

Аналитический вывод выражений для удельной теплоемкости сверхтекучих ферми-жидкостей со спин-триплетным анизотропным p -спариванием при конечных температурах

А.Н. Тарасов

*Институт теоретической физики им. А.И. Ахиезера
Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: antarasov@kipt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 16 августа 2018 г., после переработки 21 сентября 2018 г., опубликована онлайн 25 февраля 2019 г.

Аналитические выражения для удельной теплоемкости сверхтекучих ферми-жидкостей (СФЖ) со спин-триплетным анизотропным p -спариванием типа ${}^3\text{He-A}$ получены на основе обобщенного ферми-жидкостного подхода как при низких температурах $0 < T \ll T_{c0}(n)$, так и вблизи температуры фазового перехода $T_{c0}(n)$ из нормальной в сверхтекучую фазу без учета магнитного поля. В качестве СФЖ кроме жидкого ${}^3\text{He-A}$ изучается также плотная сверхтекучая нейтронная материя (СНМ) с триплетным анизотропным p -спариванием (подобным ${}^3\text{He-A}$) при субъядерных ($n < n_0$, где $n_0 = 0,17 \text{ фм}^{-3}$ — ядерная плотность) и сверхъядерных плотностях ($n > n_0$) с учетом обобщенных сил Скирма (с дополнительными слагаемыми, зависящими от плотности n). При $0 < T \ll T_{c0}(n)$ получено асимптотическое разложение для удельной теплоемкости $C_{SNM(SFL)}(T, n)$, в котором кроме главного слагаемого $\sim T^3$ (известного для ${}^3\text{He-A}$ в пределе $T \rightarrow 0$) имеется дополнительная поправка $\sim T^5$, которая может достигать нескольких процентов от вклада главного члена в разложении теплоемкости СНМ (или СФЖ). Выведена также аналитическая формула для удельной теплоемкости $C_{SNM(SFL)}(T, n)$ при температурах вблизи $T_{c0}(n)$. Затем полученные выражения для функций $C_{SNM}(T, n)$ (справедливые для произвольной параметризации эффективного взаимодействия Скирма в нейтронной материи) конкретизированы для СНМ с обобщенной BSk21 параметризацией сил Скирма и построены графики зависимости удельной теплоемкости $C_{BSk21}(t, y)$ на интервале изменения приведенной температуры $0 < t \equiv T/T_{c0}(n) \ll 1$ и при $t \lesssim 1$ для плотной СНМ (при $0,1 \leq y \equiv n/n_0 \leq 1,7$). Эти результаты могут представлять интерес для физики нейтронных звезд в связи с проблемой их остывания (при наличии сверхтекучести нейтронов с триплетным анизотропным куперовским p -спариванием во внешней части плотных жидких ядер внутри нейтронных звезд).

Ключевые слова: сверхтекучая ферми-жидкость, спин-триплетное спаривание, ${}^3\text{He-A}$, плотная нейтронная материя, обобщенные силы Скирма, теплоемкость.

1. Введение

Эта статья, являясь продолжением цикла наших предыдущих работ [1–6] (см. также [7] и многочисленные ссылки там), наиболее тесно связана со статьей [5] (см. там более подробное Введение в предмет исследования). Здесь, как и в [5], изучены (на основе обобщенного ферми-жидкостного подхода [8–11]) равновесные свойства сверхтекучей ферми-жидкости (СФЖ) со спин-триплетным анизотропным p -спариванием типа ${}^3\text{He-A}$ [12] в отсутствие магнитного поля, $H = 0$

(в остальных работах этого цикла магнитное поле предполагалось сильным). В качестве такой СФЖ может быть не только жидкий ${}^3\text{He}$, но и плотная сверхтекучая нейтронная материя (СНМ). Заметим, что это исследование может представлять интерес в связи с изучением термодинамических свойств нейтронов, составляющих основную часть внешней части ядра (сердцевины) большинства изолированных (одиночных) нейтронных звезд, магнитные поля которых на несколько порядков меньше, чем в так называемых

магнетарах (сильно намагниченных нейтронных звездах, в которых магнитные поля могут превышать 10^{17} Гс, см. подробнее, например, в [1–4,6,13–15] и ссылки там). В качестве взаимодействия между нейтронами в СНМ выбраны в [1–6] так называемые обобщенные силы Скирма [16–18], которые содержат три слагаемых, зависящих от плотности числа частиц n нейтронной материи, в отличие от единственного слагаемого, зависящего от плотности, в обычных (традиционных) силах Скирма (которые использовались нами ранее, см., например в [7], где есть много ссылок на работы других авторов, и см. также монографию [19]). В работах [5,6] мы уже поясняли подробнее, что выбор именно обобщенных сил Скирма позволяет более последовательно учитывать эффект многочастичных (и, прежде всего, трехчастичных) сил, которые играют возрастающую роль в СНМ особенно при сверхъядерных плотностях (т.е. при $n > n_0$, где $n_0 = 0,17 \text{ фм}^{-3}$ — ядерная плотность).

Исследование удельной теплоемкости СНМ субъядерных и сверхъядерных плотностей представляет интерес в связи с изучением физики нейтронных звезд (НЗ), в которых явления сверхтекучести нуклонов оказывают важное влияние на эволюцию НЗ, на их остывание за счет излучения нейтрино из глубины плотного ядра (сердцевины) НЗ (см. подробнее, например, обзоры [20–22], книгу [23], недавние статьи [24–27] и ссылки там).

В связи с этим отметим здесь отдельно (см. также в конце Заключения из [6]) особый частный случай (который привлекает неизменный интерес специалистов на протяжении последних лет) про быстрое остывание НЗ в остатке сверхновой звезды Кассиопея А (Cas A). Это ускоренное остывание НЗ наблюдается в режиме реального времени (начиная с августа 1999 г. по настоящее время после открытия этого источника излучения орбитальной космической рентгеновской обсерваторией НАСА под названием «Чандра» и после обработки данных ее наблюдений) и связывается с существованием именно триплетной сверхтекучести нейтронов в жидком плотном внешнем слое ядра (толщиной несколько километров) внутри этой нейтронной звезды (подробнее обсуждение и возможное объяснение этого интересного с научной точки зрения явления изложено, например, в [24–27] и ссылках там на работы других авторов). То есть эта молодая НЗ (возраст около 340 лет) является реальным примером (одним из многих подобных компактных сверхплотных объектов во Вселенной), где может существовать триплетное спаривание нейтронов.

Структура настоящей статьи такова: следующий после Введения разд. 2 посвящен выводу общих формул для удельной теплоемкости СФЖ (или СНМ) со спин-триплетным анизотропным p -спариванием фермионов типа ${}^3\text{He-A}$ в отсутствие магнитного поля. В

разд. 3 содержится аналитический расчет удельной теплоемкости СФЖ (или СНМ) в низкотемпературной области (при $0 < T \ll T_{c0}(n)$) и, в частности, для СНМ с обобщенной BSk21 параметризацией сил Скирма [17] построен график функции $C_{BSk21}(T, n)$ от температуры и плотности при субъядерных и сверхъядерных плотностях (на интервале изменения $0,1 < n/n_0 < 1,7$). В разд. 4 изучаются удельные теплоемкости СФЖ (или СНМ) при температурах вблизи температуры фазового перехода $T_{c0}(n)$ в сверхтекучее состояние типа ${}^3\text{He-A}$, т.е. при $T < T_{c0}(n)$, причем $0 < |T - T_{c0}(n)| \ll T_{c0}(n)$. Для СНМ с BSk21 параметризацией сил Скирма построены соответствующие графики для удельной теплоемкости. Наконец, в Заключении обсуждаются полученные результаты и сравниваются с некоторыми известными ранее формулами других авторов.

2. Общие формулы для удельной теплоемкости СФЖ (или СНМ) с анизотропным p -спариванием фермионов

Найдем аналитическое выражение для удельной теплоемкости (единицы объема) сверхтекучей фермижидкости со спин-триплетным анизотропным p -спариванием типа ${}^3\text{He-A}$. Заметим при этом, что, так как фермионы СФЖ сильно вырождены, то теплоемкости при постоянном объеме и давлении почти совпадают (как известно [28,29], при низких температурах в пределе $T \rightarrow 0$ разность $C_p - C_v \sim T^{2n+1}$, если энтропия $S \sim T^n$). Поэтому в дальнейшем мы не будем для теплоемкости СФЖ (или СНМ) использовать индексы «V» или «P». Будем исходить из общей формулы

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T}, \quad (1)$$

где S — удельная энтропия СФЖ, которая выражается известной комбинаторной формулой [29,30]:

$$S = - \sum_{p\sigma} \{ (1 - f_p) \ln(1 - f_p) + f_p \ln f_p \}. \quad (2)$$

Здесь σ — спиновые индексы и

$$f_p(z) = (\exp(z) + 1)^{-1}, \quad z = \frac{E(\mathbf{p})}{T}. \quad (3)$$

Из (1) с учетом (2) и (3) следует, что

$$C = T \sum_{p\sigma} z \frac{\partial f_p(z)}{\partial T} = \sum_{p\sigma} E(\mathbf{p}) \frac{\partial f_p \left(\frac{E(\mathbf{p})}{T} \right)}{\partial T}. \quad (4)$$

В случае СФЖ с триплетным анизотропным p -спариванием типа ${}^3\text{He-A}$ при $H = 0$ (т.е. в отсутствие магнитного поля) и при $v_n = v_s = 0$ (т.е. при отсутствии макроскопического течения нормальной и сверхтекучей компонент СФЖ) энергетический спектр имеет следующий вид (см., например, [12], а также наши статьи [5,10,11]):

$$E(\mathbf{p}; T) = \sqrt{\Delta_{\mathbf{p}} \cdot \Delta_{\mathbf{p}}^* + \xi_p^2} = \sqrt{\Delta_0^2(T) \cdot \sin^2 \theta + (\varepsilon(p) - \mu(T))^2} \approx \sqrt{\Delta_0^2(T) \cdot \sin^2 \theta + (\varepsilon(p) - \varepsilon_F(n))^2}. \quad (5)$$

Здесь $\Delta_0(T)$ — амплитуда (т.е. max значение) щели в анизотропном энергетическом спектре квазичастиц в СФЖ, θ — угол между импульсом \mathbf{p} квазичастицы и осью квантования, т.е. направлением $[\mathbf{m}, \mathbf{n}]$ в орбитальном пространстве. В связи с этим отметим, что в $^3\text{He-A}$ (при $H = 0$) параметр порядка имеет следующий вид [12]:

$$\Delta_{\alpha}^A(\mathbf{p}, T) \equiv \Delta_0(T) \hat{\mathbf{d}}_{\alpha} \psi(\mathbf{p}), \quad (6)$$

$$\psi(\hat{\mathbf{p}}) \equiv (\hat{m}_j + i\hat{n}_j) \hat{p}_j, \quad \hat{\mathbf{p}} \equiv \frac{\mathbf{p}}{p}.$$

Здесь $\hat{\mathbf{m}}^2 = \hat{\mathbf{n}}^2 = 1$, $\hat{\mathbf{m}} \perp \hat{\mathbf{n}}$ — единичные взаимно ортогональные векторы в орбитальном пространстве, $\hat{\mathbf{d}}$ — единичный вектор в спиновом пространстве.

В случае пространственно-однородной плотной сверхтекучей нейтронной материи со спариванием нейтронов типа $^3\text{He-A}$ энергетический спектр квазичастиц (5) в обозначениях нашей статьи [5] (см. в [5] формулу (4) и текст после формулы (7)) имеет вид

$$E(p; T) = \sqrt{|\Delta_p|^2 + \xi_p^2} \approx \sqrt{G_F^2(T, n; a) \cdot \sin^2 \theta + (\varepsilon(p) - \varepsilon_F(n))^2}. \quad (7)$$

Здесь n — плотность СНМ, $a(n) = E_c / \varepsilon_F(n) < 1$ — параметр обрезания, который вводим (см. также [5]), чтобы исключить «нефизическую» расходимость интегралов, которая возникает из-за резкого возрастания отталкивания частиц (нейтронов) на малых расстояниях (причем точное поведение взаимодействия нейтронов на малых расстояниях в настоящее время не известно).

Теперь, учитывая, что в случае спаривания фермионов типа $^3\text{He-A}$ явный вид функции $E(\mathbf{p}; T)$ определяется формулой (5) (для СФЖ) или (7) (для СНМ), получим из (4) и (3) следующее общее выражение для удельной теплоемкости СФЖ (или СНМ):

$$C(T) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{\mathbf{p}\sigma} E(\mathbf{p}; T) \cdot \left(\frac{E(\mathbf{p}; T)}{T} - \frac{\partial E(\mathbf{p}; T)}{\partial T} \right) \frac{e^z}{(e^z + 1)^2}, \quad (8)$$

где $z = E(\mathbf{p}; T)/T$. Заметим здесь, что в случае СФЖ (или СНМ) функция $E(\mathbf{p}; T)$ зависит от температуры T и плотности n не только через посредство зависимости от химического потенциала $\mu(T, n) \approx \varepsilon_F(n)$ (как это имеет место в нормальной фазе ферми-жидкости), но и через посредство зависимости $E(\mathbf{p}; T)$ от амплитуды щели $\Delta_0(T)$ из (5) для СФЖ (или $G_F(T, n; a)$ из (7) в случае СНМ).

В общем выражении (8) для $C(T, n)$ величину температуры T мы пока не конкретизировали. Поэтому рассмотрим ниже отдельно два случая: 1) случай низких температур, когда $0 < T \ll T_{c0}(n)$ (где $T_{c0}(n)$ — температура фазового перехода из нормального в сверхтекучее состояние типа $^3\text{He-A}$, индекс 0 означает в данном случае, что $H = 0$); 2) случай температур, близких к $T_{c0}(n)$, т.е. при $|T - T_{c0}(n)| \ll T_{c0}(n)$, $T < T_{c0}(n)$. Изучению этих двух случаев посвящены следующие два раздела.

3. Аналитический расчет удельной теплоемкости СНМ (или СФЖ) с анизотропным p -спариванием типа $^3\text{He-A}$ в низкотемпературной области, $T \ll T_{c0}(n)$

Теперь, исходя из общей формулы (8), найдем выражение для удельной теплоемкости $C(T, n)$ для СНМ (или СФЖ), справедливое в области низких температур, при $0 < T \ll T_{c0}(n)$. В этом случае нам необходимо знать явную зависимость амплитуды щели $\Delta_0(T)$ для СФЖ или явный вид функции $G_F(T, n; a)$ для СНМ при $0 < T \ll T_{c0}(n)$. Для определенности рассмотрим ниже случай СНМ и при этом используем полученную нами ранее зависимость амплитуды щели $G_F(T, y; a)$ (где $y \equiv n/n_0$ — приведенная плотность СНМ, $n_0 = 0,17 \text{ фм}^{-3}$ — ядерная плотность), зависящую от температуры согласно следующей формуле (см. (20) из [5]):

$$G_F(T, y; a) \approx G_F(0, y; a) \left\{ 1 - 16 \left(\frac{T}{G_F(T, y; a)} \right)^4 \times \left[1 + 8 \left(\frac{T}{G_F(T, y; a)} \right)^2 \right] \right\} \lesssim G_F(0, y; a) \left\{ 1 - 16 \left(\frac{T}{G_F(0, y; a)} \right)^4 \left[1 + 8 \left(\frac{T}{G_F(0, y; a)} \right)^2 \right] \right\}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что при $0 < T \ll T_{c0}(n) \ll \varepsilon_F(n)$:

$$\frac{\partial G_F(T, y; a)}{\partial T} \approx -64 \cdot \frac{T^3}{G_F^3(0, y; a)}. \quad (10)$$

С учетом этой формулы получим из (7), что в рассматриваемой здесь низкотемпературной области справедливо приближенное соотношение:

$$-\frac{\partial E(\mathbf{p}; T)}{\partial T} \approx 64 \cdot \frac{T^3}{G_F^3(0, y; a)} \cdot \frac{G_F(T, y; a)}{E(\mathbf{p}; T)} \cdot \sin^2 \theta. \quad (11)$$

Здесь $0 < T \ll T_{c0}(n)$, причем $T_{c0}(n) < G_F(0, y; a)$. Действительно, согласно формуле (23) из нашей статьи [5], справедливо следующее общее соотношение для СНМ (и для СФЖ) с триплетным анизотропным p -спариванием типа $^3\text{He-A}$:

$$\frac{G_F(0, y; a)}{T_{c0}(y; a)} \approx \frac{\pi}{2\gamma} \exp\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\pi}{2} \exp\left(\frac{5}{6} - C\right) \approx 2,02931921, \quad (12)$$

где $C = 0,5772156649\dots$ — постоянная Эйлера и $\gamma = e^C \approx 1,781072418$, см. [31,32]. Это «универсальное» отношение не зависит ни от плотности $n \equiv y \cdot n_0$, ни от величины параметра обрезания $0 < a(n) = E_c/\varepsilon_F(n) < 1$, ни от типа взаимодействия между ферми-частицами в СНМ (СФЖ).

Теперь из (7) и (11) с учетом (12) следует, что при малых температурах ($0 < T \ll T_{c0}(n)$) справедливы следующие неравенства:

$$\frac{E(\mathbf{p}; T)}{T} \gg -\frac{\partial E(\mathbf{p}; T)}{\partial T} > 0 \quad (13)$$

и поэтому из общей формулы (8) в этом случае получим следующее приближенное выражение для удельной теплоемкости СНМ (или СФЖ) с p -спариванием типа $^3\text{He-A}$:

$$C(T, n) \approx \frac{1}{4T^2} \cdot \sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{E^2(\mathbf{p}; T)}{\text{ch}^2\left(\frac{E(\mathbf{p}; T)}{2T}\right)}, \quad (14)$$

(где $E(\mathbf{p}; T)$ вида (7) для СНМ или (5) для СФЖ).

Перейдем теперь в формуле (14) от суммирования по импульсам \mathbf{p} и проекциям σ спина ($s = 1/2$) к интегрированию согласно формуле:

$$\sum_{\mathbf{p}\sigma} \dots \rightarrow 2 \cdot \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \dots = \frac{v(y)}{2} \cdot \int_{-E_c}^{E_c} d\xi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \dots, \quad (15)$$

где

$$v_F(y) = \frac{m^*(y)p_F(y)}{\pi^2\hbar^3}, \quad (y = n/n_0)$$

представляет собой плотность состояний на поверхности Ферми с учетом двух проекций спина фермиона (нейтрона для СНМ или атома $^3\text{He-A}$, если в качестве СФЖ рассматривать ^3He); в (15) также входит интегрирование по переменной

$$\xi = \varepsilon(p) - \varepsilon_F(n) = p^2/2m^*(n) - \varepsilon_F(n).$$

Таким образом, из (14) с учетом (15) имеем (для единичного объема, $V = 1$), что

$$C(T, n) \approx \frac{1}{4T^2} \cdot \frac{v_F(y)}{2} \cdot \int_{-E_c}^{E_c} d\xi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{E^2(\mathbf{p}; T)}{\text{ch}^2\left(\frac{E(\mathbf{p}; T)}{2T}\right)} \equiv \frac{1}{4T^2} \cdot \frac{v_F(y)}{2} \cdot J(T). \quad (16)$$

Здесь $E_c = \max(\varepsilon(p) - \varepsilon_F(n))$ — энергия обрезания (см. замечание после формулы (7)), для которой в случае СНМ с силами Скирма мы выбрали ранее в [5] для определенности значение $E_c = 10$ (МэВ) $< \varepsilon_F(n)$. Однако здесь в формуле (16) мы можем с достаточно большой точностью заменить E_c на ∞ , так как $\text{ch}^{-2}\left(\frac{E(\mathbf{p}; T)}{2T}\right)$ является быстро убывающей функцией своего аргумента. Ввиду сказанного, можем теперь записать выражение для двойного интеграла $J(T)$ для СНМ (и аналогично для СФЖ с учетом (5)) в низкотемпературной области (при $0 < T \ll T_{c0}(n)$) в следующем приближенном виде (см. также (7) для $E(\mathbf{p}; T)$):

$$J(T) \approx 4G_F^3(0) \cdot (J_1(T) + J_2(T)), \quad (17)$$

где

$$J_1(T) + J_2(T) \equiv \int_0^\infty dy y^2 \int_0^1 dx \frac{1}{\text{ch}^2[A(T) \cdot \sqrt{y^2 + 1 - x^2}]} + \int_0^\infty dy \int_0^1 dx \frac{1 - x^2}{\text{ch}^2[A(T) \cdot \sqrt{y^2 + 1 - x^2}]}. \quad (18)$$

В формуле (17) мы учли также, что при $0 < T \ll T_{c0}(n)$ функция $G_F(T, y; a)$ слабо зависит от температуры (см. формулу (9) выше) и поэтому заменили ее значением $G_F(0)$ в пределе $T = 0$ (зависимость G_F от приведенной плотности $y \equiv n/n_0$ и от параметра обрезания $0 < a(n) = E_c/\varepsilon_F(n) < 1$ мы для сокращения записи формул опустили). В (18) введена функция $A(T)$ вида

$$A(T) \equiv \frac{G_F(0)}{2T} \gg \frac{G_F(0)}{2T_{c0}(n)} \gtrsim 1 \quad (19)$$

(при этом принято во внимание, что $0 < T \ll T_{c0}(n)$, в последнем неравенстве учтена формула (12)).

Заметим теперь, что с помощью математических преобразований сумму двойных интегралов (18) можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}
 J_1(T) + J_2(T) &= \int_0^\infty dy \frac{y^2}{\text{ch}^2[A(T) \cdot y]} + \frac{2}{A^2(T)} \cdot \int_0^\infty dy \sqrt{1+y^2} \int_{A(T) \cdot y}^{A(T) \cdot \sqrt{1+y^2}} dz z \sqrt{1 - \frac{z^2}{A^2(T) \cdot (1+y^2)}} \cdot \frac{1-z \cdot \text{th} z}{\text{ch}^2 z} = \\
 &= \frac{1}{A^4(T)} \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} \int_{A(T) \cdot y}^{A(T) \cdot \sqrt{1+y^2}} dz \frac{z^3}{\text{ch}^2 z} + \frac{1}{2A^6(T)} \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^{3/2}} \int_{A(T) \cdot y}^{A(T) \cdot \sqrt{1+y^2}} dz \frac{z^5}{\text{ch}^2 z} + \frac{3}{8A^8(T)} \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^{5/2}} \int_{A(T) \cdot y}^{A(T) \cdot \sqrt{1+y^2}} dz \frac{z^7}{\text{ch}^2 z} + \dots
 \end{aligned} \tag{20}$$

(подчеркнем, что здесь в (20) знаки равенства точные). Однако в силу того, что при $0 < T \ll T_{c0}(n)$ функция $A(T) \gg 1$ (см. (19)), учтем ниже только два первых слагаемых с двойными интегралами в правой части асимптотического разложения (20) по степеням $1/A(T)$, а третье слагаемое приведено здесь для справок.

Таким образом, учитывая сказанное, получим в результате математических расчетов для суммы интегралов $J_1(T) + J_2(T)$ (при $0 < T \ll T_{c0}(n)$) асимптотическое разложение вида

$$\begin{aligned}
 J_1(T) + J_2(T) &\approx \frac{1}{A^5(T)} \cdot \left[3 \cdot \frac{7\zeta(4)}{8} + \frac{1}{A^2(T)} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{31\zeta(6)}{32} \right] = \\
 &= \frac{1}{A^5(T)} \cdot \left[\frac{7\pi^4}{240} + \frac{1}{A^2(T)} \cdot \frac{31\pi^6}{64 \cdot 63} \right].
 \end{aligned} \tag{21}$$

Заметим, что согласно таблице 23.3 из [32] имеем, что

$$\frac{7\zeta(4)}{8} \approx 0,9470328295, \quad \frac{31\zeta(6)}{32} \approx 0,9855510913. \tag{22}$$

Подставляя теперь асимптотическое разложение (21) в (17), получим из (16) следующее искомое приближенное выражение для удельной теплоемкости СНМ (и аналогичное выражение для СФЖ) с анизотропным p -спариванием типа $^3\text{He-A}$ при $0 < T \ll T_{c0}(n)$:

$$\begin{aligned}
 C_{SNM(SFL)}(T, y) &\approx \\
 &\approx 2 \cdot v_F(y) \cdot \frac{(2T)^3}{G_F^2(0)} \cdot \left[\frac{7\pi^4}{240} + \frac{4T^2}{G_F^2(0)} \cdot \frac{31\pi^6}{64 \cdot 63} \right] = \\
 &= C_N(T, y) \cdot \frac{7\pi^2}{5} \cdot \left(\frac{T}{G_F(0)} \right)^2 \cdot \left[1 + \frac{155 \cdot \pi^2}{147} \cdot \left(\frac{T}{G_F(0)} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь $C_N(T, y)$ — удельная (ед. объема) теплоемкость нормальной (несверхтекучей) ферми-жидкости, которая имеет, как хорошо известно [29,33], следующий вид (здесь $y \equiv n/n_0$ — приведенная плотность)

$$C_N(T, y) = \frac{m^*(y) \cdot p_F(y)}{3\hbar^3} T = \frac{\pi^2 \cdot v_F(y)}{3} T. \tag{24}$$

Заметим, что если температуру T выражать не в энергетических единицах, а в градусах Кельвина, то формулу (24) нужно умножить на k_B^2 . Для СНМ температуру T удобнее выражать в МэВ, а размерность плотности состояний $[v_F(y)] = [\text{МэВ}^{-1} \cdot \text{фм}^{-3}]$, и в этом случае нужно умножить формулу (24) на постоянную Больцмана $k_B \approx 8,617343 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ} \cdot \text{К}^{-1}$ (см. [34]) и тогда удельная теплоемкость СНМ будет выражаться в $\text{МэВ} \cdot \text{фм}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}$.

Подчеркнем, что полученная нами формула (23) для удельной теплоемкости является общей для СНМ (или СФЖ) со спариванием типа $^3\text{He-A}$ при $0 < T \ll T_{c0}(n)$. То есть формула (23) справедлива в том числе и для сверхпроводников с необычным p -спариванием типа $^3\text{He-A}$ (ср., например, с [35]).

Обычно для $C(T)$ в $^3\text{He-A}$ используется выражение вида (см., гл. 3 в [12]):

$$C_{^3\text{He-A}}(T) = C_N(T) \frac{7\pi^2}{5} \left(\frac{T}{\Delta_0} \right)^2 \tag{25}$$

(см. также теоретическую работу [36] Андерсона и Морела, где впервые была приведена формула для теплоемкости СФЖ $C(T) \sim T^3$ в пределе $T \rightarrow 0$ для анизотропного p -спаривания типа $^3\text{He-A}$). В отличие от (25) в полученной нами формуле (23) содержится малая по величине дополнительная поправка, которая при $t \equiv T/T_{c0}(n) \ll 1$ имеет вид (учтем здесь «универсальное» отношение (12))

$$\frac{155 \cdot \pi^2}{147} \cdot \frac{t^2}{(2,02931921)^2} \ll 1 \tag{26}$$

и, как легко видеть, может в области ее применимости (при $0 < t \ll 1$) вносить дополнительный вклад в удельную теплоемкость СФЖ типа $^3\text{He-A}$, достигающий нескольких % по сравнению с традиционной формулой (25), которая фактически справедлива лишь в пределе $T \rightarrow 0$.

Чтобы построить трехмерный график для удельной теплоемкости СНМ вида (23) ($0 < t \ll 1$) как функции от безразмерных переменных: приведенной температуры t и приведенной плотности $y \equiv n/n_0$ (где $n_0 = 0,17 \text{ фм}^{-3}$ — ядерная плотность), выберем для определенности обобщенную BSk21 параметризацию [17] сил Скирма в СНМ. В этом случае плотность со-

стояний на поверхности Ферми $v_{F,BSk21}(y)$ имеет следующий явный вид (см. формулу (28) из [6]):

$$v_{F,BSk21}(y) = \frac{3n_0 y}{2\varepsilon_{F,BSk21}(y)} \approx \frac{0,004187088 y^{1/3}}{1 + y(3,97930 y^{1/12} + 0,0422618 \sqrt{y} - 3,89571)} \text{ (МэВ} \cdot \text{фм}^3 \text{)} \quad (27)$$

Температура фазового перехода из нормальной фазы в сверхтекучую (типа $^3\text{He-A}$) для СНМ с BSk21 силами Скирма имеет вид (см. (35) из [5])

$$T_{c0,BSk21}(E_c; y) \approx \frac{2\gamma}{\pi} \cdot E_c \exp \left[\frac{3}{16} \left(\frac{E_c}{\varepsilon_{F,BSk21}(y)} \right)^2 + \frac{3}{512} \left(\frac{E_c}{\varepsilon_{F,BSk21}(y)} \right)^4 \right] \times \exp \left[\frac{1 + y \cdot (3,97930 y^{1/12} + 0,0422618 \sqrt{y} - 3,89571)}{y \cdot (2,65286 y^{1/12} - 2,85028)} \right], \quad (28)$$

а для уточненного выражения энергии Ферми $\varepsilon_{F,BSk21}(y)$ имеем формулу (см. (25) из [6]):

$$\varepsilon_{F,BSk21}(y) \approx y^{2/3} [1 + y(3,97930 y^{1/12} + 0,0422618 \sqrt{y} - 3,89571)] \cdot 60,90152 \text{ (МэВ)}. \quad (29)$$

Для определенности выберем здесь (как и в [4–6]) энергию обрезания $E_c = 10$ МэВ (так, что $E_c < \varepsilon_{F,BSk21}(y)$ в плотной СНМ субъядерных и сверхъядерных плотностей при $0,1 < y$). Теперь запишем нашу формулу (23) для $C_{SNM}(t, y)$ в безразмерных переменных $t \equiv T/T_{c0}(n)$ и $y \equiv n/n_0$ в следующем виде (с учетом «универсального» отношения (12) и дополнительной поправки в виде (26)):

$$C_{BSk21}(t, y) \approx v_{F,BSk21}(y) \cdot T_{c0,BSk21}(10; y) \times \frac{t^3}{(2,02931921)^2} \cdot \frac{7\pi^4}{15} \cdot \left[1 + \frac{155 \cdot \pi^2}{147} \cdot \frac{t^2}{(2,02931921)^2} \right]. \quad (30)$$

Заметим, что от конкретного вида взаимодействия (BSk21 [17], или BSk24, или др., см. [18]) зависят в этой формуле только $v_{F,SNM}(y)$ (МэВ $^{-1}$ ·фм $^{-3}$) и $T_{c0,SNM}(10; y)$ (МэВ), остальные же безразмерные множители в (30) сохраняют свой вид для любых других взаимодействий между фермионами в СНМ (или в СФЖ) с энергетическим спектром вида (7) (или (5)) типа $^3\text{He-A}$.

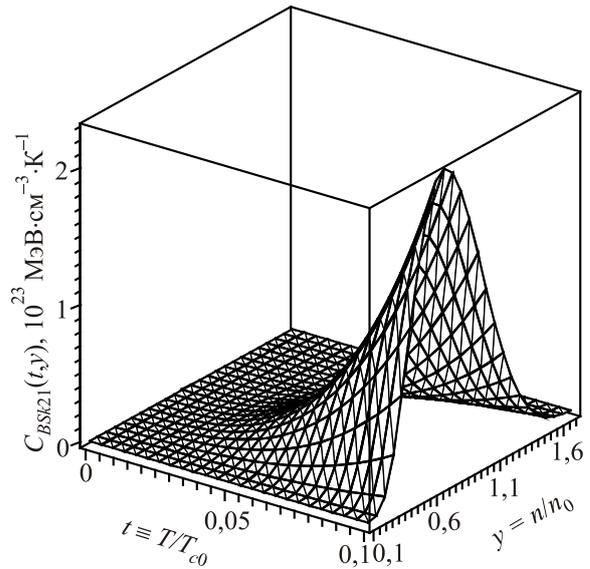


Рис. 1. Функция $C_{BSk21}(t, y)$ (30), зависящая от приведенных температуры $t \equiv T/T_{c0}$ (при $0 < t \leq 0,1$) и плотности $y \equiv n/n_0$, для плотной СНМ с обобщенными BSk21 силами Скирма.

Таким образом, теперь для наглядности, исходя из (30), построим трехмерный график (см. рис. 1) для функции $C_{BSk21}(t, y)$ (при $0 < t \leq 0,1$ и $0,1 \leq y \leq 1,7$). При этом выразим удельную теплоемкость СНМ в более «привычных» для физики конденсированных сред единицах измерения, а именно в МэВ·см $^{-3}$ ·К $^{-1}$ (см. также замечание после (24)).

4. Удельная теплоемкость СНМ (или СФЖ) с анизотропным p -спариванием типа $^3\text{He-A}$ вблизи $T_{c0}(n)$

Рассмотрим случай температур T близких к $T_{c0}(n)$, когда $|T - T_{c0}(n)| \ll T_{c0}(n)$ (в отсутствие магнитного поля, $H = 0$). В этом случае для СНМ (или СФЖ) с анизотропным триплетным p -спариванием типа $^3\text{He-A}$ щель $G_F(T, n)$ в энергетическом спектре (7) (или см. (5)) имеет следующий приближенный вид (см. (28) в нашей статье [5]):

$$G_F(T, n) \approx T \sqrt{\frac{10\pi^2}{7\zeta(3)} \ln \left(\frac{T_{c0}(n)}{T} \right)}, \quad (31)$$

где $\sqrt{\frac{10\pi^2}{7\zeta(3)}} \approx 3,4248$. Заметим, что в общую формулу (8) для удельной теплоемкости входит производная $\frac{\partial E(\mathbf{p}; T)}{\partial T}$, для которой из (7) (ср. также (5)) получим (при $H = 0$ и $v_n = v_s = 0$) с учетом (31), что при $|T - T_{c0}(n)| \ll T_{c0}(n)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\mathbf{p}; T)}{\partial T} &= \frac{\sin^2 \theta}{E(\mathbf{p}; T)} G_F(T, n) \frac{\partial G_F(T, n)}{\partial T} \approx \\ &\approx \frac{\sin^2 \theta}{E(\mathbf{p}; T)} \left[\frac{G_F^2(T, n)}{T} - \frac{5\pi^2}{7\zeta(3)} T \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Поэтому имеем (см. (8)):

$$\begin{aligned} \frac{E(\mathbf{p}; T)}{T} \cdot \left(\frac{E(\mathbf{p}; T)}{T} - \frac{\partial E(\mathbf{p}; T)}{\partial T} \right) &\approx \\ \approx \frac{1}{T^2} \cdot (E^2(\mathbf{p}; T) - \sin^2 \theta \cdot G_F^2(T, n)) + \sin^2 \theta \cdot \frac{5\pi^2}{7\zeta(3)} &= \\ = \frac{\xi_p^2}{T^2} + \sin^2 \theta \cdot \frac{5\pi^2}{7\zeta(3)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Теперь подставим это выражение (33) в (8) и получим для удельной теплоемкости СНМ (или СФЖ) с триплетным анизотропным p -спариванием типа $^3\text{He-A}$ при $|T - T_{c0}(n)| \ll T_{c0}(n)$ следующее приближенное выражение:

$$\begin{aligned} C(T, n) &\approx \frac{1}{4T^2} \sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{\xi_p^2}{\text{ch}^2\left(\frac{E(\mathbf{p}; T)}{2T}\right)} + \\ &+ \frac{1}{4} \cdot \frac{5\pi^2}{7\zeta(3)} \sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{\sin^2 \theta}{\text{ch}^2\left(\frac{E(\mathbf{p}; T)}{2T}\right)} \end{aligned} \quad (34)$$

(ср. это выражение с формулой (14) при $0 < T \ll T_{c0}(n)$). Учтем далее формулу (15) и тогда из (34) получим (для единичного объема, $V = 1$):

$$\begin{aligned} C(T, n) &\approx \frac{1}{4T^2} \cdot \frac{v_F(y)}{2} \int_{-E_c}^{E_c} d\xi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{\xi^2}{\text{ch}^2\left(\frac{E(\mathbf{p}; T)}{2T}\right)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5\pi^2}{7\zeta(3)} \cdot \frac{v_F(y)}{2} \int_{-E_c}^{E_c} d\xi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{\sin^2 \theta}{\text{ch}^2\left(\frac{E(\mathbf{p}; T)}{2T}\right)} \equiv \\ &\equiv \frac{v_F(y)}{8} \cdot \left[\frac{1}{T^2} \cdot I_1(T) + \frac{5\pi^2}{7\zeta(3)} \cdot I_2(T) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

(ср. это выражение с формулой (16) для $C(T, n)$ при $0 < T \ll T_{c0}(n)$).

Рассуждая далее аналогично выводу формул (17), (18), получим, что двойные интегралы I_1 и I_2 приобретают следующий приближенный вид (с достаточно большой точностью из-за быстрого убывания подынтегральной функции $\text{ch}^{-2}\left(\frac{E(\mathbf{p}; T)}{2T}\right)$ с ростом ее аргумента):

$$\begin{aligned} I_1(T, y) &\equiv \int_{-E_c}^{E_c} d\xi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{\xi^2}{\text{ch}^2\left(\frac{E(\mathbf{p}; T)}{2T}\right)} \approx \\ &\approx 4 \int_0^\infty d\xi \int_0^1 dx \frac{\xi^2}{\text{ch}^2\left[\frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 + G_F^2(T, y) \cdot (1-x^2)}}\right]}, \quad (36) \\ I_2(T, y) &\equiv \int_{-E_c}^{E_c} d\xi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{\sin^2 \theta}{\text{ch}^2\left(\frac{E(\mathbf{p}; T)}{2T}\right)} \approx \\ &\approx 4 \cdot \int_0^\infty d\xi \int_0^1 dx \frac{1-x^2}{\text{ch}^2\left[\frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 + G_F^2(T, y) \cdot (1-x^2)}}\right]}. \quad (37) \end{aligned}$$

Здесь $T < T_{c0}(y)$, но близко к $T_{c0}(y)$, т.е. $|T - T_{c0}(y)| \ll \ll T_{c0}(y)$ (где $y \equiv n/n_0$). Заметим, что

$$\lim_{T \rightarrow T_{c0}(y)} G_F(T, y; a) = 0$$

и поэтому из формул (36), (37) следует в пределе $T \rightarrow T_{c0}(y)$, что

$$I_1(T_{c0}(y), y) = \frac{8\pi^2}{3} T_{c0}^3(y), \quad (38)$$

$$I_2(T_{c0}(y), y) = \frac{16}{3} T_{c0}(y). \quad (39)$$

Подставим теперь полученные формулы (38) и (39) в (35) и получим для удельной теплоемкости $C_{SNM}(T, y)$ в пределе $T \rightarrow T_{c0}(y)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} C_{SNM}(T_{c0}, y) &\equiv \lim_{T \rightarrow T_{c0}(y)} C_{SNM}(T, y) \approx \\ &\approx C_N(T_{c0}(y)) \left(1 + \frac{10}{7\zeta(3)} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

где $C_N(T)$ имеет вид (24). И, следовательно,

$$\frac{C_{SNM} - C_N}{C_N} \Big|_{T=T_{c0}} \approx \frac{10}{7\zeta(3)} \approx 1,188439104. \quad (41)$$

Точно такие же выражения (40) и (41) справедливы, как известно (см., например, гл. 3 в [12]), и для СФЖ с

триплетным анизотропным p -спариванием типа $^3\text{He-A}$ (см. выше (5) для $E(\mathbf{p};T)$).

Таким образом, формулы (40) и (41) являются общими и не зависят от типа взаимодействия между фермионами СФЖ (или в СНМ), а являются следствием только вида куперовского спаривания, а именно типа $^3\text{He-A}$ в данном случае со спектром (5) (или (7) для СНМ). Общее соотношение (41) описывает скачок, который испытывает удельная теплоемкость $C(T, y)$ ферми-жидкости при фазовом переходе из нормальной фазы в сверхтекучую (СФЖ или в СНМ) со спариванием типа $^3\text{He-A}$ при температуре $T = T_{c0}(y)$.

Заметим, что двойные интегралы $I_1(T, n)$ и $I_2(T, n)$ (см. (36) и (37)) легко преобразовать к виду

$$I_1(T, y) = 4G_F^3(T, n) \cdot \int_0^\infty dy y^2 \int_0^1 dx \frac{1}{\text{ch}^2[A(T, n) \cdot \sqrt{y^2 + 1 - x^2}]} \equiv 4G_F^3(T, n) \cdot J_1(T, n), \quad (42)$$

$$I_2(T, y) = 4G_F(T, n) \cdot \int_0^\infty dy \int_0^1 dx \frac{1 - x^2}{\text{ch}^2[A(T, n) \cdot \sqrt{y^2 + 1 - x^2}]} \equiv 4G_F(T, n) \cdot J_2(T, n), \quad (43)$$

где интегралы $J_1(T, n)$ и $J_2(T, n)$ имеют такую же структуру, как и в (18). Но здесь функция $G_F(T, n)$ имеет явный вид (31) и, как и ранее (см. (19)), введена функция $A(T, n)$ вида

$$A(T, n) \equiv \frac{G_F(T, n)}{2T} \gtrsim \frac{G_F(T, n)}{2T_{c0}(n)} < 1, \quad (44)$$

которая, однако, теперь мала по величине при $|T - T_{c0}(n)| \ll T_{c0}(n)$ в отличие от формулы (19), в которой $A(T) \equiv \frac{G_F(0)}{2T} \gg 1$ для случая $T \ll T_{c0}(n)$ (который рассмотрен в разд. 3).

Подставим (42) и (43) в формулу (35) и получим следующее искомое выражение для удельной теплоемкости СНМ (или СФЖ) с триплетным анизотропным спариванием типа $^3\text{He-A}$ при $|T - T_{c0}(n)| \ll T_{c0}(n)$:

$$C_{SNM(SFL)}(T, n) \approx \frac{\nu_F(n)}{2} \cdot G_F(T, n) \times \left[\frac{G_F^2(T, n)}{T^2} \cdot J_1(T, n) + \frac{5\pi^2}{7\zeta(3)} \cdot J_2(T, n) \right]. \quad (45)$$

Найдем теперь аналитическую формулу для отношения удельных теплоемкостей $C_{SNM(SFL)}(T, n)$ и $C_N(T, n)$, которые имеют вид (45) и (24) и, учитывая приближенную формулу (31) для $G_F(T, n)$, получим в итоге следующее выражение для этого отношения при $|T - T_{c0}(n)| \ll T_{c0}(n)$:

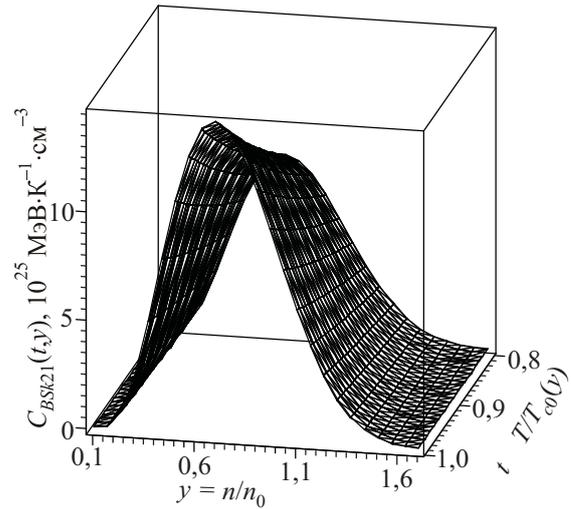


Рис. 2. Функция $C_{BSk21}(t, y)$ (см. (45) с учетом (27)–(29) при $E_c = 10$ МэВ и (31)) для плотной СНМ (при $0,1 \leq y \equiv n/n_0 \leq 1,7$) с обобщенной BSk21 параметризацией сил Сфирма (при $t \equiv T/T_{c0} \lesssim 1$).

$$\frac{C_{SNM(SFL)}(T, n)}{C_N(T, n)} \approx \frac{3\pi}{2} \cdot \left(\frac{10}{7\zeta(3)} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{1}{t}\right)} \times \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right) \cdot J_1(T, n) + \frac{1}{2} \cdot J_2(T, n) \right], \quad (46)$$

где $t \equiv T/T_{c0}(n) \lesssim 1$. Можно показать, что это отношение удельных теплоемкостей СНМ (или СФЖ) типа $^3\text{He-A}$ и нормальной ферми-жидкости в пределе $T \rightarrow T_{c0}(n)$ согласуется с формулой (40), т.е.

$$\lim_{T \rightarrow T_{c0}(y)} \frac{C_{SNM(SFL)}(T, n)}{C_N(T, n)} = 1 + \frac{10}{7\zeta(3)} \approx 2,188439104. \quad (47)$$

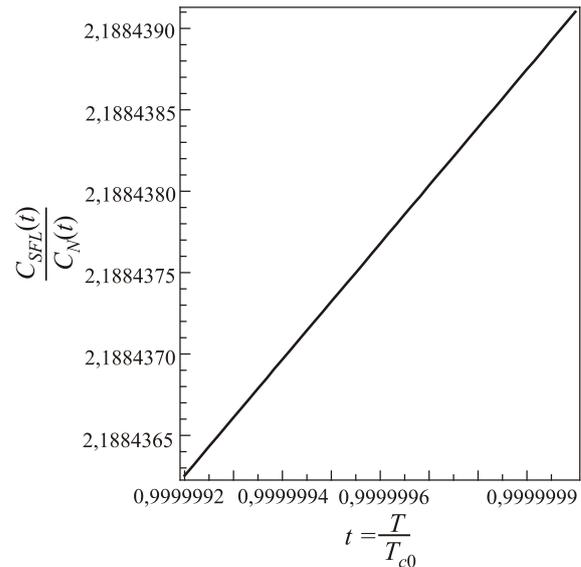


Рис. 3. «Универсальное» отношение теплоемкостей $C_{SNM(SFL)}(T, n)$ и $C_N(t, n)$ (см. (46)) при $t \lesssim 1$.

На рис. 2, на котором построен трехмерный график для удельной теплоемкости $C_{SNM,BSk21}(t,n)$ (см. (45) с учетом (27)–(29) при $E_c = 10$ МэВ и (31)) для случая СНМ с обобщенной BSk21 параметризацией сил Скирма. На рис. 3 см. график для «универсального» отношения теплоемкостей $C_{SNM(SFL)}(T,n)$ и $C_N(t,n)$ (см. (46)) при $t \lesssim 1$. На рис. 3 видно, что отношение (46) теплоемкостей в пределе $T \rightarrow T_{c0}(n)$ совпадает с (47).

5. Заключение

Получены аналитические формулы (23) и (45) для удельной теплоемкости СНМ (или СФЖ) с триплетным анизотропным p -спариванием типа ${}^3\text{He-A}$, которые справедливы при температурах $0 < T \ll T_{c0}(n)$ и $|T - T_{c0}(n)| \ll T_{c0}(n)$ соответственно. Подчеркнем, что характер зависимости удельной теплоемкости от температуры T в сверхтекучей фазе (при $0 < T < T_{c0}(n)$) оказался не зависящим от типа взаимодействия между фермионами (для нейтронов в СНМ не зависит от параметризации сил Скирма, а для атомов ${}^3\text{He}$ в случае сверхтекучего ${}^3\text{He-A}$ или для электронов в случае сверхпроводников с необычным анизотропным куперовским спариванием типа ${}^3\text{He-A}$ не зависит от конкретного вида межчастичного взаимодействия). То есть степенная температурная зависимость (в отличие от экспоненциальной температурной зависимости в случае синглетного s -спаривания электронов в традиционных сверхпроводниках) удельной теплоемкости СФЖ (или СНМ) определяется типом необычного анизотропного куперовского спаривания фермионов при $0 \leq T \leq T_{c0}(n)$.

Вместе с тем зависимость удельной теплоемкости $C_{SNM(SFL)}(T,n)$ от плотности числа частиц n существенно различается для разных СФЖ (или, например, для СНМ с разными параметризациями сил Скирма) и определяется параметрами взаимодействия, от которых зависит и $v_F(n)$ (см. (27) для СНМ с BSk21 силами Скирма) и функция $G_F(T,n)$, представляющая собой щель в энергетическом спектре (7) (или см. (5)). В (9), (12) и (31) для $G_F(T,n)$ при $0 \leq T \ll T_{c0}(n)$ и при $|T - T_{c0}(n)| \ll T_{c0}(n)$ соответственно, $T_{c0}(n)$ зависит от взаимодействия (подробнее см., например, рис. 2–7 из нашей статьи [5]).

Отметим также, что полученная формула (23) для удельной теплоемкости СНМ (или СФЖ) содержит дополнительную поправку $\sim T^5$ (см. (26)), которая может достигать по величине нескольких % по сравнению с главным слагаемым $\sim T^3$ вида (25) в интервале изменения температуры $0 < T \ll T_{c0}(n)$ (см. также после (25) ссылку на знаменитую теоретическую статью [36] Андерсона и Морела, опубликованную задолго до экспериментального открытия ${}^3\text{He-A}$ и других сверхтекучих фаз жидкого ${}^3\text{He}$).

Полученная дополнительная поправка (26) приводит, например, в физике нейтронных звезд к уточнению для функции $R_C(T)$, которая введена в обзоре [20] (посвященном теоретическому описанию процесса остывания нейтронных звезд и сверхтекучести в их ядрах). Эта функция $R_C(T)$ характеризует изменение теплоемкости нейтронов (во внешней части жидкого ядра нейтронной звезды, плотность которого изменяется от субъядерных до сверхъядерных величин) под действием их триплетной сверхтекучести с анизотропным энергетическим спектром как в ${}^3\text{He-A}$ (7) по сравнению с теплоемкостью нормальных (несверхтекучих) нейтронов, а именно (в наших обозначениях):

$$\frac{C_{SNM}(T)}{C_N(T)} \equiv R_C(T). \quad (48)$$

Причем, согласно [20], $R_C(T_{c0}) \approx 2,188$ (ср. с (47)), а при $t \equiv T/T_{c0} \ll 1$ функция $R_C(t)$ имеет приближенный вид ((17) из обзора [20])

$$R_C(t) \approx 3,353 \cdot t^2, \quad (49)$$

который справедлив фактически в пределе $t \rightarrow 0$ и является следствием формул (25) и (12). С учетом нашей поправки (26) эта формула (49) приобретает теперь следующий уточненный вид (при $0 < t \ll 1$):

$$R_C(t) \approx \frac{7\pi^2}{5} \cdot \frac{t^2}{(2,02931921)^2} \cdot \left[1 + \frac{155\pi^2}{147} \cdot \frac{t^2}{(2,02931921)^2} \right]. \quad (50)$$

1. A.N. Tarasov, *J. Phys.: Conf. Ser.* **400**, 032101 (2012) [LT26]; [arXiv:nucl-th/1301.5528].
2. A.N. Tarasov, *Ukr. J. Phys.* **58**, 611 (2013).
3. A.N. Tarasov, Plenary talk in: *Proc. Int. School-Seminar, New Physics and Quantum Chromodynamics at External Conditions (NPQCD-013), May 22–24, 2013, Dnipropetrovsk, Ukraine*, p. 25.
4. A.N. Tarasov, *Europhys. Lett.* **105**, 52001 (2014).
5. A.N. Tarasov, *Fiz. Nizk. Temp.* **42**, 222 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 169 (2016)].
6. А.Н. Тарасов, *ФНТ* **44**, 368 (2018) [*Low Temp. Phys.* **44**, 278 (2018)].
7. A.N. Tarasov, *Cent. Eur. J. Phys.* **9**, 1057 (2011).
8. А.И. Ахиезер, В.В. Красильников, С.В. Пелетминский, А.А. Яценко, *УФН* **163**, 1 (1993).
9. А.И. Ахиезер, В.В. Красильников, С.В. Пелетминский, and А.А. Yatsenko, *Phys. Rep.* **245**, 1 (1994).
10. А.Н. Тарасов, *ФНТ* **24**, 429 (1998) [*Low Temp. Phys.* **24**, 324 (1998)].
11. А.Н. Тарасов, *ФНТ* **26**, 1059 (2000) [*Low Temp. Phys.* **26**, 785 (2000)].
12. D. Vollhardt and P. Wölfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, Taylor and Francis, London (1990).

13. S. Mereghetti, J.A. Pons, and A. Melatos, *Magnetars: Properties, origin and evolution*, arXiv:astro-ph.HE/1503.06313.
14. M. Sinha and A. Sedrakian, *Phys. Rev. C* **91**, 035805 (2015).
15. A. Sedrakian, X.-G. Huang, M. Sinha, and J.W. Clark, *J. Phys.: Conf. Ser.* **861**, 012025 (2017) [arXiv:astro-ph.HE/1701.00895].
16. N. Chamel, S. Goriely, and J.M. Pearson, *Phys. Rev. C* **80**, 065804 (2009).
17. S. Goriely, N. Chamel, and J.M. Pearson, *Phys. Rev. C* **82**, 035804 (2010).
18. S. Goriely, N. Chamel, and J.M. Pearson, *Phys. Rev. C* **88**, 024308 (2013).
19. В.М. Коломиец, Ядерная ферми-жидкость, Наукова Думка, Киев (2009).
20. Д.Г. Яковлев, К.П. Левенфиш, Ю.А. Шибанов, *УФН* **169**, 825 (1999) [*Phys. Usp.* **42**, 737 (1999)].
21. D.G. Yakovlev, A.D. Kaminker, O.Y. Gnedin, and P. Haensel, *Phys. Rep.* **354**, 1 (2001) [arXiv:astro-ph/0012122v1].
22. D.G. Yakovlev, and C.J.Pethick, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **42**, 169 (2004); [arXiv:astro-ph/0402143v1].
23. P. Haensel, A.Y. Potekhin, and D.G. Yakovlev, *Neutron Stars 1. Equation of State and Structure*, Springer, New York (2007).
24. П.С. Штернин, Д.Г. Яковлев, *УФН* **182**, 1006 (2012) [*Phys.-Usp.* **55**, 935 (2012)].
25. D.D. Ofengeim, M. Fortin, P. Haensel, D.G. Yakovlev, and J.L. Zdunik, *Neutrino Luminosities and Heat Capacities of Neutron Stars in Analytic Form*, arXiv:astro-ph.HE/1708.08272v1.
26. D. Page, M. Prakash, J.M. Lattimer, and A.W. Steiner, *Stellar Superfluids*, in: *Novel Superfluids*, K.H. Bennemann and J.B. Ketterson (eds.), Oxford University Press, Oxford (2014), Vol. 2, p. 505 [arXiv:astro-ph.HE/1302.6626].
27. W.C.G. Ho, K.G. Elshamouty, C.O. Heinke, and A. Potekhin, *Phys. Rev. C* **91**, 015806 (2015).
28. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч.1 (Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 5), Наука, Москва (1976).
29. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2: *Теория конденсированного состояния* (Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 9), Наука, Москва (1978).
30. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, *Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов*, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2006).
31. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*, Наука, Москва (1977).
32. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.) Наука, Москва (1979).
33. Д. Пайнс, Ф. Нозьер, *Теория квантовых жидкостей. Нормальные ферми-жидкости*, МИР, Москва (1967).
34. K. Nakamura *et al.* (Particle Data Group), *J. Phys. G* **37**, 075021 (2010).
35. В.П. Минеев, К.В. Самохин, *Введение в теорию необычной сверхпроводимости*, Изд-во МФТИ, Москва (1998); [V.P. Mineev and K.V. Samokhin, *Introduction to Unconventional Superconductivity*, Gordon and Breach Science Publishers (1999)].
36. P.W. Anderson and P. Morel, *Phys. Rev.* **123**, 1911 (1961).

Аналітичне виведення виразів для питомої теплоємності надплинних фермі-рідин зі спін-триплетним анізотропним p -спарюванням при скінченних температурах

О.М. Тарасов

Аналітичні вирази для питомої теплоємності надплинних фермі-рідин (НФР) зі спін-триплетним анізотропним p -спарюванням типу ${}^3\text{He-A}$ отримано на основі узагальненого фермі-рідинного підходу як при низьких температурах $0 < T \ll T_{c0}(n)$, так і поблизу температури фазового переходу $T_{c0}(n)$ з нормальної у надплинну фазу без урахування магнітного поля. В якості НФР окрім рідкого ${}^3\text{He-A}$ вивчається також густа надплинна нейтронна матерія (ННМ) з триплетним анізотропним p -спарюванням (подібним до ${}^3\text{He-A}$) при суб'ядерних ($n < n_0$, де $n_0 = 0,17 \text{ фм}^{-3}$ — ядерна густина) і над'ядерних густинах ($n > n_0$) з урахуванням узагальнених сил Скірма (з додатковими доданками, що залежать від густини n). При $0 < T \ll T_{c0}(n)$ отримано асимптотичне розкладення для питомої теплоємності $C_{SNM}(SFL)(T, n)$, в якому окрім головного доданку $\sim T^3$ (відомого для ${}^3\text{He-A}$ при $T \rightarrow 0$) є додаткова поправка $\sim T^5$, яка може сягати декількох процентів від внеску головного члена в розкладенні теплоємності ННМ (або НФР). Виведено також аналітичну формулу для питомої теплоємності $C_{SNM}(SFL)(T, n)$ при температурах поблизу $T_{c0}(n)$. Далі отримані вирази для функцій $C_{SNM}(T, n)$ (що справедливі для довільної параметризації ефективної взаємодії Скірма у нейтронній матерії) конкретизовано для ННМ з узагальненою BSk21 параметризацією сил Скірма та побудовано графіки залежності питомої теплоємності $C_{BSk21}(t, y)$ на інтервалі змінення приведеної температури $0 < t \equiv T/T_{c0}(n) \ll 1$ і при $t \lesssim 1$ для густої ННМ (при $0,1 \leq y \equiv n/n_0 \leq 1,7$). Ці результати можуть становити інтерес для фізики нейтронних зірок у зв'язку з проблемою їх остигання (при наявності надплинності нейтронів з триплетним анізотропним куперівським p -спарюванням у зовнішній частині густих рідких ядер всередині нейтронних зірок).

Ключові слова: надплинна фермі-рідина, спін-триплетне спарювання, ${}^3\text{He-A}$, густа нейтронна матерія, узагальнені сили Скірма, питома теплоємність.

Analytical calculation of specific heat for superfluid Fermi liquids with spin-triplet anisotropic p -wave pairing at finite temperatures

A.N. Tarasov

The analytical expressions for specific heat of superfluid Fermi liquids (SFL) with spin-triplet anisotropic p -wave pairing of the ${}^3\text{He-A}$ type are derived within the framework of generalized Fermi-liquid approach at low temperatures $0 < T \ll T_{c0}(n)$ as well as near phase transition temperature $T_{c0}(n)$ from normal to superfluid phase in the limit of zero magnetic field. Besides superfluid ${}^3\text{He-A}$, we study also dense superfluid neutron matter (SNM) with anisotropic spin-triplet p -wave pairing (similar to ${}^3\text{He-A}$) at subnuclear ($n < n_0$, where $n_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$ is nuclear density) and supranuclear densities ($n > n_0$) taking into account generalized Skyrme forces (with additional terms dependent on density n). At low finite temperatures ($0 < T \ll T_{c0}(n)$) we have obtained the asymptotic expansion for the specific heat

$C_{SNM(SFL)}(T, n)$ for SNM (or SFL) which consists of two terms:

the first one is the main term which is proportional to T^3 (it is known for the ${}^3\text{He-A}$ in the limit $T \rightarrow 0$) and the second is additional term which behaves as T^5 and may attain several percent of the main term. The analytical formula was derived also for specific heat $C_{SNM(SFL)}(T, n)$ at temperatures near $T_{c0}(n)$. The obtained functions $C_{SNM}(T, n)$ (valid for arbitrary parametrization of the effective Skyrme interaction in neutron matter) are specified then for SNM with generalized BSk21 parametrization of the Skyrme forces and figures are plotted at subnuclear and supranuclear densities on the interval $0.1 < n/n_0 < 1.7$ at low temperatures $0 < T \ll T_{c0}(n)$ and in the vicinity of the $T_{c0}(n)$. These results may be interesting for the physics of neutron stars in relation with the problem of their cooling (due to existence of neutrons with spin-triplet anisotropic p -wave pairing inside dense liquid outer cores of NSs).

Keywords: superfluid Fermi liquid, spin-triplet pairing, ${}^3\text{He-A}$, dense neutron matter, generalized Skyrme forces, specific heat.