УДК621.86

Стоцько З.А., д.т.н., Лясковська С.Є., к.т.н.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ З КАНАТНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Моделювання, розрахунок та проектування складних транспортних систем із залученням багатьох змінних параметрів потребує точного аналізу перебігу процесів як в окремих складових елементах, так і в системі в цілому. Зокрема, при дослідженні транспортних систем з канатними елементами враховують ряд факторів, які впливають на їх ефективну роботу, а саме траєкторія руху, матеріал, з якого виготовленні окремі елементи обладнання [1]. При дослідженні канатних доріг визначальним є вибір та врахування конструкції канату, його перевірка на бракування тощо.

Важливим кроком при створенні математичної моделі системи з включенням канатних елементів є аналіз траєкторії руху матеріальної точки, яка може бути прийнята як транспортний засіб. Дослідження режимів роботи таких систем ґрунтується на їх описі диференціальними рівняннями, які визначені структурою окремих складових ланок [2]. При моделюванні руху зображуючої точки у вертикальній площині необхідно враховувати також спряження кривих, зокрема, для підвісних канатних доріг, де має місце перехід зображуючої точки при її русі з одної ланки кривої на іншу, тоді як динаміка руху технічних систем розглядається переважно з урахуванням одної кривої [3]. Для виконання спряжень кривих стосовно траєкторії руху зображуючої точки канатної дороги як елемента транспортної системи використовують відрізки кривих як віток парабол різного степеня. У практиці проектування, дослідження та експлуатації канатних доріг складовими математичних моделей із залученням траєкторій руху часто приймають узагальненні рівняння конічних перерізів [4]:

$$[X]\,[\,S]\,[\,X]^{T}=0,$$

де $[X] = [\,x\ y\ 1]$ – координати руху зображуючої точки у

площині, $[\,S] = \begin{bmatrix} A & D/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix}$ - коефіцієнти .

Використанням операцій повороту і перенесення рівняння кривої приводять до стандартного вигляду із центральними (коло, еліпс, гіпербола) або нецентральними (парабола) формами. Легко бачити, що при відповідних значеннях коефіцієнтів, зокрема, $A \neq 0$, $E \neq 0$, одержуємо канонічне рівняння кривої, наприклад, $y = Ax^2$. Приведені такі рівняння являють частинні випадки, зокрема, узагальненого рівняння параболи n – го степеня.

Розглянемо рух матеріальної точки у вертикальній площині при переході по відрізках віток парабол з першого $y = a_1 x$ на вітку другого $y = a_2 x^2$ степеня (рисунок).

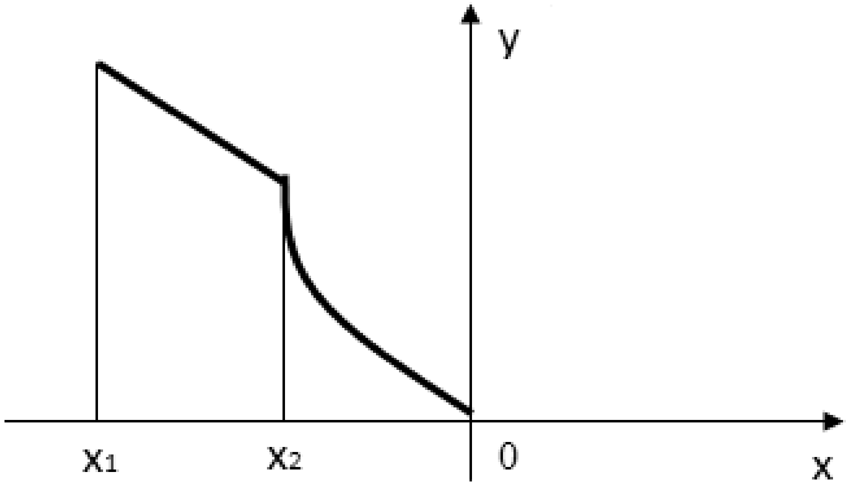

Рис.1. Рух точки у вертикальній площині *Oxy*

Для запису диференціальних рівнянь руху матеріальної точки приймаємо рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial \frac{dq_i}{dt}}\right) - \frac{\partial \omega_k}{\partial q_i} = Q_i, \tag{1}$$

де ω_K – запас кінетичної енергії системи, виражений через узагальнені координати q_i та узагальнені швидкості $\frac{dq_i}{dt}$,

$Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i}$ - узагальнена сила, яка визначається сумою елементарних робіт δA_i всіх діючих сил на можливому елементарному переміщенні δq_i.

Рівняння Лагранжа подають єдиний і досить простий спосіб опису перебігу процесів у технічних системах. У випадках, коли всі діючі на систему сили є потенціальними, використовують рівняння Лагранжа вигляду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dq_i}{dt}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad (2)$$

де L – функція Лагранжа.

Функція Лагранжа L являє різницю між кінетичною w_K і потенціальною $w_П$ енергіями, які виражені через узагальнені координати:

$$L = w_K - w_П. \qquad (3)$$

Приймемо узагальнене рівняння парабол n –го степеня $y = a_n x^n$. Потенціальна енергія $w_П$ точки A з силою тяжіння $P = mg$

$$w_П = mgy. \qquad (4)$$

Кінетична енергія w_K являє енергію руху зображуючої точки системи у вертикальній площині Oxy:

$$w_K = \frac{m}{2}(V_x^2 + V_y^2) = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right). \qquad (5)$$

З урахуванням рівняння параболи маємо

$$\frac{dy}{dt} = a_n \times n \times x^{n-1} \times \frac{dx}{dt}.$$

Функція Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + (a_n \times n \times x^{n-1})^2) - mga_n x^n \qquad (6)$$

та її частинні похідні

$$\frac{\partial L}{d(dx/dt)} = m \times \frac{dx}{dt}(1 + (a_n \times n \times x^{n-1})^2); \qquad (7)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial(dx/dt)}\right) = m\frac{d^2x}{dt^2}(1 + a_n^2 n^2 x^{2(n-1)}) + 2m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \times a_n^2 \times n^2 (n-1) \times x^{2n-3};$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m \times \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \times (n-1) \times a_n^2 n^2 \times x^{2n-1} - mga_n n x^{n-1}.$$

Рівняння Лагранжа:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(1+n^2a_n^2x^{2(n-1)})+m(\frac{dx}{dt})^2n^2a_n^2(n-1)x^{2n-3}+mga_nnx^{n-1}=0. \qquad (8)$$

Прискорення руху точки

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{n^2a_n^2(n-1)(\frac{dx}{dt})^2\times x^{2n-3}+gna_nx^{n-1}}{1+n^2a_n^2x^{2(n-1)}}. \qquad (9)$$

Виконаємо пониження порядку рівняння руху точки на ділянці $x_1x_2 0$; прийнявши $\frac{dx}{dt}=z$; $\frac{d^2x}{dt}=\frac{dz}{dt}$, одержимо

$$\frac{dx}{dt}=z; \qquad (10)$$

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{n^2a_n^2(n-1)z^2\times x^{2n-3}+gnx^{n-1}a_n}{1+n^2a_n^2x^{2(n-1)}}.$$

Якщо на ділянці x_1x_2 точка рухається по параболі першого степеня :

при $n=1, a_n=1$ одержимо $y = x$; на ділянці $x_2 0$ точка рухається по параболі другого степеня:

при $n=2, a_n=\frac{1}{2}$ одержимо $y=\frac{1}{2}x^2$.

Запишемо рівняння руху точки. Для ділянки x_1x_2 прискорення

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{2}, \qquad (11)$$

складові швидкості руху

$$\frac{dx}{dt}=z; \qquad (12)$$

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{g}{2},$$

а для ділянки x_2O прискорення

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{(\frac{dx}{dt}+g)x}{1+x^2} \quad .$$

Висновок.

Математичні представлення, покладені в основу розрахунків, подають складний механізм взаємозв'язків багатьох змінних параметрів транспортних систем з канатними елементами з додатково накладеними на зв'язки умовами взаємодії окремих складових її ланок. Запропонований спосіб опису руху матеріальної точки з нелінійними ділянками у вертикальній площині, поданими вітками парабол різного степеня, дозволяє встановити оптимальну траєкторію руху точки згідно проведення технологічного процесу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кодра Ю. В., Стоцько З. А. Технологічні машини. Розрахунок і конструювання : Навчальний посібник / Видання друге, доповнене. Навч. посібник за ред. З. А. Стоцька. — Львів : Видавництво «Бескид Біт», 2004. — 466 с.

2. Лясковська С. Є. Фазові траєкторії *n* - простору станів / С. Є. Лясковська // Геометричне та комп'ютерне моделювання. - Харків: ХДУХТ, 2007. - Вип. 18. - С. 35 - 40.

3. Моделювання електромеханічних систем / [Чорний О.П., Луговой А.В., Родькін А.Ю. та ін.].- Кременчук: Видавництво ПП Щербатих О.В.,2001.-С. 114- 139.

4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. – М.: Наука, 1975.-С.83-89.