PACS: 02.10.De, 02.40.Hw, 03.30.+p

С.В. Терехов

ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИПЕРПРОСТРАНСТВА. I. ОБОБЩЕННАЯ СИСТЕМА СЕРРЕ–ФРЕНЕ. ФИЗИЧЕСКИЙ ИЗОМОРФИЗМ КВАТЕРНИОННОЙ АЛГЕБРЫ ГАМИЛЬТОНА

Статья поступила в редакцию 5 мая 2014 года

Исследована система дифференциальных уравнений первого порядка Серре–Френе с учетом возможности поворота тройки базисных векторов вокруг вектора бинормали. Показано, что пренебрежение одной из геометрических характеристик (кривизной, кручением или поворотом) пространственной кривой приводит к осциллирующему характеру поведения соответствующего базисного вектора подвижной системы отсчета. Указано на необходимость различать геометрическую структуру траектории движения и физические свойства материальной частицы. Предложена модификация гиперкомплексной алгебры Гамильтона, отображающая поведение релятивистских объектов.

Ключевые слова: экстремаль, кривизна, кручение, кватернион, интервал между событиями

Досліджено систему диференціальних рівнянь першого порядку Серре–Френе з урахуванням можливості повороту трійки базисних векторів навколо вектору бінормалі. Показано, що зневага однією з геометричних характеристик (кривизною, крученням або поворотом) просторової кривої призводить до осцилюючого характеру поведінки відповідного базисного вектору рухливої системи відліку. Вказано на необхідність розрізняти геометричну структуру траєкторії руху й фізичні властивості матеріальної частки. Запропоновано модифікацію гіперкомплексної алгебри Гамільтона, що відображає поведінку релятивістських об'єктів.

Ключові слова: екстремаль, кривизна, кручення, кватерніон, інтервал між подіями

1. Введение

В специализированных областях физики накоплен достаточно обширный массив теоретических и экспериментальных данных о различных физических явлениях и процессах. В частности, исследования нелинейных динамических и неравновесных термодинамических систем продемонстрировали существование универсальных закономерностей [1–4]. Поэтому моделиро-

© С.В. Терехов, 2015

вание общих характеристик масштабных уровней структурирования природы требует адекватного математического аппарата, позволяющего описывать разнообразные системы и процессы самоорганизации в них.

Одним из подходов к решению этой проблемы является применение гиперкомплексного исчисления Гамильтона [5–8], финслеровой [9] и фрактальной [10,11] геометрии, а также других алгебраических и геометрических построений. Например, в работах [12–16] продемонстрирована возможность применения классических гиперструктур и псевдокватернионов к описанию электромагнитного поля и необратимых кинетических процессов. Однако построение последовательной физической теории гиперпространства с учетом результатов ранее предложенных теоретических построений требует поиска такого изоморфизма алгебры Гамильтона, который отображал бы всю совокупность данных.

Широкое использование теории гиперкомплексных функций сдерживается отсутствием дифференциального и интегрального исчислений кватернионов (например, правила вычисления гиперпроизводной от произведения двух и более кватернионов, теории дифференциальных гипероператоров, вычисления неопределенных интегралов от гиперкомплексных функций и т.д.). Сложности в развитии теории связаны с некоммутативностью, неассоциативностью и изменением произведения гиперфункций при взятии операции комплексного сопряжения. Эти особенности алгебры кватернионов приводят, в частности, к необходимости вывода правила вычисления гиперпроизводной от произведения двух кватернионов.

Выбор материальным миром определенной алгебры и геометрии указывает на необходимость проведения анализа геометрических и физических характеристик физического гиперпространства с учетом теоремы Гельмгольца [17,18] на основе системы дифференциальных уравнений первого порядка типа Серре–Френе [19] для базисных кватернионов с единичной нормой. Это позволит выяснить роль геометрии экстремали (траектории движения частицы в пространственно-временном континууме) в формировании физических свойств материальной точки.

2. Тройка базисных векторов пространственной кривой

Скалярные, векторные и тензорные поля формируют в пространстве потенциальный рельеф, по которому происходит движение материальных объектов. Его топографическая карта изображается в виде эквипотенциальных линий (трансверсалей [20], рис. 1). В евклидовом пространстве траектория движения точки (экстремаль, рис. 1) является линией, на которой действие достигает экстремального значения. Касательные векторы к экстремали (касательный орт) и трансверсали (орт бинормали) определяют касательную плоскость к пространственной кривой. Вектор, перпендикулярный к касательной плоскости и направленный в сторону вогнутости экстремальной кривой, называют нормалью. Сформулируем и докажем теорему о тройке векторов $\mathbf{A}(A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B}(B_1, B_2, B_3)$ и $\mathbf{C}(C_1, C_2, C_3)$ (где A_i, B_i, C_i (i = 1, 2, 3) –

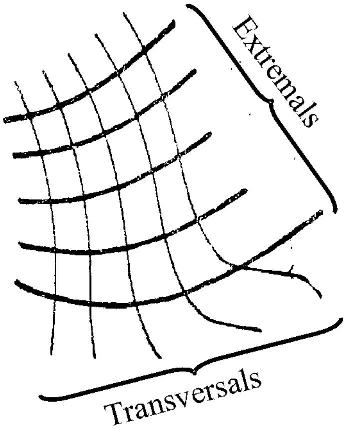

Рис. 1. Экстремали и трансверсали механического движения

проекции соответствующих векторов на координатную ось i) на пространственной линии с естественной параметризацией, т.е. зависящих, например, от длины пространственной линии s.

Теорема 1. Пусть векторы $\mathbf{A}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ и $\mathbf{C}(s)$ зависят от естественного параметра s и удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}s} = K_1\mathbf{B} - K_2\mathbf{C} \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = K_3\mathbf{C} - K_1\mathbf{A} \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{C}}{\mathrm{d}s} = K_2\mathbf{A} - K_3\mathbf{B} \end{cases}, \qquad (1)$$

где K_i (i = 1, 2, 3) – постоянные действительные числа. Тогда:

а) система дифференциальных уравнений первого порядка (1) является системой Серре–Френе [3, с. 84; 19, с. 23–36; 21, с. 190–191] при нулевом значении параметра K_2;

б) приращения векторов $\mathbf{A}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ и $\mathbf{C}(s)$ удовлетворяют соотношению

$$K_3\mathrm{d}\mathbf{A} + K_2\mathrm{d}\mathbf{B} + K_1\mathrm{d}\mathbf{C} = 0; \qquad (2)$$

в) любая тройка взаимно перпендикулярных векторов ($\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{C}$ и $\mathbf{C} \perp \mathbf{A}$) является решением системы (1);

г) если базисный вектор не входит в соотношение (2) (например, для вектора $\mathbf{A}$ число $K_3 = 0$), то этот вектор по параметру s определяется решением уравнения осцилляторного типа;

д) если один из векторов $\mathbf{A}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ и $\mathbf{C}(s)$ выбрать в качестве основного, то другие векторы этой тройки можно выразить через основной вектор, его первую и вторую производные по параметру s;

е) если любые два параметра в системе (1) равны нулю (например, $K_1 = K_2 = 0$), то один из векторов не зависит от параметра s (в примере – вектор $\mathbf{A}(s)$), а два других вектора ($\mathbf{B}(s)$ и $\mathbf{C}(s)$) базисной тройки подчиняются уравнению осцилляторного типа.

Доказательство. 1. Система уравнений (1) совпадает по виду с системой Серре–Френе при значении параметра $K_2 = 0$, если векторы $\mathbf{A}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ и $\mathbf{C}(s)$ являются ортами касательной $\boldsymbol{\tau}$, нормали $\mathbf{n}$ и бинормали $\mathbf{b}$ кривой s в заданной точке (рис. 2), т.е. образуют подвижную систему отсчета. Число K_1 ($K_1 = R_1^{-1}$, R_1 – радиус сферы, которая имеет с линией одну общую точку) в модели Серре–Френе задает кривизну пространственной линии, а параметр K_3 – ее кручение, т.е. вращение касательной плоскости $\mathbf{C}O\mathbf{A}$ вокруг вектора $\mathbf{A}$. Следовательно, параметр K_2 определяет второе кручение (поворот) линии при вращении плоскости $\mathbf{C}O\mathbf{A}$ вокруг вектора бинормали $\mathbf{C}$. Пренебрежение

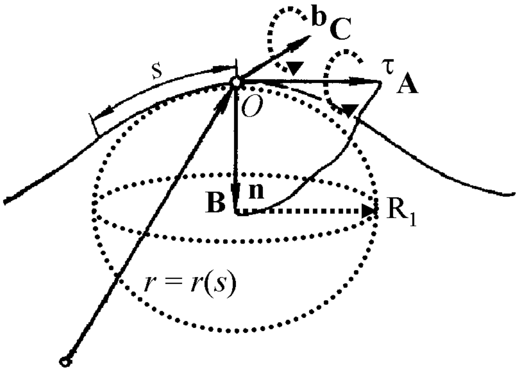

Рис. 2. Тройка подвижных векторов пространственной линии

вращением касательной плоскости вокруг вектора **C** (параметр $K_2 = 0$) приводит к коллинеарности векторов $\frac{d\mathbf{A}}{ds}$ и $\frac{d\mathbf{C}}{ds}$, что является необязательным условием. Другими словами, система уравнений Серре–Френе не определяет тройку базисных векторов единственным образом в отличие от системы (1).

2. Умножим первое равенство системы (1) на множитель K_3ds, второе – на K_2ds, а третье – на K_1ds, затем сложим полученные уравнения и придем к соотношению (2).

3. Так как векторы $\mathbf{A}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ и $\mathbf{C}(s)$ взаимно перпендикулярны, то их можно связать между собой векторными произведениями $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$; $\mathbf{B} = [\mathbf{C} \times \mathbf{A}]$;

$$\mathbf{C}=\left[\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=\left(A_2B_3-A_3B_2\right)\mathbf{i}+\left(A_3B_1-A_1B_3\right)\mathbf{j}+\left(A_1B_2-A_2B_1\right)\mathbf{k}\,. \quad (3)$$

Здесь **i**, **j** и **k** – орты декартовой системы координат, причем векторное произведение некоммутативно, т.е.

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = -[\mathbf{B} \times \mathbf{A}]. \quad (4)$$

Дифференцируя векторные произведения по параметру s, учитывая уравнения системы (1) и равенство (4), получим

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}}{ds}&=\left[\frac{d\mathbf{B}}{ds}\times\mathbf{C}\right]+\left[\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{ds}\right]=-K_1\left[\mathbf{A}\times\mathbf{C}\right]+K_2\left[\mathbf{B}\times\mathbf{A}\right]=K_1\mathbf{B}-K_2\mathbf{C};\\ \frac{d\mathbf{B}}{ds}&=\left[\frac{d\mathbf{C}}{ds}\times\mathbf{A}\right]+\left[\mathbf{C}\times\frac{d\mathbf{A}}{ds}\right]=-K_3\left[\mathbf{B}\times\mathbf{A}\right]+K_1\left[\mathbf{C}\times\mathbf{B}\right]=K_3\mathbf{C}-K_2\mathbf{A}; \quad (5)\\ \frac{d\mathbf{C}}{ds}&=\left[\frac{d\mathbf{A}}{ds}\times\mathbf{B}\right]+\left[\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{ds}\right]=-K_2\left[\mathbf{C}\times\mathbf{B}\right]+K_3\left[\mathbf{A}\times\mathbf{C}\right]=K_2\mathbf{A}-K_3\mathbf{B}.\end{aligned}$$

4. Продифференцируем первое уравнение системы (1) по параметру s и с учетом двух других равенств этой системы найдем

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\mathbf{A}}{ds^2}=-\left(K_1^2+K_2^2\right)\mathbf{A}+K_2K_3\mathbf{B}+K_1K_3\mathbf{C}\\ \dfrac{d\mathbf{A}}{ds}=K_1\mathbf{B}-K_2\mathbf{C}\end{cases}. \quad (6)$$

Пусть базисный вектор $\mathbf{A}(s)$ не входит в соотношение (2), тогда параметр $K_3 = 0$. Из первого уравнения системы (6) видно, что при обнулении параметра K_3 основной вектор $\mathbf{A}$ будет удовлетворять уравнению осцилляторного типа

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{A}}{\mathrm{d}s^2} + \omega_{10}^2\mathbf{A} = 0\,, \tag{7}$$

где частота колебаний $\omega_{10} = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$.

5. Общее решение системы (6) относительно векторов $\mathbf{B}(s)$ и $\mathbf{C}(s)$ ($K_3 \neq 0$) имеет вид (в качестве основного вектора базисной тройки выбран вектор $\mathbf{A}(s)$)

$$\mathbf{B} = \frac{K_2}{K_3\omega^2}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{A}}{\mathrm{d}s^2} + \frac{K_1}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}s} + \frac{K_2}{K_3}\mathbf{A}\,, \tag{8}$$

$$\mathbf{C} = \frac{K_1}{K_3\omega^2}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{A}}{\mathrm{d}s^2} - \frac{K_2}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}s} + \frac{K_1}{K_3}\mathbf{A}\,. \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) показывают, что для введения системы отсчета на пространственной линии необходимо и достаточно знать естественную параметризацию одного вектора из базисной тройки. При выполнении равенств

$$\frac{K_2}{K_3}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{A}}{\mathrm{d}s^2} + K_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{10}$$

или

$$\frac{K_1}{K_3}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{A}}{\mathrm{d}s^2} - K_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{11}$$

происходит вырождение пространственной кривой в плоскую линию. Одновременное соблюдение условий (10) и (11) приводит к одномерному движению вдоль прямой, так как векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ будут коллинеарными с вектором $\mathbf{A}$ и сонаправленными с ним. Это возможно только тогда, когда базисные векторы не зависят от параметра s.

6. Пусть, например, параметры K_1 и K_2 равны нулю, тогда вектор $\mathbf{A}$ не зависит от параметра s ($\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}s = 0$), а векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ не связаны с вектором $\mathbf{A}$. В этом случае вектор $\mathbf{A}$ сохраняет постоянное значение, а векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ осциллируют вдоль пространственной линии с частотой $\omega = K_3$ согласно пункту 4.

Изменение базисных векторов при смещении точки вдоль заданной пространственной кривой в зависимости от значений геометрических факторов указывает на необходимость разделять геометрические особенности траектории движения и физические свойства частицы. Для описания перемещения материальной частицы в пространственно-временном континууме введем в рассмотрение гиперкомплексные структуры, алгебра которых изоморфна алгебре Гамильтона.

3. Кватернионы Гамильтона–Гиббса

Рассмотрим гиперкомплексные структуры (кватернионы) вида

$$A = a + A_1 i + A_2 j + A_3 k ,$$

где a, A_n (n = 1, 2, 3) – действительные числа. Исследуем изоморфизм алгебры Гамильтона, когда комплексные единицы i, j, k подчиняются правилам умножения, приведенным в таблице (более общий случай алгебры Клиффорда рассмотрен в работе [14]). Отметим, что обход чисел i, j, k осуществляется против часовой стрелки, т.е. они образуют левую упорядоченную тройку чисел (рис. 3,*б*).

Таблица

Правила умножения комплексных единиц

	i	j	k
i	1	$-k$	j
j	k	1	$-j$
k	$-j$	i	1

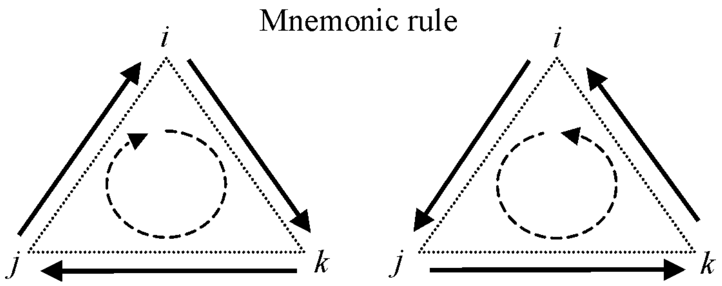

Рис. 3. Правая (*а*) и левая (*б*) упорядоченные тройки чисел

В векторной алгебре Гиббса такому правилу соответствует выбор левой тройки базисных векторов, поэтому запишем левоориентированные кватернионы Гамильтона–Гиббса в скалярно-векторной форме:

$$A = a + \gamma\mathbf{A} , \qquad (12)$$

где a = Sc(A) – скалярная, $\mathbf{A}$ = Ve(A) – векторная части кватерниона A, γ – его «цвет» (γ^2 = 1). Комплексно-сопряженным кватернионом называется гиперкомплексная структура вида

$$A^* = a - \gamma\mathbf{A} . \qquad (13)$$

Отметим, что выражение (13) можно получить из (12) также путем замены вектора $\mathbf{A}$ на противоположный ему вектор $-\mathbf{A}$, поэтому комплексно-сопряженный кватернион (13) будем называть зеркальным по векторной составляющей к кватерниону (12). Вещественно-сопряженный (или зеркальный по скалярной компоненте) кватернион ${}^*A = -a + \gamma\mathbf{A} = -A^*$ отличается от комплексно-сопряженного кватерниона (13) только знаком. Кватернион вида $O = 0 + \gamma\mathbf{0}$ назовем нулевым, а кватернион $E = 1 + \gamma\mathbf{0}$ – единичным ($\mathbf{0}$ – нуль-вектор). Две гиперкомплексные структуры $A = a + \gamma\mathbf{A}$ и $B = b + \gamma\mathbf{B}$ равны между собой, если $\begin{cases} a = b \\ \mathbf{A} = \mathbf{B} \end{cases}$.

Для гиперструктур вида (12) выполняются все арифметические действия:

1. Сумма (разность) кватернионов $A = a + \gamma\mathbf{A}$ и $B = b + \gamma\mathbf{B}$ равна

$$C = c + \gamma\mathbf{C} = A \pm B = a \pm b + \gamma(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}),$$

следовательно, $A + A^* = A - {}^*A = 2a = 2\mathrm{Sc}(A)$, $A - A^* = A + {}^*A = 2\gamma\mathbf{A} = 2\gamma\mathrm{Ve}(A)$. Если выполняется равенство $A - B = O$, то векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ сонаправленные ($\mathbf{A} \uparrow\uparrow \mathbf{B}$) и имеют одинаковую длину ($|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$), а при выполнении равенства $A - B^* = O$ равные по длине векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ направлены в противоположные стороны ($\mathbf{A} \uparrow\downarrow \mathbf{B}$), т.е. для обоих равенств векторные части кватернионов являются коллинеарными ($\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$). В общем случае такие векторы связаны между собой соотношением $\mathbf{B} = \beta\mathbf{A}$, причем $\begin{cases} \mathbf{A} \uparrow\uparrow \mathbf{B}, & \beta > 0 \\ \mathbf{A} \uparrow\downarrow \mathbf{B}, & \beta < 0 \end{cases}$ [18], поэтому кватернионы, удовлетворяющие равенству $B = \beta A$, будем называть пропорциональными.

2. Произведение кватернионов $A = a + \gamma\mathbf{A}$ и $B = b + \gamma\mathbf{B}$ зависит от порядка следования сомножителей и равно:

$$\begin{aligned} &\text{левое } D_1 = d_1 + \gamma\mathbf{D}_1 = BA = (b + \gamma\mathbf{B})(a + \gamma\mathbf{A}) = ab + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \gamma\{a\mathbf{B} + b\mathbf{A} - [\mathbf{B}\times\mathbf{A}]\}, \\ &\text{правое } D_2 = d_2 + \gamma\mathbf{D}_2 = AB = (a + \gamma\mathbf{A})(b + \gamma\mathbf{B}) = ab + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \gamma\{a\mathbf{B} + b\mathbf{A} - [\mathbf{A}\times\mathbf{B}]\}. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом правила (4) левое и правое произведения кватернионов A и B отличаются друг от друга только знаком в последнем слагаемом. Отметим, что произведение векторных частей кватернионов A и B выполняется по правилу

$$\gamma\mathbf{A}\gamma\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - \gamma[\mathbf{A}\times\mathbf{B}], \quad (15)$$

где первое слагаемое задает скалярное (коммутативное)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3, \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}, \quad (16)$$

а второе – векторное (некоммутативное) произведение векторных частей кватернионов A и B (см. (3) и (4)). Используя правило (14), легко проверить, что произведение $AE = EA = A$. Произведение гиперкомплексных структур $A = a + \gamma\mathbf{A}$ и $B = b + \gamma\mathbf{B}$ равно единичному кватерниону при выполнении условий $AB = E: \begin{cases} ab + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 1 \\ a\mathbf{B} + b\mathbf{A} - [\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = 0 \end{cases}$. Второе равенство этой системы (в силу того, что вектор $[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$) выполняется только тогда, когда векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ связаны между собой условием коллинеарности $a\mathbf{B} + b\mathbf{A} = 0$ или выполняются равенства $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$.

Произведение комплексно-сопряженных гиперструктур (12) и (13) равно квадрату нормы кватерниона A

$$AA^* = A^*A = a^2 - |\mathbf{A}|^2 = \|A\|^2. \tag{17}$$

Если квадрат нормы положителен ($\|A\|^2 > 0$, норма кватерниона вещественна), то кватернион будем называть скаляроподобным, в противном случае ($\|A\|^2 < 0$, норма кватерниона является комплексной величиной) – вектороподобным. Кватернион с нулевой нормой ($\|A\| = 0$) назовем изохронным.

Теорема 2. Пусть дан неизохронный кватернион $A = a + \gamma\mathbf{A}$, причем модули его скалярной и векторной частей $\begin{cases} a \neq 0 \\ |\mathbf{A}| \neq 0 \end{cases}$. Если его норма вещественна, то вектор **A** имеет ограниченную длину.

Доказательство. Согласно определению (17) вещественная норма кватерниона $A = a + \gamma\mathbf{A}$ равна $\|A\| = \sqrt{a^2 - |\mathbf{A}|^2} = |a|\sqrt{1 - \left(\frac{|\mathbf{A}|}{a}\right)^2} > 0$. Так как кватернион A скаляроподобный, выражение, стоящее под квадратным корнем, положительно. Следовательно, $|\mathbf{A}| < |a|$, т.е. модуль векторной части кватерниона A ограничен.

Теорема 3. Пусть даны кватернионы $A = a + \gamma\mathbf{A}$ и $B = b + \gamma\mathbf{B}$. Их произведение $AB = A$ (или $BA = A$), если: а) при значениях параметров $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$ кватернион A – изохронный, а норма кватерниона B равна $\|B\| = \sqrt{2b - 1}$; б) при значениях параметров $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$ векторы **A** и **B** перпендикулярные.

Доказательство. 1. Пусть при значениях параметров $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$ произведение $AB = A$. Тогда выполняется система равенств $\begin{cases} ab + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a \\ a\mathbf{B} + b\mathbf{A} - [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{A} \end{cases}$ или $\begin{cases} a(b-1) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ a\mathbf{B} + (b-1)\mathbf{A} - [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = 0 \end{cases}$. Умножим первое уравнение системы на число $a \neq 0$ и вычтем из результата второе уравнение, умноженное скалярно на вектор **A**, получим $(a^2 - |\mathbf{A}|^2)(b-1) = \|A\|^2 (b-1) = 0$. При значении параметра $b \neq 1$ норма кватерниона A равна нулю ($\|A\|^2 = 0$, $|\mathbf{A}| = |a|$, $\mathbf{A} = |a|\mathbf{e_A}$, $\mathbf{e_A}$ – единичный вектор в направлении вектора **A**), т.е. кватернион A является изохронным. Умножим первое уравнение системы на число $b - 1 \neq 0$ и вычтем из результата второе уравнение, умноженное скалярно на вектор **B**, получим $a\left((b-1)^2 - |\mathbf{B}|^2\right) = 0$ ($|\mathbf{B}| = |b-1|$, $\mathbf{B} = |b-1|\mathbf{e_B}$, $\mathbf{e_B}$ – единичный вектор в направлении вектора **B**). По условию теоремы число $a \neq 0$, тогда норма кватерниона B равна $\|B\|^2 = b^2 - |\mathbf{B}|^2 = 2b - 1$ или $\|B\| = \sqrt{2b-1}$. С другой стороны, с учетом найденных выражений для векторов **A** и **B** первое уравнение преобразованной системы можно записать в виде $a(b-1)(1 \pm \cos\xi) = 0$ (ξ – угол между единичными векторами $\mathbf{e_A}$ и $\mathbf{e_B}$). Из этого равенства следует, что единичные векторы $\mathbf{e_A}$ и $\mathbf{e_B}$ коллинеарные ($\mathbf{e_A} \parallel \mathbf{e_B}$), так как угол между ними будет равен 0 ($\mathbf{e_A} \uparrow\uparrow \mathbf{e_B}$) или π ($\mathbf{e_A} \uparrow\downarrow \mathbf{e_B}$).

2. Если параметры $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$, то система уравнений сводится к одному равенству $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, т.е. векторы **A** и **B** перпендикулярные ($\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$).

Отметим, что теорема 3 указывает на существование в гиперпространстве необычных кватернионов, отличных от единичной гиперструктуры $E = 1 + \gamma\mathbf{0}$, произведение которых равно одному из них.

Операция комплексного сопряжения от произведения двух кватернионов приводит к выражению

$$(AB)^* = B^* A^*, \tag{18}$$

т.е. не только к комплексному сопряжению перемножаемых кватернионов, но и к перестановке местами сомножителей.

Произведение двух кватернионов Гиббса некоммутативно, поэтому их коммутатор отличен от нуля и равен

$$[A, B] = AB - BA = -2\gamma[\mathbf{A} \times \mathbf{B}], \tag{19}$$

при этом выполняются равенства $[A, B] = -[A^*, B] = -[A, B^*] = [A^*, B^*]$. Антикоммутатор равен

$$\{A, B\} = AB + BA = 2\left(ab + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \gamma(a\mathbf{B} + b\mathbf{A})\right) \tag{20}$$

и справедливы соотношения $\{A, B\} = \left(\{A^*, B^*\}\right)^*$; $\{A^*, B\} = \left(\{A, B^*\}\right)^*$. Удвоенное произведение кватернионов A и B равно

$$2AB = [A, B] + \{A, B\}, \tag{21}$$

т.е. произведение двух кватернионов представляется в виде полусуммы их коммутатора и антикоммутатора. В случае комплексно-сопряженных гиперструктур коммутатор равен нулю, а антикоммутатор – удвоенному значению квадрата нормы:

$$[A, A^*] = 0 \text{ и } \{A, A^*\} = 2\|A\|^2. \tag{22}$$

Произведение трех и более кватернионов Гиббса неассоциативно, т.е. зависит от порядка умножения гиперструктур. В этой связи введем понятия коммутатора ассоциации (ассоциатор), который, например, для трех гиперкомплексных чисел равен

$$\big[(A,B,C)\big]=(AB)C-A(BC)=2\gamma\left\{\big[[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]\times\mathbf{C}\big]-\big[\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]\big]\right\}=$$
$$=2\gamma\big((\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\big) \qquad (23)$$

(использована формула [21, с. 20]: $\big[[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]\times\mathbf{C}\big]=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$), и ассоциатора комплексного сопряжения (астратор), например,

$$\Big\langle(A,B,C)\Big\rangle=(AB)C-\Big(A^*(B^*C^*)\Big)^*,$$
$$\Big\langle(A^*,B,C)\Big\rangle=(A^*B)C-\Big(A(B^*C^*)\Big)^* \qquad (24)$$

и т.д. Выполнив две циклические перестановки кватернионов в формуле (23) и просуммировав все полученные ассоциаторы, находим

$$\big[(A,B,C)\big]+\big[(C,A,B)\big]+\big[(B,C,A)\big]=0 \qquad (25)$$

или

$$\big[[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]\times\mathbf{C}\big]+\big[[\mathbf{C}\times\mathbf{A}]\times\mathbf{B}\big]+\big[[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]\times\mathbf{A}\big]=0, \qquad (26)$$

т.е. сумма двойных векторных произведений с циклической перестановкой векторов равна нулю.

3. Деление кватерниона $A = a + \gamma\mathbf{A}$ на неизохронный ($\|B\| \neq 0$) кватернион $B = b + \gamma\mathbf{B}$ выполняется по правилам [6]:

$$\text{левое частное} - \frac{A}{B}=\frac{B^*A}{B^*B}=\frac{B^*A}{\|B\|^2};\quad \text{правое частное} - \frac{A}{B}=\frac{AB^*}{BB^*}=\frac{AB^*}{\|B\|^2}.$$

Если коммутатор (19) $[A,B^*]=2\gamma[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]=0$ ($\mathbf{A}\parallel\mathbf{B}$ – векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ коллинеарные), то левое и правое частные равны между собой.

Таким образом, совместное использование алгебры кватернионов Гамильтона и векторного исчисления Гиббса порождает алгебру комплексных структур с новыми свойствами. Отличие этих кватернионов от множеств действительных и комплексных чисел состоит в том, что их произведение некоммутативно, неассоциативно и изменяется при выполнении над ним операции комплексного сопряжения, поэтому необходимо указывать порядок перемножения кватернионов и тип вычисляемого частного. Индикаторами этих свойств являются отличные от нуля коммутаторы, ассоциаторы и астраторы кватернионов. С учетом особенностей исследуемого изоморфизма алгебр Гамильтона–Гиббса рассмотрим движение частицы в гиперпространстве.

4. Преобразование Лоренца

Гиперпространством будем называть скалярно-векторное (1+3)-пространство гиперкомплексных структур вида (12). Положение математической точки в пространственно-временном континууме инерциальной системы отсчета будем задавать безразмерным кватернионом

$$r = \tau + \gamma\mathbf{r}, \qquad (27)$$

где $\tau = ct/l$, c и l – предельная скорость (например, скорость света в вакууме (скорость звука в среде и др.)) и характерное значение длины (длина свободного пробега частицы (корреляционная длина и др.)) для рассматриваемой задачи, t – время; $\mathbf{r} = R(x, y, z)/l$, в выбранной системе отсчета $\mathbf{R}(x, y, z)$ – радиус-вектор, определяющий положение точки с пространственными координатами x, y, и z.

Произведение кватерниона (27) самого на себя равно гиперструктуре

$$rr = r^2 = \tau^2 + |\mathbf{r}|^2 + 2\gamma(\tau\mathbf{r}) = L^2 + 2\gamma(\tau\mathbf{r}), \tag{28}$$

где $L = \sqrt{\tau^2 + |\mathbf{r}|^2}$ – евклидово расстояние от точки гиперпространства до начала координат. Движение математической точки порождает мировую линию, на которой интервал между событиями s во времениподобной области [22, с. 17] гиперпространства определяется нормой кватерниона (27)

$$s^2 = \|r\|^2 = rr^* = r^* r = \tau^2 - |\mathbf{r}|^2. \tag{29}$$

На пространственно-временной евклидовой плоскости $\tau O|\mathbf{r}|$ формула (29) определяет равнобочную гиперболу, ветви которой вытянуты вдоль временной оси. Если ввести тригонометрические функции для гиперболы [23] (синус $\mathrm{sh}\psi = \dfrac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{2}$ и косинус $\mathrm{ch}\psi = \dfrac{e^{\psi} + e^{-\psi}}{2}$), то в гиперболической полярной системе координат (ψ – полярный угол)

$$\begin{cases} \tau = s \cdot \mathrm{ch}\psi \\ |\mathbf{r}| = s \cdot \mathrm{sh}\psi \end{cases} \tag{30}$$

равенство (29) превращается в гиперболическое тождество $\mathrm{ch}^2\psi - \mathrm{sh}^2\psi = 1$. Гиперболический поворот отвечает в евклидовом пространстве гомотетии (сжатию или растяжению) гиперболы к координатным осям [23], т.е. скейлинговому преобразованию гиперболы.

Модуль векторной части гиперкомплексной структуры (28) за счет поворота на угол 45° координатных осей плоскости $\tau O|\mathbf{r}|$ может быть приведен к норме (29). Таким образом, квадрат кватерниона положения (27) равен $r^2 = L^2 + \gamma(s^2\mathbf{e_r})$, где $\mathbf{e_r}$ – единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r}$. Следовательно, интервал между событиями s является таким же естественным параметром, как и евклидово расстояние L. Вещественность нормы кватерниона (28) приводит к ограниченности интервала $s \le L$ (теорема 2).

Из формул (30) видно, что при равномерном прямолинейном движении скорость перемещения инерциальной системы отсчета определяется равенством

$$u = \frac{|\mathbf{r}|}{\tau} = \frac{v}{c} = \mathrm{th}\psi \quad \left(\mathrm{th}\psi = \frac{\mathrm{sh}\psi}{\mathrm{ch}\psi}\right), \tag{31}$$

где v – модуль скорости движения инерциальной системы.

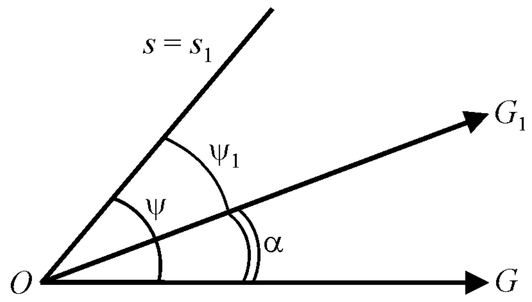

Рис. 4. Старая (G) и новая (G_1) гиперболические полярные системы координат

Теорема 4. Если интервал между событиями s не изменяется ($s_1 = s$) при переходе в новую гиперболическую полярную систему координат, то новые и старые координаты событий связаны между собой преобразованием Лоренца.

Доказательство. Пусть новая гиперболическая полярная ось G_1 расположена под углом α к старой полярной оси G, причем угол α отсчитывается в том же направлении, что и угол ψ (рис. 4). Новые координаты события вычислим по формулам (30): $\begin{cases} \tau_1 = s_1 \cdot \mathrm{ch}\psi_1 \\ |\mathbf{r}_1| = s_1 \cdot \mathrm{sh}\psi_1 \end{cases}$. По условию теоремы интервал между событиями остается неизменным ($s_1 = s$), следовательно, изменяется только полярный угол $\psi_1 = \psi - \alpha$ (согласно (31) новая система координат отличается от старой только скоростью прямолинейного равномерного движения). Тогда новые координаты события связаны со старыми координатами соотношениями

$$\begin{cases} \tau_1 = s_1 \cdot \mathrm{ch}\psi_1 = s\mathrm{ch}(\psi - \alpha) = s\mathrm{ch}\psi\mathrm{ch}\alpha - s\mathrm{sh}\psi\mathrm{sh}\alpha = \tau\mathrm{ch}\alpha - |\mathbf{r}|\mathrm{sh}\alpha \\ |\mathbf{r}_1| = s_1 \cdot \mathrm{sh}\psi_1 = s\mathrm{sh}(\psi - \alpha) = s\mathrm{sh}\psi\mathrm{ch}\alpha - s\mathrm{ch}\psi\mathrm{sh}\alpha = |\mathbf{r}|\mathrm{ch}\alpha - \tau\mathrm{sh}\alpha \end{cases}. \quad (32)$$

В силу того, что (с учетом формул (31))

$$\mathrm{ch}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2\alpha}}, \quad \mathrm{sh}\alpha = \frac{\mathrm{th}\alpha}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2\alpha}}, \quad \mathrm{th}\alpha = \frac{v_0}{c} = u_0 \quad (33)$$

(где u_0 – скорость относительного движения координатных систем), равенства (32) принимают вид преобразований Лоренца:

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{\tau - u_0|\mathbf{r}|}{\sqrt{1 - u_0^2}} \\ |\mathbf{r}_1| = \dfrac{|\mathbf{r}| - u_0\tau}{\sqrt{1 - u_0^2}} \end{cases}. \quad (34)$$

Обратные преобразования Лоренца получают из равенств (34) путем замены скорости относительного движения u_0 на противоположное значение $-u_0$:

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{\tau_1 + u_0|\mathbf{r}_1|}{\sqrt{1 - u_0^2}} \\ |\mathbf{r}| = \dfrac{|\mathbf{r}_1| + u_0\tau_1}{\sqrt{1 - u_0^2}} \end{cases}. \quad (35)$$

Формулы (34) позволяют объяснить эффекты замедления времени и сокращения длины при скоростях движения, близких к скорости c [22, с. 22–26]. Из соотношений (35) следует связь между скоростью частицы u (31) в старой инерциальной системе и ее скоростью u_1 в новой инерциальной системе (формула преобразования скоростей [22, с. 26; 23, с. 96]):

$$u = \frac{u_1 + u_0}{1 + u_1 u_0}. \tag{36}$$

Из формулы (36) видно, что при выполнении равенства $u_1 = 1$ скорость $u = 1$ вне зависимости от величины скорости относительного перемещения u_0 одной инерциальной системы по отношению к другой. Этот эффект связан с обращением в нуль интервала между событиями в обеих системах координат, т.е. точки, движущиеся со скоростью c, описываются изохронными кватернионами.

В гиперпространстве интервал между событиями s, определяемый формулой (29), является вещественным и естественным параметром мировой линии, таким же, как и параметр длины пространственной линии при движении в трехмерном пространстве Евклида. Если на мировой линии выбрать начало отсчета и положительное направление увеличения интервала между событиями (например, в сторону возрастания времени), то кватернион (27) $r(s)$ будет функцией интервала s, а его первые и вторые производные по этому параметру будут характеризовать геометрию мировой линии: кривизну, кручение, повороты и гомотетии. С физической точки зрения указанные величины определяются скоростью и ускорением частицы, поэтому в следующей работе вычислим физико-геометрические характеристики частицы на мировой линии.

5. Заключение

В евклидовом пространстве геометрический вид экстремали (траектории движения) формируют потенциальные поля. Они изменяют кривизну и кручения пространства, что при определенных условиях может привести к периодическим и связанным между собой изменениям векторов подвижной системы координат. Эволюционные уравнения содержат характеристики сопряженного пространства (первые производные базисных векторов по естественному параметру) к пространству Евклида. Пренебрежение одним из геометрических факторов приводит к частным случаям описания эволюции базисной тройки векторов, причем один из этих случаев был исследован в модели Серре–Френе.

Для описания перемещения частиц в пространственно-временном континууме предлагается использовать физический изоморфизм алгебры кватернионов Гамильтона в сочетании с векторным исчислением Гиббса. Соединение неассоциативной, некоммутативной и зависящей от операции комплексного сопряжения теории Гамильтона с векторным анализом Гиббса существенно увеличивает возможности используемого математического аппарата для отображения физической сущности реального мира. В частности, предлагаемый подход описывает поведение релятивистских частиц без привлечения дополнительных гипотез и позволяет получить все соотношения специальной теории относительности Эйнштейна. Отметим, что на мировой линии координаты частицы, которая движется с предельной скоростью, описываются изохронным кватернионом положения. Таким образом, предлагаемое теоретическое построение можно использовать для исследования физико-геометрических свойств гиперпространства на базе установленных соотношений.

1. *Г. Хакен*, Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах, Мир, Москва (1985).
2. *Г. Хакен*, Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии, Институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск (2003).
3. *С.В. Терехов*, Введение в синергетику, Цифровая типография, Донецк (2009).
4. *С.В. Терехов*, ФТВД **22**, № 1, 33 (2012).
5. *Дж. Синг*, Классическая динамика, Физматгиз, Москва (1963).
6. *P.R. Girard*, Eur. J. Phys. **5**, 25 (1984).
7. *А.П. Ефремов*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике № 1, 111 (2004).
8. *Jose G. Vargas*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике **7**, № 1, 165 (2010).
9. *Г.И. Гарасько*, Начала финслеровой геометрии для физиков, ТЕТРУ, Москва (2009).
10. *Б. Мандельброт*, Фрактальная геометрия природы, Институт компьютерных исследований, Москва (2002).
11. *С.В. Терехов*, Фракталы и физика подобия, Цифровая типография, Донецк (2011).
12. *S.I. Kruglov*, Annales de la Fondation Louis de Broglie **27**, 343 (2002).
13. *С.В. Терехов*, Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки № 2, 287 (2002).
14. *С.В. Терехов*, Вестник Новгородского государственного университета. Серия: Технические науки № 26, 56 (2004).
15. *С.В. Терехов*, ФТВД **16**, № 2, 55 (2006).
16. *С.В. Терехов, И.К. Локтионов*, ФТВД **23**, № 4, 5 (2013).
17. *Г. Корн, Т. Корн*, Справочник по математике, Наука, Москва (1973).
18. *Н.Е. Кочин*, Векторное исчисление и начала тензорного анализа, Наука, Москва (1965).
19. *В. Блашке*, Введение в дифференциальную геометрию, Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск (2000).
20. *В.Г. Веретенников, В.А. Синицын*, Метод переменного действия, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2005).
21. *А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов*, Векторный анализ и начала тензорного исчисления, Вища школа, Харьков (1986).

22. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*, Теоретическая физика, Т. II. Теория поля, Наука, Москва (1973).
23. *Ф.М. Морс, Г. Фешбах*, Методы теоретической физики, Т. 1, Изд-во иностр. лит., Москва (1958).

S.V. Terekhov

PHYSICAL AND GEOMETRICAL DESCRIPTIONS OF HYPERSPACE. I. THE SERRE–FREINET GENERALIZED SYSTEM. PHYSICAL ISOMORPHISM OF HAMILTON ALGEBRA OF THE QUATERNIONS

The Serre-Freinet system of differential equalizations of the first order has been studied with taking into account a possibility of the turn of the three base vectors around the binormal vector. It is shown that over neglect of one of geometrical characteristics of the spatial curve (curvature, twisting or turn) brings to the ostillational pattern of behaviour of the corresponding base vector of the movable frame of reference. The necessity to distinguish the geometrical structure of trajectory of motion and the physical properties of a material particle is indicated. Modification of the Hamilton hypercomplex algebra is suggested that represents the behavior of relativist objects.

Keywords: extremal, curvature, twisting, quaternion, interval between the events

Fig. 1. Extremals and transversals of the mechanical motion

Fig. 2. Three movable vectors of the spatial line

Fig. 3. Right (*a*) and left (*б*) well-organized triple of numbers

Fig. 4. Old (G) and new (G_1) hyperbolic polar systems of co-ordinates