

# Характеристики криорефрижератора Гиффорда–Мак-Магона до 4 К с регенератором второй ступени на ценосферах

Г.К. Лавренченко

*Институт низкотемпературных энерготехнологий, а/я 188, г. Одесса-26, 65026, Украина*  
E-mail: lavrenchenko.g.k@gmail.com

М.Б. Кравченко

*Одесская национальная академия пищевых технологий*  
*Институт холода, криотехнологий и экоэнергетики им. В.С. Мартыновского*  
*ул. Дворянская, 1/3, г. Одесса, 65082, Украина*  
E-mail: kravtchenko@i.ua

Статья поступила в редакцию 4 октября 2018 г., опубликована онлайн 25 февраля 2019 г.

Разработка эффективно работающих криорефрижераторов Гиффорда–Мак-Магона (GM), позволяющих обеспечивать охлаждение до температур ниже 4,2 К, рассматривается как важный этап в развитии техники получения гелиевых температур. В современных двухступенчатых машинах GM обеспечивается производство холода до 4,2 К, но с относительно небольшой производительностью. Основная причина — низкая теплоемкость материала, который применяется для насадок регенераторов вторых ступеней машин GM. Для создания криорефрижераторов GM на уровне 4 К решены две актуальные задачи: описание нестационарных процессов теплообмена в регенераторах машин GM; определение показателей эффективного регенератора для второй ступени машины GM на основе ценосфер, заполняемых гелием. Приводится сравнительный анализ различных видов насадок регенераторов, позволяющих получать температуры ниже 4,2 К. Обоснованы преимущества насадок из ценосфер, заполненных гелием. С использованием волнового подхода к моделированию регенератора проведен анализ работы двухступенчатого криорефрижератора GM, имеющего холодопроизводительность 0,2 Вт на температурном уровне 4,2 К. Показана возможность улучшения показателей машины GM при использовании во второй ее ступени регенератора, заполненного ценосферами.

Ключевые слова: криорефрижератор Гиффорда–Мак-Магона, регенератор второй ступени, насадка, ценосферы.

## 1. Введение

В последние десятилетия значительно усовершенствованы криорефрижераторы Гиффорда–Мак-Магона (GM), получившие широкое распространение. Основные области их применения: криовакуумная техника, установки для реконденсации гелия, ожижители азота малой производительности и др.

Минимальная температура, которая может быть достигнута в криорефрижераторах GM, теоретически ничем не ограничена, но на практике она определяется эффективностью работы регенератора при низких температурах.

В криорефрижераторах GM, которые выпускались до начала 90-х годов прошлого века, в качестве насадки низкотемпературной ступени регенератора обычно использовали свинцовые шарики. Это объясняется тем, что при температуре ниже 20 К теплоемкость большинства материалов быстро уменьшается. В связи с этим насадка из свинца обеспечивает достаточно эффективную работу регенератора в диапазоне температур 10–20 К.

При температуре 10 К объемная теплоемкость меди, из которой обычно изготавливают насадку высокотемпературной ступени криорефрижератора GM, равна

всего лишь  $7,68 \text{ мДж}/(\text{см}^3 \cdot \text{К})$ . При этом объемная теплоемкость газообразного гелия, движущегося в таком регенераторе, например при давлении 6 бар, составляет  $239 \text{ мДж}/(\text{см}^3 \cdot \text{К})$ , т.е. намного больше теплоемкости меди. Объемная теплоемкость свинца при температуре 10 К равна  $155 \text{ мДж}/(\text{см}^3 \cdot \text{К})$ , что уже сопоставимо с объемной теплоемкостью гелия и существенно превосходит объемную теплоемкость меди.

При понижении температуры до 4 К объемная теплоемкость свинца падает до  $7,94 \text{ мДж}/(\text{см}^3 \cdot \text{К})$ . Объемная теплоемкость гелия при этой температуре, наоборот, увеличивается и при давлении 6 бар составляет  $465 \text{ мДж}/(\text{см}^3 \cdot \text{К})$ . Поэтому в криорефрижераторах GM с регенераторами, в которых используется насадка из свинцовых шариков, не удастся получить температуры ниже 7–10 К.

К началу 90-х годов прошлого века появился ряд публикаций [1–7], в которых рассматривалась возможность использования интерметаллических соединений редкоземельных элементов в качестве материала насадки для низкотемпературных регенераторов. Исследования показали, что эти материалы обладают аномально высокой теплоемкостью в диапазоне температур от 4 до 10 К.

Высокая теплоемкость этих материалов связана с их магнитными свойствами. В точке Кюри в ферромагнитных материалах происходит фазовый переход второго рода, который сопровождается скачком теплоемкости. Это связано с тем, что часть подводимой тепловой энергии затрачивается на разупорядочение внутренней магнитной структуры материала. Такой скачок теплоемкости характерен для любых фазовых переходов второго рода, например, при переходе обычного гелия в сверхтекучее состояние, в котором наблюдается скачок теплопроводности в лямбда-точке.

Обычно температура точки Кюри для ферромагнитных материалов достаточно высока, так, например, у железа эта температура составляет  $768 \text{ }^\circ\text{C}$ , для никеля —  $365 \text{ }^\circ\text{C}$ . Особенностью редкоземельных элементов и их соединений, которые находят применение в качестве материала насадки регенераторов, является низкая температура их точки Кюри. Причем, эта температура у интерметаллических соединений может быть ниже температуры точек Кюри для чистых компонентов этих соединений. Очень важно и то, что температура точек Кюри у интерметаллических соединений может регулироваться в достаточно широких пределах путем изменения состава этих соединений.

На рис. 1 приведены графики температурной зависимости объемной теплоемкости различных материалов, применяемых в качестве насадки регенераторов при температурах до 10 К [8]. Использование таких материалов в криорефрижераторах GM позволяет достигать температур 1,5 К или отводить до 2 Вт тепла при температуре конденсации гелия равной 4,2 К.

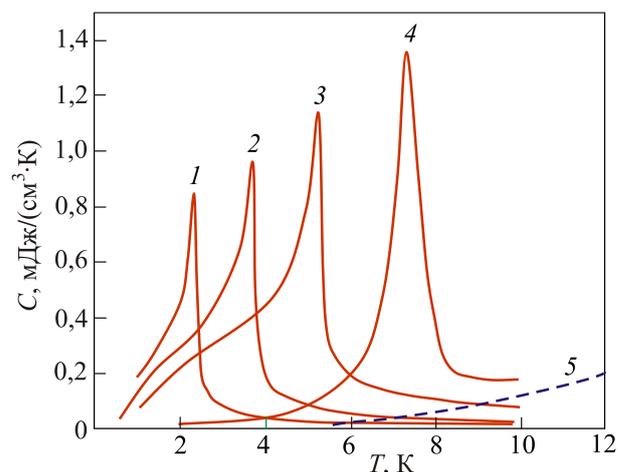


Рис. 1. Изменение объемной теплоемкости  $C$  различных материалов в области низких температур:  $\text{GdVO}_4$  (1),  $\text{GdAlO}_3$  (2),  $\text{GdO}_2\text{S}$  (3),  $\text{Tb}_2\text{O}_2\text{S}$  (4); Pb (5).

Создание криорефрижераторов GM, позволяющих получать температуры ниже 4,2 К, открывает новые возможности в приборостроении, вакуумной технике и научных исследованиях. Например, такие установки уже применяются для реконденсации испаряющегося гелия в сосудах для хранения жидкого гелия [9].

Криорефрижераторы для производства холода при температурах ниже 4,2 К также востребованы в медицинских установках для магнитно-резонансной томографии (МРТ). Работа установок МРТ требует использования сильных магнитных полей, которые создаются электромагнитами со сверхпроводящими обмотками, охлаждаемыми жидким гелием. Без реконденсации паров гелия установки МРТ приходится дозаправлять жидким гелием каждые два–три месяца.

Криорефрижераторы, обеспечивающие получение температур ниже 4,2 К, позволяют отказаться от использования жидкого гелия там, где не требуется высокая холодопроизводительность, например, при охлаждении приемников излучений, небольших сверхпроводящих приборов, в криовакуумной технике и т.п. Это направление в криогенной технике фактически является очередным качественным скачком в технике получения гелиевых температур. Предыдущий прорыв в этой области произошел в 50-е годы прошлого века, когда S.C. Collins разработал промышленные гелиевые рефрижераторы и оживители.

Основным препятствием на пути к более широкому применению криорефрижераторов GM, способных обеспечивать гелиевые температуры, является чрезвычайно высокая стоимость материалов, применяемых в качестве насадки регенераторов.

Альтернативный путь повышения эффективности регенераторов в криорефрижераторах GM основан на использовании самого гелия в качестве материала насадки регенератора.

На рис. 2 приведены зависимости объемной теплоемкости некоторых материалов, которые применяются в качестве насадки низкотемпературных ступеней регенераторов гелия под давлением 17,2 бар [10]. Из приведенных графиков видно, что по своим теплофизическим свойствам гелий не только не уступает, а, наоборот, превосходит большинство магнитных материалов, используемых в настоящее время для изготовления регенераторов.

Идея использования гелия в качестве теплоаккумулирующего материала не нова. Еще в 1972 г. в США был выдан патент № 3.692.099 на конструкцию «ультранизкотемпературного регенеративного теплообменника», в котором в качестве теплоаккумулирующей насадки использовался гелий под давлением. Недостатком предложенной конструкции регенеративного теплообменника является то, что тепло в этом теплообменнике передается по плоскому ребру, один конец которого находится в неподвижном гелии, а другой омывается гелием, движущимся внутри теплообменника. Это приводит к дополнительным потерям теплового напора и снижению эффективности работы теплообменника. Кроме того, запатентованная конструкция теплообменника отличается сложностью изготовления и большими размерами.

В настоящей работе рассматривается другой вариант использования гелия в качестве теплоаккумулирующего материала регенераторов. Гелий помещается внутрь керамических микрокапсул, которые снаружи омываются потоком гелия, участвующего в термодинамическом цикле криорефрижератора.

В качестве готовых микрокапсул для хранения гелия предлагается использовать узкую фракцию ценосфер диаметром 0,1–0,2 мм.

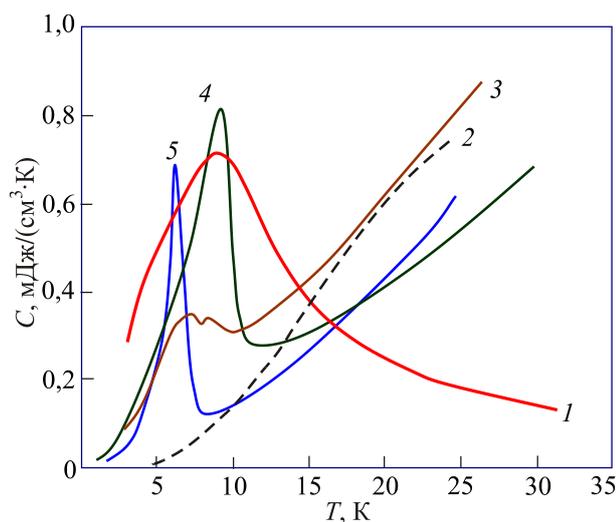


Рис. 2. (Онлайн в цвете) Зависимость объемной теплоемкости материалов, используемых в качестве насадки регенераторов, от температуры: гелий (при  $p = 17,2$  бар) (1), Pb (2) (свинец),  $Er_3Ni$  (3),  $Er_{0,9}Yb_{0,1}Ni$ , (4)  $Nd_3Ni$  (5).

Ценосферы — это полые алюмосиликатные микросферы, которые образуются при сжигании угольной пыли на тепловых электрических станциях (ТЭЦ) и составляют примерно 1–2% от объема золы, остающейся после сжигания угля. Размеры ценосфер (рис. 3) варьируются в широком диапазоне — от нескольких десятков до сотен микрон. Благодаря полостям внутри ценосфер они легко отделяются от шлака, образующегося при сгорании угля. При погружении в воду ценосферы всплывают на поверхность воды, а шлак погружается на дно. При этом отделяются и ценосферы с поврежденной оболочкой, которые также тонут в воде.

В естественном состоянии ценосферы заполнены газом под давлением несколько ниже атмосферного. Состав газа, заполняющего полости внутри ценосфер, близок к составу дымовых газов. Основными компонентами газов внутри ценосфер являются азот, диоксид углерода и кислород.

Оболочка ценосфер по составу и свойствам близка к стеклу. Поэтому проницаемость оболочки ценосфер для гелия на 5–6 порядков выше, чем для других газов. При этом проницаемость оболочки ценосфер даже для гелия невелика и становится ощутимой только при повышенной температуре.

Для использования ценосфер в качестве насадки регенератора их необходимо наполнить гелием, не повреждая при этом замкнутой оболочки. Для этого достаточно выдержать ценосферы некоторое время в атмосфере гелия при повышенной температуре. Как показано в работе [11], для выравнивания давления гелия снаружи и внутри ценосфер при  $T = 170$  °С достаточно 1–2 часов, а при температуре около 500 °С выравнивание давлений происходит за несколько минут. При криогенных температурах диффузия гелия через оболочку ценосфер замедляется настолько, что ею можно пренебречь.

Благодаря микроскопическим размерам ценосфер они способны выдерживать большие перепады давлений, достигающих 10 МПа. Особую прочность ценосферы имеют в случае приложения внешнего давления.

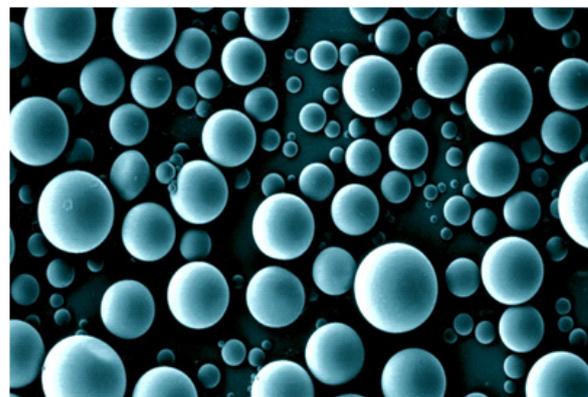


Рис. 3. Вид ценосфер под микроскопом

Важным преимуществом ценосфер при использовании их в качестве насадки регенераторов является то, что они практически не взаимодействуют с магнитными полями. Так как высокая теплоемкость интерметаллических соединений редкоземельных элементов, которые применяются для изготовления насадок регенераторов, связана с изменением их магнитных свойств, то все эти материалы активно взаимодействуют с сильными магнитными полями. Это приводит к появлению дополнительных усилий в механизме движения вытеснителей, повышению сил трения и вследствие этого ускоренному износу уплотнений и пар трения. Кроме того, движение значительных масс магнитных материалов во внешних магнитных полях создает электромагнитные наводки и помехи в работе электронных приборов.

Применение в качестве насадки регенераторов ценосфер, наполненных гелием, не накладывает никаких ограничений на применение криорефрижераторов при работе в сильных магнитных полях.

В настоящее время ценосферы уже присутствуют на рынке и находят применение в качестве теплоизоляционного материала и наполнителя для бетона. Поэтому, в отличие от редкоземельных элементов, насадка из ценосфер, наполненных гелием, будет иметь сравнительно низкую стоимость.

Целью настоящей работы является оценка возможности применения ценосфер, наполненных гелием, в качестве насадки регенераторов низкотемпературной ступени криорефрижераторов GM.

## 2. Моделирование работы двухступенчатого криорефрижератора Гиффорда–Мак-Магона

Целью математического моделирования двухступенчатого криорефрижератора GM является определение параметров гелия на входе и выходе из регенератора второй ступени, в которой достигается температура ниже 4,2 К.

Знание этих параметров позволит сформулировать технические требования к регенератору второй ступени криорефрижератора, которые необходимо выполнить для достижения температуры ниже 4,2 К. Это, в свою очередь, позволит оценить возможность замены соединений редкоземельных металлов ценосферами.

В качестве объекта моделирования выбран двухступенчатый криорефрижератор GM, размеры и основные характеристики которого соответствуют криорефрижератору DE204SF, производимому фирмой Advanced Research Systems (ARS). Данный криорефрижератор имеет паспортную холодопроизводительность первой ступени 8 Вт на температурном уровне 20 К и холодопроизводительность второй ступени 0,2 Вт на температурном уровне 4,2 К.

Расчетная схема двухступенчатого криорефрижератора GM показана на рис. 4.

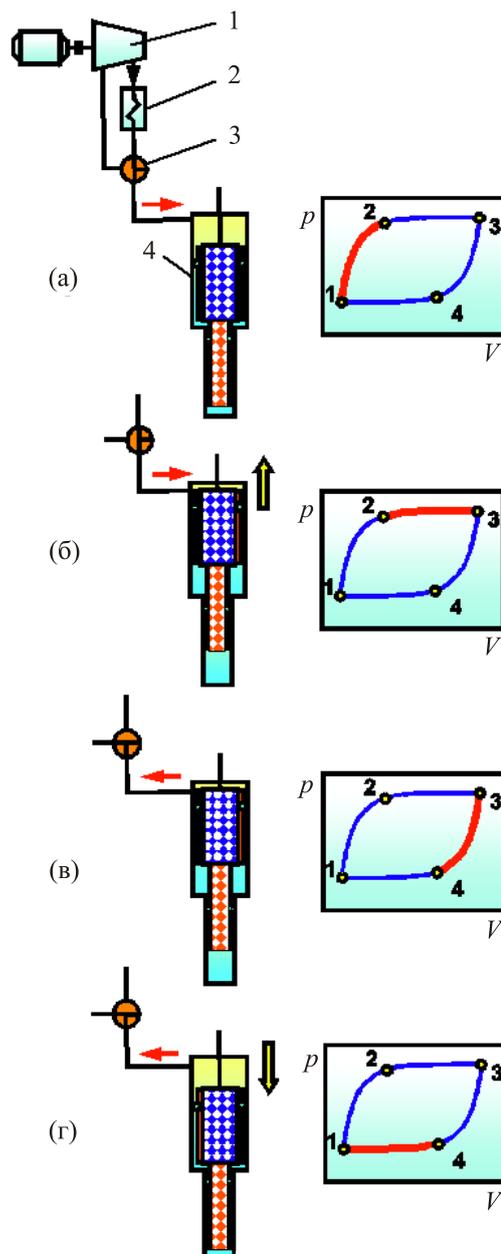


Рис. 4. (Онлайн в цвете) Расчетная схема рабочего процесса в криорефрижераторе GM: 1 — компрессор; 2 — охладитель; 3 — переключатель потоков; 4 — ступенчатый вытеснитель-регенератор.

Идеализированный рабочий цикл криорефрижератора GM включает следующие четыре этапа:

- сжатие и впуск газа в цилиндр (1–2);
- изобарное охлаждение газа при перемещении вытеснителя-регенератора вверх (2–3);
- выхлоп газа, обеспечивающий холодопроизводительность установки (3–4);
- нагрев газа при перемещении вытеснителя-регенератора вниз (4–1).

Построение математической модели двухступенчатого криорефрижератора проводилось аналогично по-

строению математической модели одноступенчатого криорефрижератора, изложенному в [12].

В качестве универсального аргумента при построении математической модели криорефрижератора GM выбран угол поворота вала кривошипно-кулисного механизма, приводящего в движение вытеснители-регенераторы первой и второй ступеней.

Работа компрессора, охладителя и переключателя потоков учитывается в модели путем задания зависимости давления в рабочем цилиндре от угла поворота вала кривошипно-кулисного механизма. При этом давление в первой и второй ступенях установки считается одинаковым. В качестве рабочего вещества в установке используется гелий.

Давление на всасывании компрессора принято равным 7,0 бар, давление нагнетания — 22 бар. При переключении потоков в моделируемом криорефрижераторе новое давление в рабочем цилиндре устанавливается не мгновенно, а через некоторое время. Считается, что скорость изменения давления в рабочем цилиндре установки пропорциональна разности давлений в цилиндре и компрессоре. Коэффициент пропорциональности в этой зависимости подобран таким образом, чтобы время впуска и выпуска гелия составляло 20–25% от периода работы установки.

График изменения давления в рабочем цилиндре за один цикл работы криорефрижератора приведен на рис. 5.

Размеры низкотемпературной части криорефрижератора приняты близкими соответствующим размерам криорефрижератора DE204SF. Так, диаметр вытеснителя первой ступени криорефрижератора равен 54 мм, вытеснители второй ступени имеет диаметр 28 мм. Ход вытеснителей-регенераторов первой и второй ступеней одинаков и принят равным 30 мм. Относительная величина мертвого объема в холодной и теплой частях рабочего цилиндра считалась равной 5%. Длительность одного цикла работы криорефрижератора принята равной 1 с.

Построение математической модели криорефрижератора GM целесообразно начать с описания изменения объемов теплой и холодных полостей рабочего цилиндра.

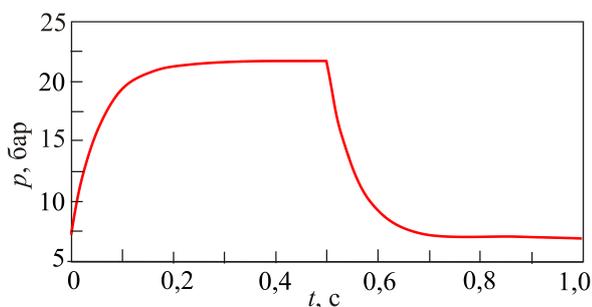


Рис. 5. Временная зависимость давления  $p$  в рабочем цилиндре криорефрижератора

Объем холодной полости второй ступени можно представить в виде функции угла поворота вала кривошипно-кулисного механизма, перемещающего вытеснитель-регенератор:

$$V_{E2}(\tau) = V_{02} + V_{H2} \cdot \frac{1 + \cos(\varphi + \Theta)}{2}, \quad (1)$$

где  $V_{E2}$  — объем холодной полости второй ступени,  $\text{м}^3$ ;  $V_{02}$  — «мертвый» объем холодной полости второй ступени,  $\text{м}^3$ ;  $V_{H2}$  — объем, описанный вытеснителем-регенератором второй ступени,  $\text{м}^3$ ;  $\varphi$  — угол поворота вала кривошипно-кулисного механизма, рад;  $\Theta$  — угол сдвига фаз движения вытеснителя-регенератора и переключателя потоков, рад.

Объем холодной полости первой ступени определяется аналогично

$$V_{E1}(\tau) = V_{01} + V_{H1} \cdot \frac{1 + \cos(\varphi + \Theta)}{2}, \quad (2)$$

где  $V_{E1}$  — объем холодной полости первой ступени,  $\text{м}^3$ ;  $V_{01}$  — «мертвый» объем холодной полости первой ступени,  $\text{м}^3$ ;  $V_{H1}$  — объем, описанный вытеснителем-регенератором первой ступени,  $\text{м}^3$ .

Изменение объема теплой полости цилиндра происходит в противофазе по отношению к изменению объема холодной полости. Поэтому зависимость объема теплой полости цилиндра от угла поворота вала кривошипно-кулисного механизма описывается формулой

$$V_C(\tau) = V_{C0} + V_H \cdot \frac{1 - \cos(\varphi + \Theta)}{2}, \quad (3)$$

где  $V_{C0}$  — «мертвый» объем теплой полости,  $\text{м}^3$ .

Массовый расход газа через регенераторы определялся как разность скоростей изменения масс газа в полостях на концах данного регенератора.

В процессе выхлопа газ в рабочем цилиндре установки GM совершает работу по выталкиванию другой части этого же газа в линию всасывания компрессора.

Если бы этот процесс проходил изотермически, то для поддержания постоянной температуры газа потребовалось бы подвести к нему некоторое количество тепла от объекта охлаждения. И, наоборот, если процесс выхлопа проходит адиабатно (без подвода тепла), то это приводит к существенному понижению температуры газа в рабочем цилиндре.

Сложность анализа работы установок Гиффорда–Мак-Магона обусловлена тем, что в них одновременно происходит и охлаждение газа в рабочем цилиндре, и отвод тепла от объекта охлаждения. Причем, соотношение между теплом, которое отведено от объекта охлаждения, и теплом, отведенным от газа в рабочем цилиндре, определяется условиями теплообмена на стенке рабочего цилиндра.

Максимальное количество тепла, которое можно подвести в процессе выхлопа, равно технической работе, затраченной на выталкивание газа из рабочего цилиндра:

$$Q = \int_{p_1}^{p_2} V_E dp, \quad (4)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — давления в начале и конце процесса выхлопа.

Математическая модель машины GM построена на использовании электронных таблиц «Excel». Полный оборот привода кривошипно-кулисного механизма разделен на 360 частей, иными словами, каждой части цикла соответствует поворот вала на один градус.

Воспользовавшись уравнениями (1)–(3), можно определить объемы теплой и холодных полостей на каждом шаге работы машины.

Задав температуры окружающей среды и объекта охлаждения, а также зная давление в рабочем цилиндре на каждом шаге работы машины, можно найти массу газа в теплой и холодной полостях. Зная это, нетрудно определить теоретическую холодопроизводительность установки. Для этого в формуле (4) интеграл заменяется приближающейся к нему суммой, а суммирование элементарных значений холодопроизводительности проводится за весь цикл работы машины GM:

$$Q_0 = \sum_{n=1}^{360} 0,5 [V_E(\varphi_{n+1}) + V(\varphi_n)] [p(\varphi_{n+1}) - p(\varphi_n)]. \quad (5)$$

Как показывают расчеты, максимум холодопроизводительности установки достигается в том случае, когда выпуск газа в рабочий цилиндр начинается несколько раньше, чем вытеснитель-регенератор дойдет до нижней мертвой точки. Оптимальное значение угла сдвига фаз  $\Theta$  в рассматриваемой установке оказалось равным  $160^\circ$ .

Считая процессы впуска и выхлопа из полости первой ступени криорефрижератора адиабатными, можно рассчитать изменение температуры газа в этой части рабочего цилиндра. Соответствующий график приведен на рис. 6.

Впуск гелия в рабочий цилиндр установки GM начинается, когда вытеснитель-регенератор находится вблизи нижней мертвой точки. Сразу же после начала впуска в результате сжатия газа в полости первой ступени происходит резкое повышение температуры газа. Далее рост температуры газа замедляется, и его температура начинает падать вследствие того, что к нагретому газу в этой полости постоянно подмешивается газ, поступающий из регенератора первой ступени и имеющий температуру, близкую к температуре подвода тепла к первой ступени охлаждения. В расчетах принято, что смешение газа в рабочем цилиндре установки происходит мгновенно, и температура во всех точках полостей расширения первой и второй ступеней одинакова.

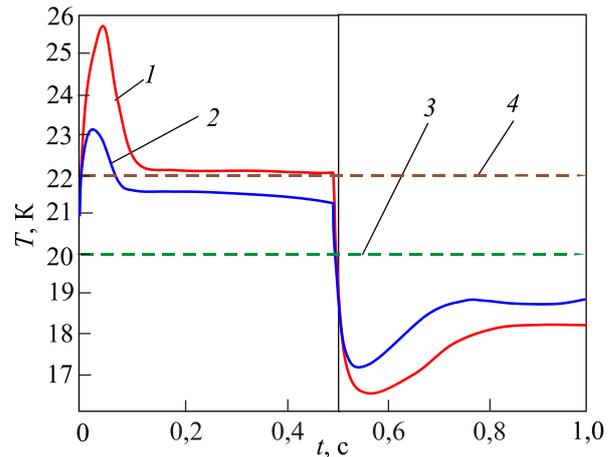


Рис. 6. (Онлайн в цвете) Изменение температуры гелия в полости расширения первой ступени криорефрижератора за период работы машины: температура газа без учета теплообмена со стенкой цилиндра (адиабатные условия) (1); температура газа с учетом теплообмена со стенкой цилиндра ( $\alpha=7000$  Вт/(м<sup>2</sup>·К)) (2); температура объекта охлаждения (3); средняя температура гелия на выходе из регенератора (4).

венно, и температура во всех точках полостей расширения первой и второй ступеней одинакова.

В результате подмешивания газа из регенераторов в конце фазы впуска, даже без учета теплообмена со стенками цилиндра, температура газа в первой ступени оказывается близкой к средней температуре газа, выходящего из регенератора. Температура гелия, выходящего из регенератора, выше температуры подвода тепла к первой ступени охлаждения криорефрижератора (20 К) на величину температурной недорекуперации на холодном конце теплообменника.

Когда вытеснитель-регенератор находится вблизи верхней мертвой точки, открывается выпускной клапан, и в полости расширения первой ступени начинается процесс выхлопа, сопровождающийся резким падением температуры. В какой-то момент времени падение температуры прекращается из-за подмешивания газа с более высокой температурой, выходящего из регенератора второй ступени криорефрижератора.

Для того чтобы определить эффективность работы регенератора, необходимо оценить величину коэффициента теплоотдачи в полостях расширения первой и второй ступеней криорефрижератора.

Теплообмен гелия в полостях расширения криорефрижераторов GM весьма специфичен. Поэтому для оценки коэффициентов теплоотдачи в этих полостях было бы некорректно использовать формулы, выведенные, например, для вынужденной конвекции внутри или снаружи труб.

Для оценки коэффициентов теплоотдачи внутри полостей расширения криорефрижераторов воспользуемся экспериментальными данными о зависимости сред-

него коэффициента теплоотдачи гелия к стенке цилиндра криорефрижератора GM, приведенными в работе [13]. Результаты этих экспериментов не могут быть непосредственно использованы при построении данной математической модели, так как значения коэффициентов теплоотдачи получены в другом диапазоне температур (70–200 К).

Считая, что процессы конвективного теплообмена в полостях расширения различных криорефрижераторов более или менее подобны, экспериментальные данные, приведенные в работе [13], были обобщены при помощи критериального уравнения вида

$$Nu = 0,0025 Re^{1,18} Pr^{0,4}. \quad (6)$$

На рис. 7 приведено сопоставление экспериментальных данных по теплоотдаче внутри полости расширения криорефрижератора GM [13] со значениями, полученными согласно критериальному выражению (6). Средняя скорость газа в полости расширения криорефрижератора, при которой достигается наилучшая согласованность между данными эксперимента и результатами, полученными по формуле (6), оказалась равной 2,63 м/с.

Воспользовавшись этим уравнением, после подстановки теплофизических свойств гелия, соответствующих температурам 20 и 4 К, а также характерных размеров моделируемого криорефрижератора, получаем следующую оценку среднего значения коэффициента теплоотдачи от стенки цилиндра к гелию: для первой ступени криорефрижератора (20 К) 7000 Вт/(м<sup>2</sup>·К); для второй ступени криорефрижератора (4,2 К) 54000 Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Зная холодопроизводительность первой ступени криорефрижератора, можно оценить эффективность регенератора первой ступени криорефрижератора. Расчетное значение температурной недорекуперации гелия на холодном конце регенеративного теплообменника первой ступени получилось равным 2,2 К.

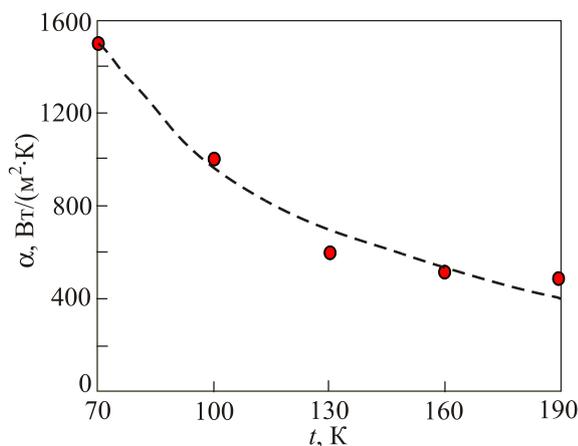


Рис. 7. Экспериментальные данные по теплоотдаче внутри полости расширения криорефрижератора GM и результат их обобщения критериальным уравнением (6).

Эти данные позволяют построить расчетную зависимость температуры гелия в полости расширения первой ступени, учитывающую теплообмен со стенками цилиндра.

На рис. 6 синей линией (2) показано изменение температуры гелия в первой ступени криорефрижератора с учетом теплообмена со стенкой цилиндра и температурной недорекуперации гелия в регенераторе.

Динамика изменения температуры гелия в полости расширения первой ступени криорефрижератора в дальнейшем использовалась в качестве исходных данных при расчете регенератора второй ступени.

Температуру газа в полости расширения второй ступени криорефрижератора можно рассчитать аналогично. На рис. 8 приведен график зависимости температуры гелия в полости расширения второй ступени криорефрижератора GM от времени.

В период впуска изменение температуры гелия в полости расширения второй ступени аналогично изменению его температуры в первой ступени за тот же период. Это объясняется тем, что в обеих полостях происходит процесс впуска с подмешиванием газа, выходящего из регенеративного теплообменника. Основное различие между процессами в полостях первой и второй ступеней заключается в том, что объемная теплоемкость гелия в полости второй ступени намного больше его объемной теплоемкости в полости первой ступени. Поэтому повышение температуры газа в полости второй ступени значительно меньше скачка температуры газа в полости расширения первой ступени.

Процесс выхлопа газа из полости расширения второй ступени имеет существенные отличия от аналогичного процесса в полости расширения первой ступени. В процессе выхлопа из полости второй ступени отсутствует подмешивание газа, выходящего из реге-

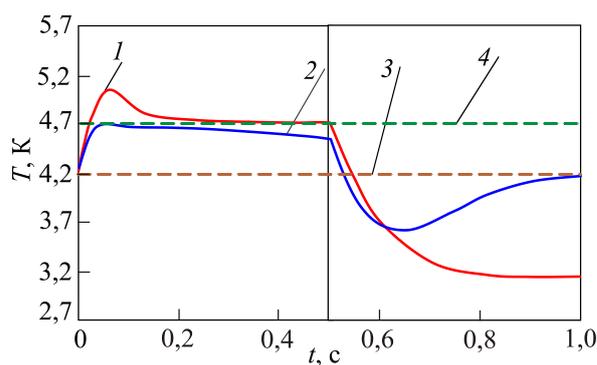


Рис. 8. (Онлайн в цвете) Изменение температуры гелия в полости расширения второй ступени криорефрижератора за период работы установки: температура газа без учета теплообмена со стенкой цилиндра (адиабатные условия) (1); температура газа с учетом теплообмена со стенкой цилиндра ( $\alpha=54000$  Вт/(м<sup>2</sup>·К)) (2); температура объекта охлаждения (3); средневзвешенная температура газа на выходе из регенератора (4).

неративного теплообменника последующей ступени. Поэтому на графике, отражающем ход температур в адиабатных условиях (без теплообмена со стенкой цилиндра), температура газа в полости расширения второй ступени монотонно понижается.

Зная геометрические размеры полостей рабочего цилиндра криорефрижератора и коэффициент теплоотдачи, нетрудно определить количество тепла, которое отводится или подводится к полости расширения второй ступени моделируемого криорефрижератора. График изменения температуры гелия в полости расширения второй ступени с учетом теплообмена со стенкой цилиндра приведен на рис. 8. На рисунке видно, что теплообмен газа со стенкой цилиндра уменьшает амплитуду колебаний его температуры относительно температуры объекта охлаждения, что и должно быть.

Наиболее сильное влияние теплообмена со стенкой цилиндра на температуру газа имеет место в конце процесса выхлопа. Это объясняется тем, что масса газа в полости расширения на этом этапе работы машины минимальна.

Как видно из приведенных графиков, минимальная температура гелия в полости расширения второй ступени криорефрижератора опускается до 3,6 К. Это существенно ниже нормальной температуры кипения гелия (4,2 К). Тем не менее опасность конденсации гелия в полости расширения криорефрижератора полностью исключена, так как на протяжении всего рабочего цикла гелий находится в сверхкритическом состоянии (критическое давление для гелия 2,27 бар).

Для исключения опасности затвердевания гелия в процессе работы криорефрижератора максимальное давление в цикле не должно превышать 25 бар.

Кроме этих ограничений, выбор рабочего диапазона давлений для криорефрижераторов определяется оптимальной степенью сжатия для поршневых компрессоров, которая близка к 3,5. С учетом всех этих ограничений типичное значение минимального давления для криорефрижераторов, способных получать температуры ниже 4,2 К, составляет 6–7 бар, а максимальное давление обычно находится в пределах 20–22 бар.

Если просуммировать элементарные тепловые потоки к полости расширения второй ступени за один период работы криорефрижератора, то можно определить его холодопроизводительность. Величина этой холодопроизводительности для моделируемого криорефрижератора на температурном уровне 4,2 К известна и равна 0,2 Вт. Это позволяет найти максимальное значение температурной недорекуперации на холодном конце теплообменника второй ступени криорефрижератора, при которой обеспечивается указанная холодопроизводительность.

Максимальная величина температурной недорекуперации на выходе из регенератора второй ступени, при

которой достигается паспортное значение холодопроизводительности криорефрижератора, составляет 0,47 К.

Так как на каждом шаге расчета привод кривошипно-кулисного механизма криорефрижератора поворачивался на один градус, то массовый расход гелия в регенераторе на каждом шаге работы установки может быть найден как изменение массы газа в полости расширения второй ступени криорефрижератора за 1/360 с. Поэтому рассмотренная математическая модель позволяет также определить зависимость массового расхода гелия через регенератор от времени.

В качестве исходных данных для последующего расчета эффективности регенератора с насадкой в виде слоя ценосфер использованы следующие параметры: температуры газа на входе в регенератор в периоды прямого и обратного дутья, скорость и расход газа в периоды прямого и обратного дутья, а также свойства рабочего тела и насадки регенератора.

### 3. Моделирование работы регенератора криорефрижератора GM

Для определения размеров регенератора второй ступени криорефрижератора GM с насадкой из ценосфер целесообразно применить волновой метод расчета периодических тепломассообменных процессов. Математический аппарат для волновой методики расчета регенераторов изложен в статьях [14–17].

Если учитывать подобие процессов тепло- и массообмена, то все результаты, полученные для периодических процессов адсорбции, могут быть с успехом перенесены на подобные процессы теплообмена в регенераторе машины GM.

Наиболее очевидным аналогом периодических процессов адсорбции и десорбции являются периодические процессы теплообмена в регенеративных теплообменниках.

Теплообменники регенеративного типа, или просто регенераторы — это теплообменные аппараты периодического действия. В регенераторах также тепло от нагретой среды передается сначала насадке, а затем от нагретой насадки — холодной среде.

Основной проблемой, с которой приходится сталкиваться разработчикам регенеративных теплообменников, является необходимость учета процессов нестационарного теплообмена внутри элементов насадки. В технических расчетах от этой проблемы обычно уходят, сводя расчет регенеративного теплообменника к более простому расчету рекуперативного теплообменника [18–22].

В связи со сложностью учета нестационарного теплообмена в элементах насадки регенератора распространено мнение о том, что с этим можно справиться ценой большого объема вычислений, которые необходимо проводить при решении дифференциальных урав-

нений в частных производных, описывающих процессы нестационарной теплопроводности в твердом теле.

В работе автора [23] на примере задачи, которая допускает аналитическое решение, показано, что как только начинает учитываться продольная теплопроводность стенки теплообменника, проблемы, которые возникают при расчете таких теплообменников, приобретают принципиально иной характер. При попытке учета нестационарного теплообмена в насадке регенератора эти трудности растут в геометрической прогрессии.

Основная проблема, возникающая при расчете теплообменника с учетом продольной теплопроводности его стенки, заключается в том, что такой теплообменник необходимо рассматривать как одно целое. Поэтому широко используемые в настоящее время методы расчета, основанные на разбиении теплообменника на множество участков, на каждом из которых все параметры считаются неизменными, оказываются непригодными, как только возникает задача учета продольной теплопроводности такого теплообменника.

Следовательно, для учета продольной теплопроводности теплообменника, особенно в нестационарных процессах теплообмена, необходимо разработать принципиально новые подходы.

Решим задачу теплообмена в противоточном теплообменнике, в котором в прямом и обратном потоках движется одна и та же среда. Будем считать расходы среды в прямом и обратном потоках одинаковыми. Для удобства далее будем называть такие теплообменники оппозитными теплообменниками [24].

Оппозитные теплообменники широко распространены в энергетике и, в частности, технике низких температур, т.е. там, где рабочее вещество совершает замкнутый термодинамический цикл. Важным видом оппозитных теплообменников являются регенеративные теплообменники газовых криогенных машин и пульсационных охладителей.

Рассмотрим процесс теплопередачи в регенеративном теплообменнике, воспользовавшись волновым подходом к анализу периодических процессов теплообмена.

При математическом описании регенеративного теплообмена будем исходить из следующей физической картины распространения тепла в насадке регенеративного теплообменника.

Все пространство регенеративного теплообменника условно разделено на две зоны: неподвижную насадку, состоящую из твердых элементов и прилегающих к ним застойных зон, и систему каналов и пустот между элементами насадки, в которых движется теплоноситель.

В насадке распространение тепла происходит в основном за счет теплопроводности контактирующих между собой элементов насадки. В системе каналов и пустот, пронизывающих регенеративный теплообменник, тепло переносится за счет конвекции. Таким образом, тепло в регенеративном теплообменнике передается по

двум отдельным путям, в каждом из которых реализован свой механизм передачи тепла. Взаимодействие между этими тепловыми потоками происходит по границе каналов и пустот, в которых движется теплоноситель.

При такой постановке задачи отвод тепла от насадки к движущемуся теплоносителю рассматривается как сток тепла в задаче теплопроводности насадки. Конвективная составляющая теплообмена описывается отдельным уравнением теплового баланса элементарного объема теплоносителя.

С учетом изложенного уравнение теплопроводности в насадке может быть записано в виде

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial y^2} - \alpha F [T(x, \delta, \tau) - Tg(x, \tau)] = \rho_{noz} C_{noz} \frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial \tau}, \quad (7)$$

где  $T(x, y, \tau)$  — текущая температура насадки теплообменника, К;  $Tg(x, \tau)$  — текущая температура движущегося теплоносителя, К;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи от поверхности насадки к омывающему ее теплоносителю, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $F$  — удельная поверхность насадки (компактность теплообменника), м<sup>2</sup>/м<sup>3</sup>;  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$  — эквивалентные значения коэффициента теплопроводности, соответственно, по координатам  $x$  и  $y$ , учитывающие особенности теплопередачи в пористом теле, т.е. относительный объем пор, количество точек теплового контакта и т.п., Вт/(м·К);  $\rho_{noz}$  — плотность насадки теплообменника, кг/м<sup>3</sup>;  $C_{noz}$  — теплоемкость насадки теплообменника, Дж/(кг·К);  $\delta$  — характерный размер элемента насадки теплообменника, м.

Уравнение теплопроводности насадки регенеративного теплообменника учитывает распространение тепла по двум координатам. Координата  $x$  направлена вдоль оси теплообменника и совпадает с направлением движения потока теплоносителя в теплообменнике. Обобщенная координата  $y$  ортогональна координате  $x$  и направлена по нормали к поверхности элемента насадки.

Тепловой баланс элементарного объема теплоносителя, движущегося по системе полостей между элементами насадки, можно записать в виде дифференциального уравнения первого порядка:

$$\alpha F [T(x, \delta, \tau) - Tg(x, \tau)] - G \cdot C_p \frac{dTg(x, \tau)}{dx} = 0, \quad (8)$$

где  $G$  — массовый расход теплоносителя, отнесенный к единичному сечению насадки, кг/(с·м<sup>2</sup>);  $C_p$  — теплоемкость теплоносителя, Дж/(кг·К).

Эти два уравнения при совместном рассмотрении позволяют найти распределение температур в движущемся теплоносителе и в самой насадке.

После перехода к операторной форме по времени уравнение (7) приобретает вид

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \tilde{T}(x, y, s)}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \tilde{T}(x, y, s)}{\partial y^2} - \alpha F [\tilde{T}(x, \delta, s) - \tilde{T}g(x, s)] = \rho_{\text{noz}} C_{\text{noz}} [s \tilde{T}(x, y, s) - T_0(x, y)], \quad (9)$$

где  $s$  — оператор дифференцирования по времени [25],  $T_0(x, y)$  — начальное распределение температур в насадке.

Для простоты далее считаем начальное распределение температур нулевым.

Проводим конечное интегральное преобразование по координате  $y$ , используя ядро преобразования

$$\bar{T}_n(x, s) = \int_0^\delta \tilde{T}(x, y, s) \cos\left(\mu_n \frac{y}{\delta}\right) dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где  $\delta$  — характерный размер (радиус) элемента насадки.

Формула обращения для интегрального преобразования по координате  $y$

$$\tilde{T}(x, y, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{T}_n(x, s)}{\|\Psi_{y,n}\|^2} \cos\left(\mu_n \frac{y}{\delta}\right), \quad (11)$$

$$\|\Psi_{y,n}\|^2 = \int_0^\delta \cos^2\left(\mu_n \frac{y}{\delta}\right) dy = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4\mu_n} \sin(2\mu_n), \quad (12)$$

где  $\|\Psi_{y,n}\|^2$  — нормирующий множитель (квадрат нормы ядра интегрального преобразования).

Собственные числа интегрального преобразования находим таким образом, чтобы на поверхности элементов насадки выполнялись граничные условия третьего рода, а на оси симметрии элемента насадки — нулевое граничное условие второго рода. Трансцендентное уравнение для нахождения собственных чисел в этом случае

$$\left(\frac{\mu_n}{\delta}\right) \text{tg}(\mu_n) = \frac{\alpha F}{\lambda_y}. \quad (13)$$

После косинус-преобразования по координате  $y$  уравнение теплопроводности в неподвижной насадке принимает вид

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \bar{T}_n(x, s)}{\partial x^2} - \lambda_y \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \bar{T}_n(x, s) - \alpha F \frac{\mu_n}{\delta} \sin(\mu_n) \times [\bar{T}_n(x, s) - \bar{T}g_k(x, s)] = \rho_{\text{noz}} C_{\text{noz}} s \bar{T}_n(x, s). \quad (14)$$

Проводим интегральное преобразование по координате  $x$ , выбрав в качестве ядра преобразования косинус-функцию

$$\bar{\bar{T}}_{n,k}(s) = \int_0^h \bar{T}_n(x, s) \cos\left(\pi k \frac{x}{h}\right) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где  $h$  — толщина слоя насадки в регенеративном теплообменнике, м.

При выборе такой формы ядра интегрального преобразования автоматически обеспечиваются нулевые граничные условия второго рода на торцах регенеративного теплообменника, иными словами, теплообмен по координате  $x$  на торцах теплообменника отсутствует.

После проведения конечного интегрального преобразования по координате  $x$  уравнение (14) выглядит как

$$-\lambda_x \frac{(\pi \cdot k)^2}{h^2} \bar{\bar{T}}_{n,k}(s) - \lambda_y \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \bar{\bar{T}}_{n,k}(s) - \alpha F \frac{\mu_n}{\delta} \sin(\mu_n) [\bar{\bar{T}}_{n,k}(s) - \bar{T}g_k(s)] = \rho_{\text{noz}} C_{\text{noz}} s \bar{\bar{T}}_{n,k}(s). \quad (16)$$

Отсюда находим образ функции, описывающей температуру неподвижной насадки,

$$\bar{\bar{T}}_{n,k}(s) = \frac{\bar{T}g(s) \frac{\alpha F}{\rho_{\text{noz}} C_{\text{noz}}} \frac{\mu_n}{\delta} \sin(\mu_n)}{\left( a_x \frac{(\pi k)^2}{h^2} + a_y \frac{\mu_n^2}{\delta^2} + \frac{\alpha F}{\rho_{\text{noz}} C_{\text{noz}}} \frac{\mu_n}{\delta} \sin(\mu_n) + s \right)}, \quad (17)$$

где  $a_x$  и  $a_y$  — коэффициенты теплопроводности, соответственно, насадки и ее элемента,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

Полученное равенство позволяет найти решение уравнения теплопроводности насадки в виде двойного ряда Фурье:

$$\tilde{T}(x, y, s) = \sum_n \sum_k \frac{\bar{T}g_k(s) \frac{\alpha F}{\rho_{\text{noz}} C_{\text{noz}}} \frac{\mu_n}{\delta} \sin(\mu_n) \cos\left(\mu_n \frac{y}{\delta}\right) \cos\left(2\pi k \frac{x}{h}\right)}{\left( a_x \frac{(\pi k)^2}{h^2} + a_y \frac{\mu_n^2}{\delta^2} + \frac{\alpha F}{\rho_{\text{noz}} C_{\text{noz}}} \frac{\mu_n}{\delta} \sin(\mu_n) + s \right) \|\Psi_{x,k}\|^2 \|\Psi_{y,n}\|^2}, \quad (18)$$

где коэффициенты  $\bar{T}g_k(s)$  не зависят от координат и находятся по формуле

$$\bar{T}g_k(s) = \int_0^h \bar{T}g_k(x, s) \cos\left(2\pi k \frac{x}{h}\right) dx. \quad (19)$$

До сих пор решение уравнения теплопроводности насадки проводилось по методу конечных интегральных преобразований, описанному, например, в [26].

По аналогии с волновым подходом к периодическим процессам адсорбции и десорбции введем поня-

тие собственной тепловой волны для данного регенеративного теплообменника.

Если рассматривается установившийся режим работы регенеративного теплообменника, то, согласно теореме Пригожина, производство энтропии в таком теплообменнике должно достигать своего минимума.

Очевидно, что абсолютный минимум производства энтропии в установившемся процессе прохождения тепловой волны сквозь насадку регенеративного теплообменника будет достигаться в том случае, когда энтропия насадки в целом остается неизменной. И такой режим прохождения бесконечной тепловой волны сквозь насадку теплообменника, при котором энтропия насадки регенеративного теплообменника остается неизменной, существует. Этот режим имеет место при таких частотах колебаний температуры движущегося теплоносителя, при которых мгновенное значение его температуры на входе в насадку равно мгновенному значению температуры этого теплоносителя на выходе из насадки. Это возможно только в том случае, когда длина тепловой волны в насадке теплообменника будет равна толщине слоя этой насадки.

Следует отметить, что передача тепла при конечной разности температур всегда сопровождается ростом энтропии. Поэтому работа любого теплообменника сопровождается производством энтропии. Но в данном случае режим с нулевым производством энтропии реализуется не в теплообменнике, а в насадке, через которую проходит бесконечная собственная тепловая волна.

В процессе прохождения тепловой волны через насадку регенеративного теплообменника происходит перераспределение тепла внутри самой насадки, но эксергия тепла, накопленного в насадке, остается неизменной.

Зададимся волновым характером колебаний температуры теплоносителя. Причем, сразу же не произвольными частотами колебаний, а собственными частотами для данного регенеративного теплообменника, т.е. такими частотами, при которых по длине регенеративного теплообменника укладывается целое число тепловых волн:

$$Tg_k(x, \tau) = B_k \cos\left(2\pi k \left(\frac{x}{h} + \frac{\tau}{T}\right)\right) = B_k \left[ \cos\left(2\pi k \frac{x}{h}\right) \cos\left(2\pi k \frac{\tau}{T}\right) - \sin\left(2\pi k \frac{x}{h}\right) \sin\left(2\pi k \frac{\tau}{T}\right) \right], \quad (20)$$

где  $T$  — период колебаний температуры в главной тепловой волне,  $B_k$  — амплитуда колебаний температуры в теплоносителе, движущемся внутри насадки теплообменника, К.

Строим конечное интегральное косинус-преобразование по координате  $x$ :

$$\begin{aligned} \bar{T}g_{m,k}(\tau) &= \int_0^h Tg_k(x, \tau) \cos\left(2\pi m \frac{x}{h}\right) dx = \\ &= B_k \cos\left(2\pi k \frac{\tau}{T}\right) \int_0^h \cos\left(2\pi k \frac{x}{h}\right) \cos\left(2\pi m \frac{x}{h}\right) dx - \\ &- B_k \sin\left(2\pi k \frac{\tau}{T}\right) \int_0^h \sin\left(2\pi k \frac{x}{h}\right) \sin\left(2\pi m \frac{x}{h}\right) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Для нахождения значений полученных интегралов воспользуемся правилом отбора частот:

$$\int_0^h \cos\left(2\pi k \frac{x}{h}\right) \cos\left(2\pi m \frac{x}{h}\right) dx = \begin{cases} m = k \Rightarrow \frac{h}{2} \\ m \neq k \Rightarrow 0 \end{cases},$$

$$\int_0^h \sin\left(2\pi k \frac{x}{h}\right) \sin\left(2\pi m \frac{x}{h}\right) dx = 0. \quad (22)$$

С учетом этого

$$\bar{T}g_k(\tau) = B_k \cos\left(2\pi k \frac{\tau}{T}\right) \frac{h}{2}. \quad (23)$$

Переходим к операторной форме по времени:

$$\bar{T}g_k(s) = \frac{B_k h}{2} \frac{s}{\left(s^2 + \left(\frac{2\pi k}{T}\right)^2\right)}. \quad (24)$$

Смысл последнего преобразования заключается в том, что если через насадку теплообменника пропустить теплоноситель, температура которого изменяется гармонически с частотой, равной частоте одной из собственных тепловых волн этого регенеративного теплообменника, то все коэффициенты ряда Фурье (18), кроме одного, окажутся равными нулю. Следовательно, решение уравнения теплопроводности насадки в этом случае можно упростить и представить в виде простого ряда Фурье вместо двойного (18).

Как известно из теории колебаний, частота вынужденных колебаний системы всегда совпадает с частотой внешнего воздействия, вызвавшего эти колебания. Поэтому частота колебаний температуры внутри элемента насадки будет совпадать с частотой колебаний тепловых волн, подаваемых извне. В нашем случае это будет одна из собственных частот для рассматриваемого регенеративного теплообменника. Длина же тепловых волн, распространяющихся в элементе насадки, в общем случае отличается от длины собственной тепловой волны в регенеративном теплообменнике.

В качестве насадки регенератора в машине Гиффорда–Мак-Магона может использоваться, например, мед-

ная дробь диаметром  $2\delta = 0,5$  мм. Теплопроводность меди составляет примерно  $\lambda_y \sim 400$  Вт/(м·К). Коэффициент теплоотдачи от поверхности насадки к омывающему ее гелию при таких размерах дробы имеет величину около  $3000$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Компактность теплообменника достигает  $3000$  м<sup>2</sup>/м<sup>3</sup>. Произведение коэффициента теплоотдачи, удельной поверхности насадки и характерного размера насадки  $\alpha F \delta \sim 102$  Вт/(м·К). Поэтому параметр  $\alpha F \delta / \lambda_y = 5$ . Следовательно, в случае регенератора газовой криогенной машины уже нельзя считать, что температура поверхности элемента насадки практически совпадает с температурой, омывающего его теплоносителя. Это не позволяет упростить полученное решение, заменив ряд Фурье по координате  $y$  одним из его членов, как это было сделано при рассмотрении адсорбции.

В итоге, если на вход регенеративного теплообменника подается  $k$ -собственная концентрационная волна, то в установившемся режиме получаем следующее выражение для образа тепловой волны в насадке:

$$\tilde{T}_{n,k}(x, y, s) = \frac{B_k h}{2} \frac{\alpha F}{\rho_{noz} C_{noz}} \frac{\cos\left(2\pi k \frac{x}{h}\right) s}{\left(s^2 + \left(\frac{2\pi k}{T}\right)^2\right)} \times \sum_n \frac{\frac{\mu_n}{\delta} \|\Psi_{y,n}\|^2 \sin(\mu_n) \cos\left(\mu_n \frac{y}{\delta}\right)}{\left(a_x \frac{(\pi k)^2}{h^2} + a_y \frac{\mu_n^2}{\delta^2} + \frac{\alpha F}{\rho_{noz} C_{noz}} \frac{\mu_n}{\delta} \sin(\mu_n) + s\right)}. \quad (25)$$

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$Da_n = \frac{\mu_n \sin(\mu_n)}{\delta \|\Psi_{y,n}\|^2}, \quad (26)$$

$$Dc_{k,n} = \left( a_x \frac{(\pi k)^2}{h^2} + a_y \frac{\mu_n^2}{\delta^2} + \frac{\alpha F}{\rho_{noz} C_{noz}} \frac{\mu_n}{\delta} \sin(\mu_n) \right), \quad (27)$$

$$Ds_k = \left( \frac{2\pi k}{T} \right). \quad (28)$$

С учетом этого выражение (25) приобретает вид

$$\tilde{T}_{n,k}(x, y, s) = \frac{B_k h}{2} \frac{\alpha F}{\rho_{noz} C_{noz}} \frac{s}{\left(s^2 + Ds_k^2\right)} \times \cos\left(2\pi k \frac{x}{h}\right) \sum_n \frac{Da_n \cos\left(\mu_n \frac{y}{\delta}\right)}{\left(Dc_{k,n} + s\right)}. \quad (29)$$

Разложив полученное выражение на простые дроби, переходим от образов к оригиналу по времени. Отбросив слагаемые, которые соответствуют переходному процессу, получаем решение для установившегося процесса прохождения  $k$ -собственной тепловой волны сквозь насадку регенеративного теплообменника:

$$T_k(x, y, \tau) = \frac{B_k h}{2} \frac{\alpha F}{\rho_{noz} C_{noz}} \cos\left(2\pi k \frac{x}{h}\right) \sum_n \frac{Da_{k,n} \cos\left(\mu_n \frac{y}{\delta}\right)}{\left[Dc_{k,n}^2 + Ds_k^2\right]} \left\{ Ds_k \sin\left[\left(\frac{\pi k}{T}\right)\tau\right] + Dc_{k,n} \cos\left[\left(\frac{2\pi k}{T}\right)\tau\right] \right\}. \quad (30)$$

Если зафиксировать значение координаты  $y$ , то полученное решение можно трактовать как результат фиксированного временного запаздывания тепловой волны, распространяющейся в насадке теплообменника. Например, на поверхности элементов насадки при  $y = \delta$  уравнение можно представить в более удобном для анализа виде

$$T_k(x, y, \tau) = \frac{B_k h}{2} \frac{\alpha F}{\rho_{noz} C_{noz}} \cos\left(2\pi k \frac{x}{h}\right) \left\{ \tilde{D}s_k \sin\left[\left(\frac{\pi k}{T}\right)\tau\right] + \tilde{D}c_k \cos\left[\left(\frac{2\pi k}{T}\right)\tau\right] \right\}, \quad (31)$$

где

$$\tilde{D}s_k = \sum_n \frac{Da_n \cos(\mu_n)}{Dc_{k,n}^2 + Ds_k^2} Ds_k,$$

$$\tilde{D}c_k = \sum_n \frac{Da_n \cos(\mu_n)}{Dc_{k,n}^2 + Ds_k^2} Dc_{k,n}.$$

После элементарных преобразований получаем более простое и удобное для анализа выражение

$$T_k(x, \delta, \tau) = \frac{B_k h / 2 [(\alpha F) / (\rho_{noz} C_{noz})]}{\sqrt{\tilde{D}c_k^2 + \tilde{D}s_k^2}} \times \cos\left(2\pi k \frac{x}{h}\right) \cos\left(\left(\frac{2\pi k}{T}\right)\tau - \tilde{\varphi}_k\right), \quad (32)$$

$$\text{где } \tilde{\varphi}_k = \arctg\left(\frac{\tilde{D}s_k}{\tilde{D}c_k}\right). \quad (33)$$

Физический смысл этой формулы указывает, что амплитуда колебаний температуры насадки пропорциональна амплитуде колебаний температуры тепло-

носителя. Фаза колебаний температур насадки отстаёт от фазы колебаний температуры теплоносителя на входе в регенератор.

Иными словами, скорость распространения тепловой волны в насадке теплообменника получается меньше, чем скорость движения тепловой волны вне насадки.

Тепловой баланс элементарного объема теплоносителя, движущегося внутри насадки регенератора, записан в виде дифференциального уравнения (8), физический смысл которого заключается в том, что изменение температуры движущегося в регенераторе газа происходит только за счет теплообмена с насадкой.

В результате решения уравнения теплового баланса определяется пространственное отставание тепловой волны в теплоносителе, выходящем из регенеративного теплообменника, от тепловой волны, распространяющейся в насадке.

Тангенс угла пространственного сдвига фаз колебаний температуры поверхности элементов насадки и теплоносителя

$$\psi_k = \arctg \left\{ \frac{\alpha F h}{2\pi k G} \right\}. \quad (34)$$

С учетом решения полученного для собственной волны в насадке (32), а также заключения, что амплитуды собственных концентрационных волн на входе и выходе из насадки равны, получаем сравнительно простое решение для собственных тепловых волн в теплоносителе, выходящем из регенеративного теплообменника:

$$Tg_k(x, \tau) = B_k \cos \left[ 2\pi k \left( \frac{x}{h} + \frac{\tau}{T} \right) - \tilde{\varphi}_k - \psi_k \right]. \quad (35)$$

Физический смысл этой формулы вполне очевиден — при прохождении собственной волны через насадку регенератора ее амплитуда и частота остаются неизменными, а фаза волны отстаёт по времени на угол  $\tilde{\varphi}_k$ , а в пространстве — на угол  $\psi_k$ . Причем, для тепловых волн различной длины углы сдвига фаз получаются разными.

Использование волнового подхода к расчету регенератора позволяет учесть влияние следующих факторов:

- переменную температуру газа на входе в регенератор;
- процессы нестационарной теплопроводности в элементах насадки;
- продольную теплопроводность насадки теплообменника.

Для построения математической модели в качестве типичных параметров ценосфер были выбраны параметры узкой фракции ценосфер, выделенной из золы Московской ТЭЦ-22 [11,27]. Эти параметры ценосфер приведены в табл. 1.

На рис. 9 показаны расчетные графики изменения температуры газа в трех сечениях регенератора второй ступени для моделируемого криорефрижератора.

Таблица 1. Физико-химические свойства узкой фракции ценосфер Московской ТЭЦ-22

Размер фракции (ситовая классификация), мм	0,100+0,063
Насыпная плотность, кг/м <sup>3</sup>	180
Толщина стенки, мкм	2,0
Средний диаметр (расчетное значение), мкм	75
Геометрическая поверхность, м <sup>2</sup> /кг	220
Объем, доступный для гелия, м <sup>3</sup> /кг	(2,13 ± 0,06) · 10 <sup>-3</sup>

Как и следовало ожидать, в среднем сечении регенератора амплитуда колебаний температуры газа и насадки получилась значительно больше, чем на его холодном конце. Амплитуда колебаний температуры гелия в средней части регенератора оказалась равной 2,2 К.

При диаметре регенератора 26 мм минимальная длина регенератора с насадкой из ценосфер, при кото-

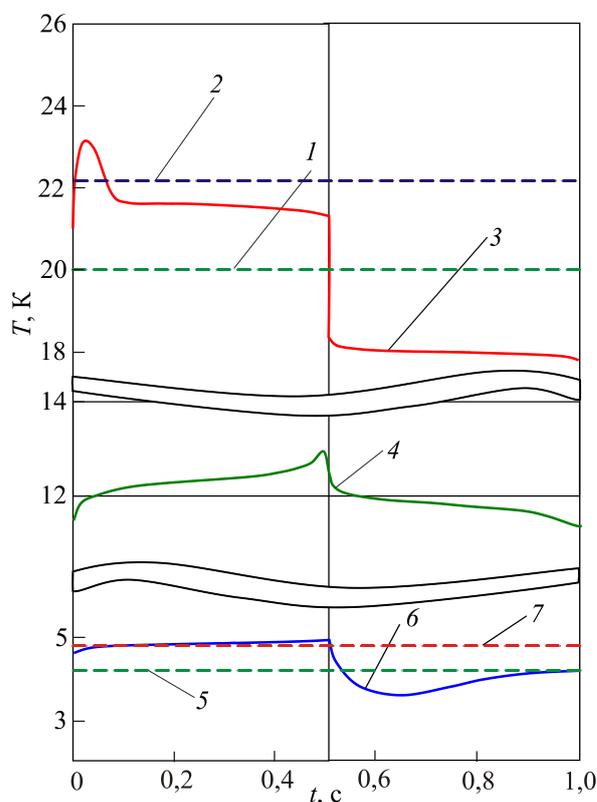


Рис. 9. (Онлайн в цвете) Изменение температуры гелия в регенераторе второй ступени за один период работы рефрижератора: температура гелия на теплом конце регенератора (1); средняя температура гелия на выходе из регенератора первой ступени (2); температура подвода тепла к первой ступени криорефрижератора (3); температура гелия в средней части регенератора (4); температура подвода тепла к второй ступени криорефрижератора (5); температура гелия на холодном конце регенератора (6); средняя температура гелия на выходе из регенератора второй ступени (7).

рой температурная недорекуперация на холодном конце будет менее 0,47 К, составляет примерно 320 мм. Это больше, чем длина регенератора в криорефрижераторе марки DE204SF, которая не превышает 110 мм.

Такое увеличение длины регенератора связано с тем, что относительная величина объема, заполненного теплоаккумулирующим гелием, в насадке из ценосфер составляет всего 43%, в то время как относительная величина объема насадки из одинаковых плотноупакованных шариков — около 74%.

Кроме этого, сравнительно большая длина регенератора с насадкой из ценосфер возможно объясняется относительно низким давлением гелия внутри ценосфер, принятым в расчетах. Это давление составляло 7 бар при температуре в средней части регенератора (12 К). Выбор такого низкого давления гелия внутри ценосфер объясняется желанием обеспечить прочность оболочки ценосфер путем внешнего ее нагружения.

Длину регенератора можно было бы уменьшить на 20–30% путем размещения на его теплом конце второй ступени слоя насадки из свинцовых шариков.

Отдельного рассмотрения заслуживает вопрос обеспечения долговечности работы регенератора с насадкой из ценосфер. В процессе ее работы может происходить износ тонких стенок ценосфер и их разрушение под действием знакопеременных нагрузок, возникающих при работе криорефрижератора.

Интерметаллические соединения редкоземельных элементов при криогенных температурах также являются чрезвычайно хрупкими материалами, и проблема прочности шариков, которые используются в качестве насадки регенераторов, существует и для них [20]. Одним из решений этой проблемы, которое рассматривается сейчас — это использование «монолитной» насадки регенератора, которая состоит из шариков, скрепленных между собой эпоксидным связующим [10].

Полученное значение длины регенератора с насадкой из ценосфер не выходит за рамки технически возможных его размеров для криорефрижераторов GM, а преимущества насадки из ценосфер могут компенсировать увеличение размеров криорефрижераторов и дополнительные гидравлические потери в таком теплообменнике.

#### 4. Выводы

На основе уравнений материального и энергетического баланса построена математическая модель двухступенчатого криорефрижератора GM, которая учитывает основные особенности работы подобных установок, в том числе влияние теплообмена гелия со стенками цилиндров и температурную недорекуперацию гелия в регенераторах.

С использованием разработанной математической модели получены исходные данные для расчета регенератора второй ступени: температуры газа на входе в теплообменник

в периоды прямого и обратного дутья, а также расход газа в периоды прямого и обратного дутья.

Расчетное значение температурной недорекуперации гелия на холодном конце регенератора получилось равным 0,47 К.

По волновой методике был проведен расчет температур газа и насадки в различных сечениях регенератора с насадкой из ценосфер, заполненных гелием.

Расчетное значение длины регенератора оказалось равным 320 мм, т.е. существенно больше, чем его длина с насадкой из интерметаллических соединений редкоземельных элементов. Полученное значение длины регенератора с насадкой из ценосфер не выходит за рамки технически возможных для криорефрижераторов GM размеров, а преимущества насадки из ценосфер могут компенсировать увеличение размеров криорефрижератора.

В настоящее время с целью существенного повышения эффективности второй ступени криорефрижератора GM разрабатывается технология получения искусственных ценосфер. На их основе можно будет создавать регенераторы с регулярной структурой насадки. После освоения технологий можно будет производить шарики с оптимальными значениями таких параметров, как диаметр и толщина стенки. Все это позволит уменьшить термодинамические потери во второй ступени криорефрижератора, повысить его холодопроизводительность и снизить температурный уровень производимого холода.

1. K.H.J. Buschow, J.F. Olijhoek, and A.R. Miedema, *Cryogenics* **5**, 261 (1975).
2. M. Li, R. Ogawa, and T. Hashimoto, *Cryogenics* **30**, 521 (1990).
3. T. Hashimoto, M. Ogawa, and R. Li, *Cryogenics* **30**, 192 (1990).
4. T. Kuriyama, M. Takahashi, H. Nakagome, T. Hashimoto, H. Nitta, and M. Yakubi, *Adv. Cryogen. Eng.* **39B**, 1335 (1994).
5. J.N. Chafe, G. Green, and P. Gifford, *Adv. Cryogen. Eng.* **37B**, 1011 (1992).
6. M. Sahashi, Y. Tokai, T. Kuriyama, H. Nakagome, R. Li, M. Ogawa, and T. Hashimoto, *Adv. Cryogen. Eng.* **35**, 1175 (1990).
7. T. Kuriyama, R. Hakamada, H. Nakagome, Y. Tokai, M. Sahashi, R. Li, O. Yoshida, K. Matsumoto and T. Hashimoto, *Adv. Cryogen. Eng.* **35**, 1261 (1990).
8. T. Numazawa, K. Kamiya, Y. Hiratsuka, et al, *Cryocoolers* **14**, 367 (2007).
9. N. Mahesh and S.A. Mohan Krishna, *Cryocoolers* **2**, 55 (2014).
10. W.R. Mérida and J.A. Barclay, *Adv. Cryog. Eng.* **43**, 1597 (1998).
11. Yana Y. Chernyh and Sergey N. Vereshchagin, *SibFU Journal Chemistry* **4**, 135 (2011).

12. М.Б. Кравченко, *Технические газы* **5**, 41 (2015).
13. В.Ј. Huang and S.C. Chang, *Cryogenics* **35**, 117 (1995).
14. М.В. Kravchenko, *Refriger. Eng. Techn.* **53**, 24 (2017).
15. М.Б. Кравченко, *Технические газы* **5**, 49 (2011).
16. М.Б. Кравченко, *Холодильная техника и технология* **3**, 63 (2012).
17. М.Б. Кравченко, *Технические газы* **6**, 20 (2014).
18. М.В. Kravchenko, *Wave Adsorption*, Saarbruecken, Lap. Lambert Academic Publishing (2014).
19. Н. Hausen, *Heat Transfer in Counterflow, Parallel Flow and Cross Flow*, McGraw-Hill. Inc. ASA (1983), p. 525.
20. К. Chowdhury and S. Sarangi, *Cryogenics* **23**, 212 (1983).
21. К. Chowdhury and S. Sarangi, *Adv. Cryog. Eng.* **33**, 273 (1988).
22. Narayanan S. Pradeep and G. Venkatarathnam, *Cryogenics* **39**, 43 (1999).
23. М.Б. Кравченко, *Технические газы* **5**, 24 (2010).
24. М.Б. Кравченко, *Технические газы* **4**, 37 (2010).
25. Ян Микусинский, *Операторное исчисление*, Изд-во иностр. лит., Москва (1956).
26. Э.М. Карташов, *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*, Высшая школа, Москва (1985).
27. А.С. Верещагин, В.Н. Зиновьев, А.Ю. Пак, И.В. Казанин, А.Ф. Фомина, В.А. Лебига, В.М. Фомин, *Вестник НГУ, Сер. Физика* (2010), т. 5, вып. 2, с. 18.
28. Y. Ikeya and R. Li, *Cryocoolers* **12**, 403 (2002).

### Характеристики криорефрижератора Гіффорда–Мак-Магона до 4 К з регенератором другого ступеня на ценосферах

Г.К. Лавренченко, М.Б. Кравченко

Розробка ефективних криорефрижераторів Гіффорда–Мак-Магона (GM), які дозволяють забезпечувати охолодження при температурі нижче 4,2 К, розглядається як важливий етап у розвитку техніки отримання гелієвих температур. В сучасних двоступеневих машинах GM забезпечується виробництво холоду на рівні 4,2 К, але з відносно невеликою продуктивністю. Основна причина — низька теплоємність матеріалу, який застосовується для насадок регенераторів других ступенів машин GM. Для створення криорефрижераторів GM на рівні 4 К вирішено дві актуальні задачі: опис нестационарних процесів теплообміну в регенераторах машин GM; визначення показ-

ників ефективного регенератора для другого ступеня машини GM на основі ценосфер, що заповнюються гелієм. Наведено порівняльний аналіз різних видів насадок регенераторів, які дозволяють отримувати температури нижче 4,2 К. Обґрунтовано переваги насадок з ценосфер, заповнених гелієм. З використанням хвильового підходу до моделювання регенератора проведено аналіз роботи двоступеневого криорефрижератора GM, що має холодопродуктивність 0,2 Вт на температурному рівні 4,2 К. Показано можливість поліпшення показників машини GM при використанні в другому її ступені регенератора, заповненого ценосферами.

Ключові слова: криорефрижератор Гіффорда–Мак-Магона, регенератор другого ступеня, насадка, ценосфери.

### Characteristics of a 4 K Gifford–McMahon cryocooler with second stage regenerator on cenospheres

G.K. Lavrenchenko and M.B. Kravchenko

Development of efficiently working Gifford-McMahon cryocoolers (GM), which allow cooling at temperatures below 4.2 K is considered as an important stage in the development of technology for obtaining helium temperatures. In modern two-stage GM machines the production of cold is provided at 4.2 K, but with a relatively low productivity. The main reason is the low heat capacity of the material, which is used for the nozzles of the regenerators of the second stages of GM machines. For the creation of GM cryocoolers at the level of 4 K two actual tasks have been solved: description of non-stationary processes of heat exchange in regenerators of GM machines; determination of the efficiency of the regenerator for the second stage of the GM machine on the basis of cenospheres filled with helium. Comparative analysis of various types of regenerator nozzles allowing to obtain temperatures below 4.2 K. The advantages of nozzles from cenospheres filled with helium are substantiated. Using the wave approach to regenerator modeling, the analysis of the operation of a two-stage GM cryocooler having a cooling capacity of 0.2 W at a temperature level of 4.2 K is carried out. It is shown that the GM machine can be improved when used in its second stage of a regenerator filled with cenospheres.

Keywords: Gifford-McMahon cryocooler, second stage regenerator, nozzle, cenospheres.