочисленны и разноречивы. Приведем оценки, сделанные разными авторами:

- 1) $\kappa = 0,21$ ($\gamma = 2,3$, $z = 2$ — динамический критический индекс, $\kappa = 1/z\gamma$) [18,19], $\kappa = 0,21$ ($\gamma = 2,3$, $p = 1$) [49],
- 2) Пруискен, Бурмистров [38]: $\kappa = 0,29 \pm 0,04$ ($\gamma = 2,30-2,38$, $p = 1,22-1,48$); если взять $\gamma = 2,62 \pm 0,06$, получим $\kappa = 0,26 \pm 0,05$,
- 3) Бурмистров и др. [39]: $p \approx 1,62$; $\kappa \approx 0,346$ (при $\gamma = 2,35$) и $\kappa \approx 0,314$ (при $\gamma = 2,59$).
- 4) Данфорд и др. [76] показали, что для структур $\text{Si/Si}_{0,87}\text{Ge}_{0,13}$ в квантовой критической области скейлинговые соотношения действительно выполняются с показателем степени $\kappa = 0,70 \pm 0,05$ на переходе между холловскими жидкостями с $i = 1$, $i = 2$ и с показателем степени $\kappa = 0,68 \pm 0,05$ в случае перехода с $i = 0$, $i = 1$.

Отметим, что в [49,39] предлагается способ экспериментальной реализации 2D-системы с конечным радиусом действия $e-e$ потенциала — введение в образец параллельного металлического слоя [49] (внешнего металлического затвора [39]), что привело бы к эффективному экранированию дальнедействующего кулоновского потенциала. В случае кулоновского потенциала $e-e$ взаимодействия для теоретических значений критических индексов в области переходов плато–плато КЭХ (κ , γ , p) в настоящее время не существует ни аналитических предсказаний, ни развитых приближенных численных методов [39]. Более того, в [38,77] на фундаментальном уровне доказывается, что дальнедействующий кулоновский потенциал (в отличие от потенциала с конечным радиусом действия) переводит проблему переходов плато–плато КЭХ в другой (нефермижидкостный) класс универсальности.

В экспериментах по наблюдению ЦКЭХ в Si-MOSFET [9] и двумерных системах GaAs/AlGaAs, различающихся по типу и концентрации легирующей примеси [10,11], наблюдалась зависимость величины критического индекса κ от номера уровня Ландау, подвижности носителей и параметров (технологии) легирования.

Разброс значений скейлингового показателя степени k объясняют различием механизмов неупругого рассеяния в различных системах, определяющих значение показателя p в температурной зависимости длины сбоя фазы [76], или принадлежностью переходов к разным классам универсальности [27].

3.7. Перколяционная модель КФП плато–плато в режиме КЭХ при миксинге уровней Ландау [17–19]

Здесь разработаны:

а) двухканальная версия сетевой модели Чалкера–Коддингтона без учета e – e взаимодействия смешанных уровней Ландау;

б) двухканальная версия сетевой модели Чалкера–Коддингтона с учетом кулоновского и обменного e – e взаимодействия в случае смешанных уровней Ландау;

в) учет неупругого e – e взаимодействия (a non-Fermi-liquid-like behavior).

Теория скейлинга построена на предположении, что в одноэлектронном приближении имеется только одно делокализованное состояние на каждом из квантовых уровней. Хотя в [1–4,19] утверждается, что перемешивание уровней Ландау не изменяет класс универсальности, однако взаимодействие электронов с разными направлениями спинов приводит к появлению полосы делокализованных состояний даже при абсолютном нуле температуры [24], что называется одной из причин наблюдения неуниверсального скейлингового поведения.

3.8. Перколяционная модель КФП плато–плато при учете спин-орбитального взаимодействия

Спин-орбитальное взаимодействие вызывает ярко выраженные эффекты в неупорядоченных системах. Несмотря на эти замечательные эффекты, существует лишь несколько экспериментальных исследований СОВ в режиме целочисленного квантового эффекта Холла. Одна из возможных причин заключается в том, что при наличии сильного магнитного поля СОВ не должен изменять симметрию гамильтониана и, следовательно, не может влиять на класс универсальности. Контрпример, однако, существует в сильно локализованном режиме, где СОВ увеличивает длину локализации даже при наличии сильного магнитного поля. Спиновое перемешивание, индуцированное случайным магнитным полем, изучалось в [30,68] (как специфическая модель для СОВ) и [69]. Основной вывод состоит в том, что случайный эффект Зеемана вызывает расщепление спин-вырожденного перехода КЭХ, но не изменяет его класс универсальности. Критический индекс для такого рода беспорядка тогда остается около $2,35 \pm 0,02$, принятое числовое значение для перехода КЭХ [70].

3.9. Перколяционная сетка краевых состояний

В работе [59] исследована перколяционная сетка краевых состояний в искусственном потенциале решетки антиотчек в образцах с затвором в сильном магнитном поле. Продольное сопротивление решетки антиотчек демонстрирует П-образное (box-like) поведение в определенных диапазонах магнитного поля вследствие отражения верхнего (первого) краевого состояния потенциалом седловой точки между двумя антиотчками. Пик между нулевым и квантованным сопротивлением имеет температурную зависимость, обусловленную уширением перколяционного перехода неупругим рассеянием. Обнаружено, что смещение точки перехода в магнитном поле с температурой происходит из-за миксинга между уровнями Ландау вследствие неупругого рассеяния. Это позволяет разделить критический индекс механизма рассеяния p и критический индекс длины локализации γ в переходе локализация–делокализация.

4. Заключение

При исследовании квантового эффекта Холла в полупроводниковых гетероструктурах n - $\text{In}_{0,9}\text{Ga}_{0,1}\text{As}/\text{In}_{0,81}\text{Al}_{0,19}\text{As}$ обнаружен ряд аномалий в поведении продольного ρ_{xx} и холловского ρ_{xy} магнитосопротивлений в области квантовых фазовых переходов плато–плато, в частности, сильная зависимость найденных скейлинговых индексов k и γ от типа перехода [52].

Наблюдаемые аномалии не удается объяснить в рамках стандартной теории двухпараметрического скейлинга [1–3], предсказывающей универсальность всех критических индексов. Теория скейлингового поведения кинетических коэффициентов в режиме квантового эффекта Холла [1–3] в свое время была построена в одноэлектронном приближении для случая короткодействующего потенциала беспорядка и при наличии одной критической точки.

Однако при экспериментальном исследовании реальных полупроводниковых 2D-структур эти приближения, как правило, не выполняются. В частности, в реальных ситуациях нужно учитывать дальнедействующий характер потенциала беспорядка, вырождение уровней Ландау, когда две критические точки приближаются друг к другу, а также электрон-электронное, обменное и спин-орбитальное взаимодействия.

В данной работе дан краткий обзор современных перколяционных моделей квантового фазового перехода плато–плато в режиме квантового эффекта Холла, чтобы понять, в каком направлении следует сосредоточить дальнейшую работу для объяснения экспериментально наблюдаемых аномалий, а именно для описания влияния перекрытия и смешивания плотностей локализованных и делокализованных состояний на уровнях Ландау на универсальность критических ин-

дексов в 2D-системах $n\text{-In}_{0,9}\text{Ga}_{0,1}\text{As/In}_{0,81}\text{Al}_{0,19}\text{As}$ с сильным спин-орбитальным взаимодействием.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме «Электрон» (Г.р. № АААА-А18-118020190098-5), при поддержке РФФИ: проекты №18-02-00172 и №18-02-00192; при частичной поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 18-10-2-6.

1. A.M.M. Pruisken, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1297 (1988).
2. B. Huckestein, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 357 (1995); B. Huckestein, *Europhys. Lett.* **20**, 451 (1992); S.-R. Eric Yang, A.H. MacDonald, and B. Huckestein, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3229 (1995).
3. A.M.M. Pruisken, *Int. J. Mod. Phys. B* **24**, 1895 (2010).
4. J.T. Chalker and P.D. Coddington, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **21**, 2665 (1988); Г.В. Мильников, И.М. Соколов, *Письма в ЖЭТФ* **48**, 494 (1988); М.В. Isichenko. *Rev. Mod. Phys.* **64**, 961 (1992).
5. H.P. Wei, D.C. Tsui, M.A. Paalanen, and A.M.M. Pruisken, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1294 (1988).
6. W. Li, J.S. Xia, C. Vicente, N.S. Sullivan, W. Pan, D.C. Tsui, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. B* **81**, 033305 (2010).
7. W. Li, C.L. Vicente, J.S. Xia, W. Pan, D.C. Tsui, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 216801 (2009).
8. N.Q. Balaban, U. Meirav, and I. Bar-Joseph, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4967 (1998).
9. J. Wakabayashi, M. Yamane, and S. Kawaji, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58**, 1903 (1989).
10. S. Koch, R.J. Haug, K. von Klitzing, and K. Ploog, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 883 (1991).
11. S. Koch, R.J. Haug, K. von Klitzing, and K. Ploog, *Phys. Rev. B* **43**, 6828 (1991).
12. D. Shahar, M. Hilke, C.C. Li, D. C. Tsui, S.L. Sondhi, J.E. Cunningham, and M. Razeghi, *Solid State Commun.* **107**, 19 (1998).
13. D. Shahar, D.C. Tsui, M. Shayegan, E. Shimshoni, and S.L. Sondhi, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 479 (1996).
14. P.T. Coleridge, *Solid State Commun.* **112**, 241 (1999).
15. R.T.F. van Schaijk, A. deVisser, S. Olsthoorn, H.P. Wei, and A.M.M. Pruisken, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1567 (2000).
16. Yu.G. Arapov, G.A. Alshanskii, G.I. Harus, V.N. Neverov, N.G. Shelushinina, M.V. Yakunin, and O.A. Kuznetsov, *Nanotechnology* **13**, 86 (2002).
17. L. Wang, T. Tu, C. Zhou, Y.-J. Zhao, G.-C. Guo, and G.-P. Guo, *Mod. Phys. Lett.* **27**, 1350202 (2013).
18. Z. Wang, D.-H. Lee, and X.-G. Wen, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2454 (1994).
19. D.K. Lee and J.T. Chalker, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1510 (1994); D.K.K. Lee, J.T. Chalker, and D.Y.K. Ko, *Phys. Rev. B* **50**, 5272 (1994).
20. G. Xiong, S.-D. Wang, Q. Niu, Y. Wang, X.C. Xie, D.-C. Tian, and X.R. Wang, *J. Phys.: Condens. Matter* **18**, 2029 (2006).
21. G. Xiong, S.-D. Wang, Q. Niu, Y. Wang, and X.R. Wang, *Eur. Phys. Lett.* **82**, 47008 (2008).
22. F.W. Van Keuls, H.W. Jiang, and A.J. Dahm, *Czech. J. Phys.* **46** (S5), 2467 (1996).
23. R. Meisels, F. Kuchar, W. Belitsch, and B. Kramer, *Microelectron. Eng.* **47**, 23 (1999).
24. D.G. Polyakov and M.E. Raikh, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1368 (1995); D.G. Polyakov, *Phys. Rev. B* **53**, 15777 (1996); D.G. Polyakov, *Cond-mat/9608013*.
25. S.W. Hwang, H.P. Wei, L.V. Engel, D.C. Tsui, and A.M.M. Pruisken, *Phys. Rev. B* **48**, 11416 (1993).
26. L.W. Engel, D. Shahar, C. Kurdak, and D.C. Tsui, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2638 (1993).
27. H.P. Wei, L.W. Engel, and D.C. Tsui, *Phys. Rev. B* **50**, 14609 (1994).
28. Y.J. Zhao, T. Tu, X.J. Hao, G.C. Guo, H.W. Jiang, and G.P. Guo, *Phys. Rev. B* **78**, 233301 (2008).
29. S.V. Gudina, Yu.G. Arapov, A.P. Savelyev, V.N. Neverov, S.M. Podgornykh, N.G. Shelushinina, M.V. Yakunin, K. Rogacki, I.S. Vasil'evskii, and A.N. Vinichenko, *J. Magn. Magn. Mater.* **440**, 10 (2017).
30. C.B. Hanna, D.P. Arovas, K. Mullen, and S.M. Girvin, *Phys. Rev. B* **52**, 5221 (1995).
31. Y. Avishai and Y. Meir, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 076602 (2002).
32. Yu.G. Arapov, S.V. Gudina, A.S. Klepikova, V.N. Neverov, S.G. Novokshonov, G.I. Kharus, N.G. Shelushinina, and M.V. Yakunin, *J. Exp. Theor. Phys.* **117**, 144 (2013).
33. A.J.M. Giesbers, U. Zeitler, L.A. Ponomarenko, R. Yang, K.S. Novoselov, A.K. Geim, and J.C. Maan, *Phys. Rev. B* **80**, 241411(R) (2009).
34. T. Khouri, M. Bendias, P. Leubner, C. Brune, H. Buhmann, L.W. Molenkamp, U. Zeitler, N.E. Hussey, and S. Wiedmann, *Phys. Rev. B* **93**, 125308 (2016).
35. H.P. Wei, S.Y. Lin, D.C. Tsui, and A.M.M. Pruisken, *Phys. Rev. B* **45**, 3926(R) (1992).
36. W. Li, G.A. Csathy, D.C. Tsui, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 206807 (2005).
37. B. Karmakar, M.R. Gokhale, A.P. Shah, B.M. Arora, D.T. N. de Lang, A. de Visser, L.A. Ponomarenko, and A.M.M. Pruisken, *Phys. E* **24**, 187 (2004).
38. A.M.M. Pruisken and I.S. Burmistrov, *JETP Lett.* **87**, 220 (2008).
39. I.S. Burmistrov, S. Bera, F. Evers, I.V. Gornyi, and A.D. Mirlin, *Ann. Phys.* **326**, 1457 (2011).
40. Yu.G. Arapov, S.V. Gudina, V.N. Neverov, S.M. Podgornykh, M.R. Popov, G.I. Harus, N.G. Shelushinina, M.V. Yakunin, N.N. Mikhailov, and S.A. Dvoretzkiy, *Semiconduc.* **49**, 1545 (2015).
41. S. Koch, R.J. Haug, K. von Klitzing, and K. Ploog, *Semicond. Sci. Technol.* **10**, 209 (1995).
42. K.-H. Yoo, H.C. Kwon, and J.C. Park, *Solid State Commun.* **92**, 821 (1994).
43. F. Hohls, U. Zeitler, and R. J. Haug, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 036802 (2002).
44. N.A. Dodoo-Amoo, K. Saeed, D. Mistry, S.P. Khanna, L. Li, E.N. Linfield, A.G. Davies, and J.E. Cunningham, *J. Phys.: Condens. Matter* **26**, 475801 (2014); *Phys. Rev. B* **84**, 155324 (2011); *J. Phys. Conf. Ser.* **456**, 012007 (2013).

45. W. Li, G.H. Csathy, D.C. Tsui, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 2832 (2003).
46. A.M.M. Pruisken, C.B. Scoric, and M.A. Baranov, *Phys. Rev. B* **60**, 16838 (1999).
47. C.-H. Liu, P.-H. Wang, T.-P. Woo, F.-Y. Shih, S.-C. Liou, P.-H. Ho, C.-W. Chen, C.-T. Liang, and W.-H. Wang, *Phys. Rev. B* **93**, 041421(R) (2016).
48. D.-H. Lee and Z. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4014 (1996).
49. A.M.M. Pruisken and M.A. Baranov, *Europhys. Lett.* **31**, 543 (1995).
50. A.M. Finkelstein, *Int. J. Mod. Phys. B* **24**, 1855 (2010).
51. Ю.Г. Арапов, С.В. Гудина, А.С. Клепикова, В.Н. Неверов, Г.И. Харус, Н.Г. Шелушина, М.В. Якунин, *ФНТ* **41**, 139 (2015) [*Low Temp. Phys.* **41**, 106 (2015)].
52. С.В. Гудина, Ю.Г. Арапов, Е.В. Ильченко, В.Н. Неверов, А.П. Савельев, С.М. Подгорных, Н.Г. Шелушина, М.В. Якунин, И.С. Васильевский, А.Н. Виниченко, *Физика и техника полупроводников* **52**, 1447 (2018).
53. S.V. Gudina, E.V. Il'chenko, V.N. Neverov, S.M. Podgornykh, N.G. Shelushinina, M.V. Yakunin, N.N. Mikhailov, and S.A. Dvoret'skii, in: *Proceedings of the 13 Russian Conference on Physics of Semiconductor*, Ekaterinburg (2017), p. 174.
54. A.L. Efros, *Phys. Rev. B* **45**, 11354 (1992); A.L. Efros, *Solid State Commun.* **67**, 1019 (1988); D.B. Chklovskii, B.I. Shklovskii, and L.I. Glazman, *Phys. Rev. B* **46**, 4026 (1992).
55. N.R. Cooper and J.T. Chalker, *Phys. Rev. B* **48**, 4530 (1994).
56. T. Nakajima, T. Ueda, and S. Komiyama, *J. Phys. Soc. Jpn.* **76**, 094703 (2007).
57. В.Ф. Гантмахер, В.Т. Долгополов, *УФН* **178**, 3 (2008); Е.Л. Шангина, В.Т. Долгополов, *УФН* **173**, 801 (2003).
58. D.G. Polyakov, B.I. Shklovskii, *Phys. Rev. B* **48**, 11167 (1993); D.G. Polyakov and B.I. Shklovskii, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3796 (1993).
59. G.M. Gusev, U. Gennser, X. Kleber, D.K. Maude, J.C. Portal, D.I. Lubyshev, P. Basmaji, M. de P.A. Silva, J.C. Rossi, and Yu.V. Nastaushev, *Phys. Rev. B* **58**, 4636 (1998).
60. T.V. Shahbazyan and M.E. Raikh, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 304 (1995); V. Kagalovsky, B. Horovitz, and Y. Avishai, *Phys. Rev. B* **52**, R17044 (1995).
61. D.-H. Lee, Z.Q. Wang, and S. Kivelson, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 4130 (1993).
62. V.N. Zverev, M. Muhammad, S. Rahman, and P. Debray, *J. Appl. Phys.* **96**, 6353 (2004); A. Usher, R.J. Nicholas, J.J. Harris, and C.T. Foxon, *Phys. Rev. B* **41**, 1129 (1990); D.R. Leadley, R.J. Nicholas, J.J. Harris, and C.T. Foxon, *Phys. Rev. B* **58**, 13036 (1998); D.K. Maude, M. Potemski, J.C. Portal, M. Henini, L. Eaves, G. Hill, and M.A. Pate, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4604 (1996).
63. F. Evers and A.D. Mirlin, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1355 (2008).
64. R.C. Ashoori and R.H. Silsbee, *Solid State Commun.* **81**, 821 (1992).
65. С.Н. Дороговцев, *ФТТ* **40**, 41 (1998).
66. H.L. Zhao and S. Feng, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 4134 (1993).
67. T. Brandes, L. Schweitzer, and B. Kramer, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3582 (1994); T. Brandes, *Phys. Rev. B* **52**, 8391 (1995).
68. D.K.K. Lee, *Phys. Rev. B* **50**, 7743 (1994).
69. V. Kagalovsky, B. Horovitz, and Y. Avishai, *Phys. Rev. B* **55**, 7761 (1997).
70. T. Ando and H. Aoki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **54**, 2238 (1985).
71. Д.Е. Хмельницкий, *Письма в ЖЭТФ* **38**, 454 (1983) [*JETP Lett.* **38**, 552 (1983)].
72. А.А. Грешнов, Г.Г. Зеря, Э.Н. Колесникова, *ЖЭТФ* **134**, 577 (2008).
73. J.P. Eisenstein, H.L. Stormer, V. Narayanamurti, A.Y. Cho, A.C. Gossard, and C.W. Tu, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 875 (1985).
74. B. Huckestein, and B. Kramer, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1437 (1990).
75. K. Slevin and T. Ohtsuki, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 382 (1999).
76. R.B. Dunford, N. Griffin, M. Pepper, P.J. Phillips, and T.E. Whall, *Physica E* **6**, 297 (2000); *Physica B* **298**, 496 (2001).
77. A.M.M. Pruisken and I.S. Burmistrov, *Ann. Phys.* (N.Y.) **322**, 1265 (2007).
78. J.T. Chalker and A. Dohmen, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4496 (1995).
79. N. Sandler, H.R. Maei, and J. Kondev, *Phys. Rev. B* **68**, 205315 (2003).

До питання про універсальність критичних індексів в режимі квантового ефекту Холла

Ю.Г. Арапов, С.В. Гудина, Е.В. Дерюшкіна,
Н.Г. Шелушініна, М.В. Якунін

Проведено критичний аналіз робіт в рамках концепції дво-параметричного скейлінга, а також дано короткий огляд сучасних перколяційних моделей для квантового фазового переходу плато–плато в режимі квантового ефекту Холла. Мотивацією роботи було обговорення теоретичних моделей для опису впливу перекриття та змішування щільностей локалізованих й делокалізованих станів на рівнях Ландау на універсальність критичних індексів.

Ключові слова: гіпотеза скейлінга, перколяційні моделі, квантовий ефект Холла.

On the issue of critical exponents universality in the quantum Hall effect regime

Yu.G. Arapov, S.V. Gudina, E.V. Deryushkina,
N.G. Shelushinina, and M.V. Yakunin

The paper provides a critical analysis of works in the framework of the concept of two-parameter scaling, as well as a brief review of modern percolation models for the plateau-plateau quantum phase transition in the quantum Hall effect regime. The motivation for our work was to discuss the theoretical models for understanding the effect of overlapping and mixing of the densities of localized and delocalized states at Landau levels on the universality of critical indices.

Keywords: scaling, percolation models, quantum Hall effect.