УДК.621.87.06: 620.193

Гальченко Л.В., к.т.н. Мартовицький Л.М., к.т.н., Шаніна З.М., к.фіз.-мат.н.

ВЛИЯНИЕ КОРРОЗИОННОГО ИЗНОСА НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЛАВНЫХ КРАНОВЫХ БАЛОК

Исследование и расчет динамической прочности элементов металлоконструкций, определение качественных и количественных закономерностей, от которых зависит ресурс конструкции, - весьма актуальная проблема.

В отличие от многих современных машин и оборудования моральное старение грузоподъемных кранов, металлоконструкций идет более замедленно. Замена кранов, особенно с выдающимися техническими характеристиками, которые представляют собой чрезвычайно металлоемкие конструкции, дорогостоящая операция. Увеличение ресурса работы крана приводит к экономии ресурсов, эквивалентной в экстремальных случаях затратам на производство новых аналогичных кранов. Следовательно, увеличение ресурса представляет значительный резерв экономии средств, материалов, энергии и трудовых затрат. Прогнозирование остаточного ресурса дает дополнительные возможности экономии средств и получения экономического эффекта.

Зачастую краны работают в условиях агрессивной среды, вызывающей интенсивную коррозию несущего металла, что может привести к авариям и катастрофам. Например, на рудно-грейферные краны-перегружатели, которые работают на рудном дворе завода «Запорожсталь», с одной стороны действуют выбросы коксовых батарей, а с другой – доменных печей. Это обстоятельство приводит к тому, что по длине главных балок интенсивность коррозии неравномерна и возрастает в соответствии с определенным законам по направлению к опорам, расположенным вблизи от коксовых батарей. Кроме того, металлоконструкции кранов подвержены интенсивным динамическим нагрузкам от передвижения тележек в загруженном состоянии, вес которой достигает сотни тонн, а также нестационарным ветровым нагрузкам. Интенсивный многолетний коррозионный износ, переменные подвижные нагрузки, давление и пульсации ветра все это влияет на динамические характеристики металлоконструкций тяжелых кранов.

В настоящей работе сделана попытка оценить влияние значительных коррозионных повреждений на вибрационные характеристики главной балки как основного несущего элемента металлоконструкции крана мостового типа.

В общем виде рассмотрим малые поперечные колебания главной балки крана, как стержня с прямолинейной осью переменного по длине и по времени сечения. Ось стержня – линия центров тяжести его сечений. Предполагается, что стержень имеет хотя бы одну продольную плоскость симметрии и колебания рассматриваются в этой плоскости.

Примем прямолинейную ось главной балки в недеформированном состоянии за ось x. Ввиду малости колебаний перемещение любой точки оси в момент времени t определяется координатой y (x,t), а поворот сечения – углом $\theta = \dfrac{dy}{dx}$. Малыми смещениями сечений вдоль оси и связанными с этим силами инерции пренебрегаем.

Колебания совершаются с малыми амплитудами, при этом сохраняется пропорциональность между силами упругости и отклонениями стержня от положения равновесия, или, что то же самое, между силами упругости и деформациями стержня. Так как главная балка имеет переменную массу, то в уравнение ее колебаний должны входить слагаемые, содержащие производную массы. Однако, ввиду того, что коррозионные процессы развиваются относительно медленно, скоростью изменения массы можно пренебречь. При принятых допущениях дифференциальное уравнение свободных колебаний стержня имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2y}{dx^2}\right)-\frac{d}{dx}\left(J_s\frac{d^2\theta}{dt^2}+N\frac{dy}{dx}\right)+m\frac{d^2y}{dt^2}=0, \tag{1}$$

где

$m(x,t), EJ(x,t)$ - погонная масса стержня и жесткость на изгиб;

$J_s(x,t)$ - массовый погонный момент инерции стержня.

При малых отклонениях от положения равновесия продольные усилия N не зависят от колебаний и полностью определяются исходными условиями задачи.

Расчет частот свободных колебаний стержней обычно производится без учета инерции поворота его элементов. Это допущение, правильное для низших форм колебаний, становится несправедливым при расчете частот высших форм колебаний и если к стержню присоединяются посторонние массы, существенно меняющие массовый погонный момент инерции, но мало изменяющие его жесткость.

Тем не менее, в начале исследования не будем учитывать инерцию поворота элементов сечения стержня и предположим, что продольная сила N равна нулю. В таком случае дифференциальное уравнение (1) примет следующий вид:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2y}{dx^2}\right)+m\frac{d^2y}{dt^2}=0. \tag{2}$$

Для решения дифференциального уравнения (2) применим метод Фурье в случае, когда изгибная жесткость стержня EJ и погонная масса m представляет собой произведения функций $\psi(t)$, зависящих только от времени, на функции $\varphi(\xi)$, зависящие только от координаты сечения x

$$EJ=\varphi_1(\xi)\cdot\psi_1(t); \qquad m=\varphi_2(\xi)\cdot\psi_2(t), \tag{3}$$

где $\xi=\dfrac{x}{l}$ - безразмерная координата, изменяющаяся вдоль длины стержня от нуля до единицы;

l - длина стержня.

Представим искомую функцию прогиба $y(\xi,t)$ как произведение двух независимых функций

$$y(\xi_1,t)=Y(\xi)\cdot T(t). \tag{4}$$

Подстановка (4), с учетом зависимостей (3), в дифференциальное уравнение (2) приводит к разделению последнего на два самостоятельных уравнения

$$\ddot{T}(t)+p^2\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}T(t)=0, \tag{5}$$

$$\varphi_1(\xi)\cdot y^{(4)}+2\varphi_1'(\xi)\cdot y^{(3)}+\varphi_1''(\xi)\cdot y^{(2)}-l^4p^2\varphi_2(\xi)y=0. \tag{6}$$

Рассмотрим случай, когда стержень имеет прямоугольное сечение, линейные размеры которого из-за коррозии с течением времени уменьшаются по экспоненциальному закону. Существование дополнительного источника, вызывающего коррозию, вблизи одного из концов стержня приводит к тому, что по длине стержня интенсивность коррозии неравномерна и линейные размеры поперечного сечения стержня уменьшаются по экспоненциальному закону еще и вдоль длины стержня.

Сначала рассмотрим случай, когда высота поперечного сечения значительно больше его ширины, так что изменением высоты можно пренебречь. Так как для прямоугольного сечения

$$J=\frac{bh^3}{12}, \qquad m=\rho bh,$$

где b - ширина поперечного сечения стержня;

h - высота сечения.

При принятом предположении, обозначая через EJ_0 и m_0 первоначальную изгибную жесткость и погонную массу, получаем следующие зависимости

$$EJ=EJ_0e^{-\alpha(\tau+t)\xi}e^{-\beta(\tau+t)}, \tag{7}$$

$$m=m_0e^{-\alpha(\tau+t)\xi}e^{-\beta(\tau+t)}. \tag{8}$$

Здесь приняты обозначения:

τ - время существования стержня (крана) в условиях агрессивной среды до начала работы в конкретном цикле;

t - текущее время работы стержня (крана) в конкретном цикле;

α и β - параметры, определяемые экспериментальным путем.

Учитывая тот факт, что τ гораздо больше чем t, (для крана τ измеряется десятилетиями, а t - часами) в зависимостях (7) и (8) в одном из сомножителей можно пренебречь значением t.

Получаем

$$EJ = EJ_0 e^{-\alpha\tau\xi} e^{-\beta(\tau+t)}, \qquad (9)$$

$$m = m_0 e^{-\alpha\tau\xi} e^{-\beta(\tau+t)} \qquad (10)$$

В таком случае дифференциальные уравнения (5) и (6), описывающие свободные колебания стержня, примут вид:

$$\ddot{T}(t) + p^2 T(t) = 0, \qquad (11)$$

$$y^{(4)} - 2\alpha\tau y^{(3)} + \alpha^2\tau^2 y^{(2)} - k^4 y = 0, \qquad (12)$$

где

$$k^4 = l^4 \frac{m_0 p^2}{EJ_0}. \qquad (13)$$

Это выражение, решенное относительно p, дает общую формулу для расчета частоты собственных колебаний стержней

$$p = \frac{k^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}, \qquad (14)$$

где коэффициент k зависит от условий закрепления стержней.

Уравнение (11) свободных гармонических колебаний имеет общее решение

$$T(t) = A_1 \cos pt + A_2 \sin pt.$$

Общий интеграл уравнения (12) имеет вид

$$y(\xi)=c_1+c_2\xi+c_3e^{\alpha\tau\xi}+c_4\xi\cdot e^{\alpha\tau\xi},\quad \text{при } k^2=0, \tag{15}$$

$$y(\xi)=e^{\frac{\alpha\tau\xi}{2}}\left(c_1e^{\lambda_1\xi}+c_2e^{-\lambda_1\xi}+c_3e^{\lambda_2\xi}+c_4e^{-\lambda_2\xi}\right),\quad \text{при } 0<k^2<\frac{\alpha^2\tau^2}{4}, \tag{16}$$

$$y(\xi)=e^{\frac{\alpha\tau\xi}{2}}\left(c_1e^{\lambda_1\xi}+c_2e^{-\lambda_1\xi}+c_3\xi+c_4\right),\quad \text{при } k^2=\frac{\alpha^2\tau^2}{4}, \tag{17}$$

$$y(\xi)=e^{\frac{\alpha\tau\xi}{2}}\left(c_1e^{\lambda_1\xi}+c_2e^{-\lambda_1\xi}+c_3\cos\lambda_2\xi+c_4\sin\lambda_2\xi\right),\quad \text{при } k^2>\frac{\alpha^2\tau^2}{4}. \tag{18}$$

Здесь

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{\alpha^2\tau^2}{4}+k^2},\qquad \lambda_2=\sqrt{\left|\frac{\alpha^2\tau^2}{4}-k^2\right|}. \tag{19}$$

Окончательный вид решения получится после определения постоянных c_1, c_2, c_3, c_4, исходя из удовлетворения граничным условиям закрепления концов стержня.

3. Рассмотрим стержень, концы которого расположены на жестких шарнирных опорах, и ширина $b(1,0)$ при $t=0$ концевого сечения для $\xi=1$ составляет 0,8 или 0,6 от ширины $b(0,0)$ концевого сечения для $\xi=0$, т.е. $e^{-\alpha\tau}=0{,}8$ или $0{,}6(\alpha\tau=0{,}22;0{,}52)$ за счет дополнительного источника, вызывающего коррозию, и расположенного возле конца $\xi=1$.

Граничными условиями для шарнирных опор являются

$$y(0)=0,\qquad y''(0)=0,\qquad y(1)=0,\qquad y''(1)=0. \tag{20}$$

Задача заключается в определении отличного от нуля решения дифференциального уравнения (12), удовлетворяющего граничным условиям (20).

Из удовлетворения граничным условиям (20) следует, что решения (15), (16), (17) представляют собой одно решение $y(\xi)=0$, так как граничным условиям удовлетворяют единственные значения неизвестных постоянных $c_1=c_2=c_3=c_4=0$ для рассматриваемых случаев.

Подставляя в граничные условия (20) решение (18). получаем однородную систему уравнений относительно неизвестных c_1, c_2, c_3, c_4. Чтобы получить отличные от нуля решения системы, приравниваем к нулю ее определитель и получаем частотное уравнение в виде определителя четвертого порядка. Развертывая определитель в строку, приходим к уравнению для определения частот в виде

$$\sin\lambda_2\left(e^{-\lambda_1}-e^{\lambda_1}\right)\left[2\alpha\tau\lambda_1\left(\alpha\tau\lambda_1+2k^2\right)-\left(\alpha\tau\lambda_1+2k^2\right)^2+\alpha^2\tau^2\lambda_2^2\right]+$$
$$+2\alpha^2\tau^2\lambda_1\lambda_2\cos\lambda_2\left(e^{-\lambda_1}+e^{\lambda_1}\right)-4\alpha^2\tau^2\lambda_1\lambda_2=0. \tag{21}$$

Корни этого уравнения, соответствующие первому тону для низшей формы колебаний, дают следующие формулы частот

$$p=\frac{9{,}8434}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}} \quad \text{для } \alpha\tau=0{,}52;\; e^{-\alpha\tau}=0{,}6. \tag{22}$$

$$p=\frac{9{,}7877}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}} \quad \text{для } \alpha\tau=0{,}92;\; e^{-\alpha\tau}=0{,}4. \tag{23}$$

Если сравнить полученные результаты с аналогичной частотой для стержня постоянного сечения, для которой коэффициент в формуле частоты (14) в случае шарнирного опирания концов стержня равен $k^2=\pi^2=9{,}8696...$, то видно, что уменьшение ширины поперечного сечения от одного конца стержня к другому до $60(40)\%$ незначительно влияет на величину частотного коэффициента $0{,}83(0{,}25)\%$. Рассмотрим консольный стержень с жестко заделанным одним концом $\xi=0$. Граничные условия в этом случае выражаются равенствами

$$y(0)=0;\;\; y'(0)=0;\;\; y''(1)=0;\;\; y'''(1)=0. \tag{24}$$

Как и в предыдущем случае, решения (15), (16), (17) дифференциального уравнения (12), удовлетворяющие граничным условиям (24), представляют собой одно решение $y(\xi)=0.$ Решение (18) в данном случае запишем в виде

$$y(\xi)=e^{\frac{\alpha\tau\xi}{2}}\left(c_1 ch\lambda_1\xi + c_2 sh\lambda_1\xi + c_3\cos\lambda_2\xi + c_4\sin\lambda_2\xi\right), \tag{25}$$

где λ_1 и λ_2 определяются выражениями (19), а $4k^2 > \alpha^2\tau^2$.

Подставляя граничные условия (24) в решение (25), получаем однородную систему уравнений относительно неизвестных c_1, c_2, c_3, c_4. Чтобы получить отличные от нуля решения системы, приравниваем нулю ее определитель и получаем частотное уравнение, которое приводим к виду

$$(a_{11}-b_{11})(\lambda_2 a_{22}-\lambda_1 b_{22})-(a_{21}-b_{21})(\lambda_2 a_{12}-\lambda_1 b_{12})=0, \tag{26}$$

где

$$a_{11}=\left(\frac{\alpha^2\tau^2}{4}+r_1^2\right)chr_1+\alpha\tau r_1 shr_1 = f_1\left(r_1, r_1^2, chr_1, shr_1\right),$$

$$a_{21}=\left(\frac{\alpha^3\tau^3}{8}+3\frac{\alpha\tau}{2}r_1^2\right)chr_1+\left(3\frac{\alpha^2\tau^2}{4}r_1+r_1^3\right)shr_1 = f_2\left(r_1, r_1^2, r_1^3, chr_1, shr_1\right),$$

$$a_{12}=f_1\left(r_1, r_1^2, shr_1, chr_1\right),\ \ a_{22}=f_2\left(r_1, r_1^2, r_1^3, shr_1, chr_1\right),$$

$$b_{11}=f_1\left(-r_2, -r_2^2, \cos r_2, \sin r_2\right);\ \ b_{21}=f_2\left(-r_2, -r_2^2, r_2^3, \cos r_2, \sin r_2\right),$$

$$b_{12}=f_1\left(r_2, -r_2^2, \sin r_2, \cos r_2\right);\ \ b_{22}=f_2\left(r_2, -r_2^2, -r_2^3, \sin r_2, \cos r_2\right);$$

$$r_1=\lambda_1, r_2=\lambda_2.$$

Определяя корни уравнения (26), соответствующие первой форме колебаний, получаем следующие формулы частот

$$p=\frac{4{,}6265}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}} \quad \text{для} \quad \alpha\tau=0{,}92,\ \ e^{-\alpha\tau}=0{,}4;$$

$$p=\frac{4{,}1138}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}} \quad \text{для} \quad \alpha\tau=0{,}52,\ \ e^{-\alpha\tau}=0{,}6;$$

$$p=\frac{3{,}7597}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}} \quad \text{для} \quad \alpha\tau=0{,}22,\ \ e^{-\alpha\tau}=0{,}8.$$

Сравнивая полученные результаты с частотным коэффициентом $k^2 = 3{,}5156$ для аналогичной формы колебаний консольного стержня постоянного сечения, видим, что уменьшение ширины поперечного сечения от заделанного конца к свободному до 40% приводит к увеличению коэффициента частоты на 17%.

Рассмотрим теперь случай, когда все линейные размеры поперечного сечения с течением времени и с изменением длины уменьшаются по экспоненциальному закону и следовательно, изменение массы единицы длины и момента инерции сечения определяется следующими зависимостями, аналогичными (9), (10)

$$EJ = EJ_0 e^{-4\alpha\tau\xi} e^{-4\beta(\tau+t)}, \tag{27}$$

$$m = m_0 e^{-2\alpha\tau\xi} e^{-2\beta(\tau+t)}. \tag{28}$$

В этом случае дифференциальные уравнения (5) и (6) примут вид:

$$\ddot{T}(t) + p^2 e^{-2\beta(\tau+t)} T(t) = 0, \tag{29}$$

$$y^{(4)} - 8\alpha\tau y^{(3)} + 16\alpha^2\tau^2 y^{(2)} - k^4 e^{2\alpha\tau\xi} y = 0. \tag{30}$$

С помощью замены $\theta = \dfrac{1}{\beta} p e^{-\beta(\tau+t)}$ уравнение (29) приводится к уравнению Бесселя и общий интеграл уравнения (29) выражается через функции Бесселя нулевого порядка

$$T(t) = A_1 J_0(\theta) + A_2 N_0(\theta). \tag{31}$$

Общий интеграл уравнения (30) имеет вид:

$$y(\xi) = u^4 [c_1 J_4(u) + c_2 N_4(u) + c_3 J_4(u) + c_4 k_4(u)], \tag{32}$$

где

$$u = \frac{2k}{\alpha\tau} e^{\frac{\alpha\tau\xi}{2}}.$$

Так как τ гораздо больше, чем t, то уравнение (29) можно упростить, пренебрегая значением t в показателе степени при e, по сравнению с τ. Уравнение (29) примет вид обычного уравнения свободных гармонических колебаний

$$\ddot{T}(t)+p^2e^{-2\beta\tau}T(t)=0, \tag{33}$$

общее решение которого

$$T(t)=A_1\cos e^{-\beta\tau}pt+A_2\sin e^{-\beta\tau}pt. \tag{34}$$

В случае, когда значения параметров таковы, что произведение $2\alpha\tau\xi$ невелико, разложим $e^{2\alpha\tau\xi}$ в ряд и удержим неполных первых три члена ряда, заменив ξ средним значением, тогда в первом приближении уравнение (30) примет вид, аналогичный уравнению (12), решение которого мы уже рассматривали:

$$y^{(4)}-8\alpha\tau y^{(3)}+16\alpha^2\tau^2y^{(2)}-k^4\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)^2y=0. \tag{35}$$

Проведя аналогичные преобразования для консольного стержня, например, получаем следующие, соответствующие первой форме колебаний, приближенные формулы частотного множителя в (34)

$$p=\frac{5{,}079}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}, \quad \text{для } \alpha\tau=0{,}52;\ e^{-\alpha\tau}=0{,}6;$$

$$p=\frac{4{,}120}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}, \quad \text{для } \alpha\tau=0{,}22;\ e^{-\alpha\tau}=0{,}8.$$

Можно предложить, что линейные размеры поперечного сечения стержня, вследствие коррозии, с течением времени изменяются обратно пропорционально времени нахождения стержня в условиях агрессивной среды. Существование дополнительного источника, вызывающего коррозию, вблизи одного из концов стержня приводит к тому, что по длине стержня интенсивность коррозии неравномерна, вследствие чего линейные размеры сечения уменьшаются по параболическому закону еще и вдоль длины стержня. В таком случае получаем для массы единицы длины и момента инерции стержня следующие зависимости

$$EJ = EJ_0 \frac{[\alpha(\tau+t)\xi - 1]^8}{[\beta(\tau+t)+1]^4}, \tag{36}$$

$$m = m_0 \frac{[\alpha(\tau+t)\xi - 1]^4}{[\beta(\tau+t)+1]^2}. \tag{37}$$

Принимая во внимание то, что $\tau \rangle\rangle t$, пренебрегаем слагаемым $\alpha t\xi$ по сравнению с $\alpha\tau\xi$ и приходим к более простым выражениям

$$EJ = EJ_0 \frac{(\alpha\tau\xi - 1)^8}{[\beta(\tau+t)+1]^4}, \tag{38}$$

$$m = m_0 \frac{(\alpha\tau\xi - 1)^4}{[\beta(\tau+t)+1]^2}. \tag{39}$$

С учетом зависимостей (38), (39) дифференциальные уравнения (5) и (6), описывающие свободные колебания стержня, примут вид:

$$\ddot{T}(t) + p^2 \frac{1}{(\beta\tau + \beta t + 1)^2} T(t) = 0, \qquad \beta \neq 0; \tag{40}$$

$$(\alpha\tau\xi - 1)^4 y^{(4)} + 16\alpha\tau(\alpha\tau\xi - 1)^3 y^{(3)} + 56\alpha^2\tau^2(\alpha\tau\xi - 1)^2 y^{(2)} - k^4 y = 0, \quad \alpha \neq 0. \tag{41}$$

Уравнение (40) есть уравнение Эйлера решением котрого является

$$T(t) = A_1(\beta\tau + \beta t + 1)^{\frac{1}{2}+\lambda} + A_2(\beta\tau + \beta t + 1)^{\frac{1}{2}-\lambda} \quad \text{при} \quad 1 - \frac{4p^2}{\beta^2} > 0,$$

$$T(t) = A_1(\beta\tau + \beta t + 1)^{\frac{1}{2}} + A_2(\beta\tau + \beta t + 1)^{\frac{1}{2}} \ln(\beta\tau + \beta t + 1) \quad \text{при} \quad 1 - \frac{4p^2}{\beta^2} = 0,$$

$$T(t) = A_1(\beta\tau + \beta t + 1)^{\frac{1}{2}} \cos\lambda \ln(\beta\tau + \beta t + 1) + A_2(\beta\tau + \beta t + 1)^{\frac{1}{2}} \sin\lambda \ln(\beta\tau + \beta t + 1)$$

$$\text{при} \quad 1 - \frac{4p^2}{\beta^2} < 0,$$

$$2\lambda = \sqrt{\left|1 - \frac{4p^2}{\beta^2}\right|}.$$

Общий интеграл уравнения (41) имеет вид

$$y(\xi) = c_1\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|^{-\frac{5}{2}+S_1} + c_2\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|^{-\frac{5}{2}-S_1} + c_3\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|^{-\frac{5}{2}+S_2} + c_4\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|^{-\frac{5}{2}-S_2},$$

если

$$\sqrt{\frac{k^4}{\alpha^4\tau^4} + 9} < 3 + \frac{25}{4};$$

$$y(\xi) = c_1\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|^{-\frac{5}{2}+S_1} + c_2\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|^{-\frac{5}{2}-S_1} + c_3\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|^{-\frac{5}{2}} + c_4\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|^{-\frac{5}{2}} \ln\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|,$$

если

$$\sqrt{\frac{k^4}{\alpha^4\tau^4} + 9} = 3 + \frac{25}{4};$$

$$y(\xi) = c_1\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|^{-\frac{5}{2}+S_1} + c_2\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|^{-\frac{5}{2}-S_1} + c_3\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|^{-\frac{5}{2}} \cos\left[S_2 \ln\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|\right] + c_4\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|^{-\frac{5}{2}} \sin\left[S_2 \ln\left|\xi - \frac{1}{\alpha\tau}\right|\right],$$

если

$$\sqrt{\frac{k^4}{\alpha^4\tau^4} + 9} > 3 + \frac{25}{4}.$$

Окончательный вид решения получится после определения неизвестных постоянных, исходя из удовлетворения начальным и граничным условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем, - М.: Гостехтеориздат, 1956.

2. Ватсон Г. Теория бесселевых функций, т.1, 1949.

3. Гохберг М.М. Металлические конструкции подъемно-транспортных машин. Л.: Машиностроение, 1969.

4. Грей Э. и Мэтьюз Г. Функции Бесселя и их приложения у физике и механике. 2-е издание, 1953.