

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СВЯЗАННЫХ КРЕСТООБРАЗНЫХ ВОЛНОВОДНЫХ РАЗВЕТВЛЕНИЙ

Н.И. Пятак

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина
Украина*

Поступила в редакцию 14.03.2006

В строгой постановке решена задача о собственных электромагнитных колебаниях H_{mn0} -типов в двух связанных H -плоскостных крестообразных волноводных разветвлениях. Получены численные результаты для частой связи разветвлений в зависимости от их геометрических параметров.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] рассмотрены резонансные явления в полуоткрытых волноводных структурах различной формы сечения. Установлено, что при определенных условиях существует режим собственных колебаний. Для этого пересекающиеся волноводы должны быть заперделными на резонансной частоте.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Представляет научный и практический интерес поведение собственных резонансных частот системы из 2-х связанных разветвителей крестообразного сечения, геометрия которой в H -плоскости представлена на рис. 1.

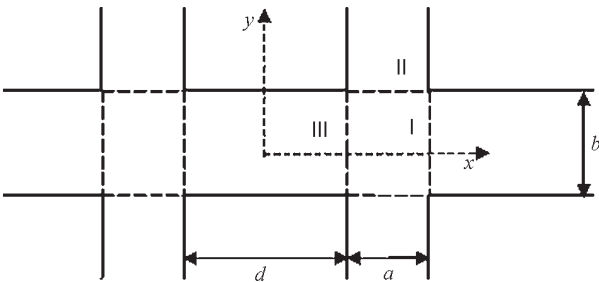


Рис. 1.

Для решения граничной задачи воспользуемся методом частичных областей с выделением области связи [1]. В предложении, что

$\frac{\partial}{\partial z} = 0$, решение для единственной электрической компоненты E_z в каждой из областей для колебаний с нечетным количеством полуволен в поперечном сечении “ a ” и “ b ” имеет вид:

$$E_z^{\text{II}} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n}{a} \left(x - \frac{a+d}{2} \right) e^{-\gamma_{na} \left(y - \frac{b}{2} \right)} \quad (1)$$

Связанных между собой являются только поля с нечетным индексом, поля с четным индексом являются ортогональными к ним. Аналогично запишем поле в области II:

$$E_z^{\text{III}} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} B_n \cos \frac{\pi n}{b} y \cdot \frac{ch \gamma_{nb} x}{ch \gamma_{nb} \cdot d/2} \quad (2)$$

В соответствии с идеей используемого метода поле в области связи I представим как суперпозицию полей ортогональных волноводов “ a ” и “ b ” для колебаний с нечетным количеством полуволен вдоль размера “ d ”.

$$E_z^{\text{I}} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} B_n \cos \frac{\pi n}{b} y \cdot \frac{ch \gamma_{nb} (x - (a+d)/2)}{ch \gamma_{nb} \cdot a/2} + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} A_m \cos \frac{\pi m}{a} \left(x - \frac{a+d}{2} \right) \cdot \frac{ch \gamma_{ma} y}{ch \gamma_{ma} \cdot b/2} \quad (3)$$

где $A_m B_n$ – амплитудные коэффициенты по-

лей волноводов II и III; $\gamma_{ma} = \sqrt{\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 - k^2}$,

$\gamma_{mb} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 - k^2}$ – постоянные распростра-

нения волн в областях II, III; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны в свободном пространстве.

Условия “сшивания” полей на границе раздела областей для компонент E_z удовлетворяются автоматически благодаря выбранной нормировке полей.

$$E_z^{\text{II}} = E_z^{\text{II}} \Big|_{x=d/2}, \quad \text{и} \quad E_z^{\text{I}} = E_z^{\text{II}} \Big|_{y=b/2} \quad (4)$$

в чем легко убедиться из (1) – (2).

Соответствующие компоненты магнитного поля пропорциональны производным по компонентам x и y , и имеют следующий вид:

$$H_y^{1,\text{III}} \approx \frac{\partial E_z^{1,\text{III}}}{\partial x}, \quad H_x^{1,\text{II}} \approx \frac{\partial E_z^{1,\text{II}}}{\partial y}.$$

Отсюда:

$$H_x^{\text{I}} = -\sum B_n \frac{\pi n}{b} \sin \frac{\pi n}{b} y \frac{\text{ch}\gamma_{nb}(x-(a+d)/2)}{\text{ch}\gamma_{nb} \cdot a/2} + \sum_m A_m \gamma_{ma} \cos \frac{\pi m}{a} \left(x - \frac{a+d}{2}\right) \cdot \frac{\text{sh} \cdot \gamma_{ma} y}{\text{ch}\gamma_{ma} \cdot b/2}, \quad (5)$$

$$H_x^{\text{II}} = -\sum_m A_m \cdot \gamma_{ma} \cos \frac{\pi m}{a} \left(x - \frac{a+d}{2}\right) e^{-\gamma_{ma}(y-b/2)}, \quad (6)$$

$$H_y^{\text{I}} = \sum_n B_n \cos \frac{\pi n}{b} y \frac{\text{sh}\gamma_{nb}(x-(a+d)/2)}{\text{ch}\gamma_{nb} \cdot a/2} + \sum_m A_m \cos \frac{\pi m}{a} \left(x - \frac{a+d}{2}\right) \frac{\text{ch}\gamma_{ma} y}{\text{ch}\gamma_{ma} \cdot b/2}, \quad (7)$$

$$H_y^{\text{II}} = \sum_n B_n \cdot y \cos \frac{\pi n}{b} y \frac{\text{sn}\gamma_{nb} x}{\text{ch}\gamma_{nb} \cdot d/2}. \quad (8)$$

Необходимо потребовать непрерывности тангенциальных составляющих магнитного поля: $H_x^{\text{I}} = H_x^{\text{II}}$ при $y = b/2$, $H_y^{\text{I}} = H_y^{\text{III}}$ при $x = d/2$

$$\sum_n A_m \gamma_{ma} \cos \frac{\pi m}{a} \left(x - \frac{a+d}{2}\right) \left[\text{th}\gamma_{ma} \frac{b}{2} + 1 \right] = \sum_n B_n \frac{\pi n}{b} \sin \frac{\pi n}{2} \cdot \frac{\text{ch}\gamma_{nb}(x-(a+d)/2)}{\text{ch}\gamma_{nb} \cdot a/2}, \quad (9)$$

$$\sum_n B_n \cos \frac{\pi n}{b} y \left[\text{th}\gamma_{nb} \frac{d}{2} + \text{th}\gamma_{nb} \left(\frac{a}{2}\right) \right] = \sum_n A_m \frac{\pi m}{a} \cos \frac{\pi m}{2} \frac{\text{ch}\gamma_{ma} y}{\text{ch}\gamma_{ma} \cdot b/2}. \quad (10)$$

Таким образом получена спаренная бесконечная система функциональных уравнений (11) и (12).

Для преобразования функциональных уравнений в систему линейных алгебраических уравнений помножим (11) и (12) на собственные функции волноводов II

$\cos \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a+d}{2}\right)$ и $\cos \frac{k\pi}{b} y$ волновода III.

После чего на интервале ортогональности от $d/2$ до уравнения (9) $d/2 + a$ и $-b/2$ до $b/2$ уравнения (10).

$$\int_{d/2}^{d/2+a} \sum_m A_m \cos \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a+d}{2}\right) \left[\text{th}\gamma_{ma} \frac{d}{2} + \text{th}\gamma_{ma} \frac{a}{2} \right] \cos \frac{k\pi}{a} x dx = \int_{d/2}^{d/2+a} \sum_n B_n \frac{\pi n}{b} \sin \frac{\pi n}{b} \times \frac{\text{ch}\gamma_{nb}(x-(a+d)/2)}{\text{ch}\gamma_{nb} \cdot a/2} \cos \frac{k\pi}{a} x dx, \quad (11)$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \sum_n B_n \cos \frac{\pi n}{b} y \left[\text{th}\gamma_{nb} + \text{th}\gamma_{nb} \frac{a}{2} \right] \cos \frac{\pi k}{b} y dy = \int_{-b/2}^{b/2} \sum_m B_m \frac{\pi m}{a} \cos \frac{\pi m}{2} \frac{\text{ch}\gamma_{ma} y}{\text{ch}\gamma_{ma} b/2} \cos \frac{\pi k}{b} y dy. \quad (12)$$

После интегрирования получаем

$$\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}+a} \cos \frac{m\pi}{a} \cos \frac{k\pi}{a} x dx = \frac{a}{2} \delta_{mk},$$

$$\delta_{mk} = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ 1, & m = 3 \end{cases} \quad (13)$$

где δ_{mk} – символ Кронекера.

$$\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}+a} \cos \frac{k\pi}{a} x \text{ch}\gamma_{nd} \left(x + \frac{a+d}{2}\right) dx = \frac{2(-1)^{(k-1)/2} (k\pi/a) \cos i\gamma_{nb} a/2}{\gamma_{nb}^2 + (k\pi/a)^2}, \quad (14)$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{k\pi}{b} y dy = \frac{b}{2} \delta_{mk},$$

$$\delta_{mk} = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases}; \quad (15)$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \frac{k\pi}{b} y \operatorname{ch} \gamma_{ma} y dy = \frac{2(-1)^{(k-1)/2} k\pi/b \cos i\gamma_{nb} b/2}{\gamma_{ma}^2 + (k\pi/2)^2}. \quad (16)$$

В результате этого имеем сдвоенную однородную систему линейных алгебраических уравнений 2 рода (СЛАУ)

$$A_k \frac{\gamma_{ka} a}{2} \left[1 + \operatorname{th} \gamma_{ma} \left(\frac{b}{2} \right) \right] - \quad (17)$$

$$- \sum_{n=1,3,5}^{\infty} B_n \frac{\pi n}{b} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2(-1)^{(k-1)/2} k\pi/a}{\gamma_{nb}^2 + (k\pi/a)^2} = 0,$$

$$B_n \frac{\gamma_{nb} b}{2} \left[\operatorname{th} \gamma_{nb} \frac{d}{2} + \operatorname{th} \gamma_{nb} \left(\frac{a}{2} \right) \right] - \quad (18)$$

$$- \sum_{m=1,3,5}^{\infty} A_m \frac{\pi m}{b} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2(-1)^{(k-1)/2} n\pi/b}{\gamma_{ma}^2 + (n\pi/b)^2} = 0.$$

Из (18) можно получить

$$B_n = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} A_m \frac{2 \frac{n\pi}{b} \frac{m\pi}{a} (-1)^{(n-1)/2} (-1)^{(k-1)/2}}{\frac{\gamma_{nb} b}{2} \left[\operatorname{th} \gamma_{nb} \frac{b}{2} + \operatorname{th} \gamma_{nb} \frac{a}{2} \right] \left[\gamma_{ma}^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]}. \quad (19)$$

После подстановки в (12) имеем:

$$A_k - \sum_{n=1,3,5} A_n \sum_{m=1,3,5} F_{mn} P_{nk} = 0, \quad (20)$$

$$A_k - \sum_{n=1,3,5} A_n Q_{nk} = 0. \quad (21)$$

Это и есть искомая СЛАУ II рода, где

$$Q_{nk} = \sum_{m=1,3,5} F_{mn} P_{nk}, \quad (22)$$

$$F_{mn} = \frac{2(\pi m/a)(\pi n/b)(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{\frac{\gamma_{nb} b}{2} \left[\operatorname{th} \gamma_{nb} \frac{d}{2} + \operatorname{th} \gamma_{nb} \frac{a}{2} \right] \left[\gamma_{ma}^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]}, \quad (23)$$

$$P_{nk} = \frac{2(\pi k/a)(\pi k/b)(-1)^{\frac{n+k-2}{2}}}{\frac{\gamma_{nb} b}{2} \left[1 + \operatorname{th} \gamma_{nb} \frac{b}{2} \right] \left[\gamma_{ma}^2 + \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \right]}. \quad (24)$$

Условием резонанса является равенство нулю определителя системы:

$$\det \{ \delta_{nk} - Q_{nk} \} = 0. \quad (25)$$

В зависимости от порядка определителя мы получаем решение с той или иной степенью точности. Физически это означает, что мы в сумме для полей оставляем конечное количество волн, распространяющихся и затухающих в волноводе. Опыт решения таких задач говорит о том, что для практического использования достаточно для всех геометрических параметров задачи учесть в волноводе все распространяющиеся волны и одну затухающую.

Численно исследовано поведение частот связи основных типов колебания H_{110} одиночных разветвлений в зависимости от величины запредельного участка волновода d , выполняющего роль элемента связи.

Отметим, что верхняя ветвь графика соответствует колебанию H_{110} двойного разветвления при $a = b$ со структурой электрического поля показанной на рис. 2, нижняя ветвь – колебанием H_{210}

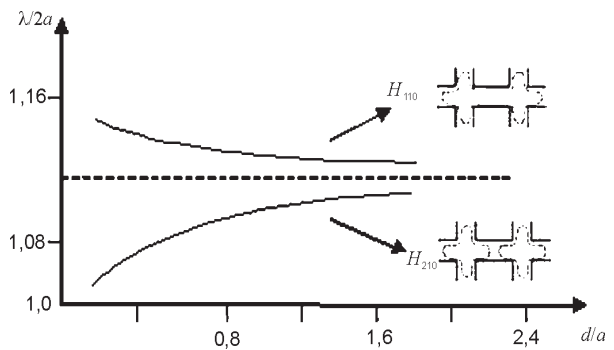


Рис. 2.

По мере уменьшения связи (увеличения d/a) обе частоты связи стремятся к собственной частоте одиночного разветвления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробкин В.А., Осинцев В.В. Собственные колебания электромагнитного поля диэлектрического резонатора в волноводном развет-

- влении //Радиотехника и электроника. – 1985.
– Т. XXX, вып. 3.
2. Коробкин В.А., Пятак Н.И. Собственные электромагнитные резонансы полукрытых волноводных структур //Радиотехника и электроника. – 1987, вып. 3.

**РОЗРАХУНОК ВЛАСНИХ ЧАСТОТ
ЗВ'ЯЗАНИХ ХРЕСТОПОДІБНИХ
ХВИЛЕВОДНИХ РОЗГАЛУЖЕНЬ**

М.І. П'ятак

У строгій постановці вирішена задача про власні електромагнітні коливання H_{mn0} -типів у двох зв'язаних H -площинах хрестоподібних хвильоводних розгалужень. Отримано числові результати для частот зв'язку розгалужень у залежності від їхніх геометричних параметрів.

**CALCULATION OF OWN FREQUENCIES
CONNECTED CROSSWISE WAVEGUIDE
BRANCHINGS**

M.I. Pyatak

In the given work the task of intrinsic electromagnetic oscillations of N pro-types in two connected n -planar cross-shaped waveguide couplers is solved in strict formulation. Some numerical data for frequencies of ramification coupling depending on their geometric parameters are obtained.