

УДК 681.326.74.06

Човнюк Ю.В., к.т.н.<sup>1,2</sup>; Скіданов В.М., д.т.н.<sup>2</sup>; Діктерук М.Г., к.т.н.<sup>2</sup>;  
Комоцька С.Ю., асистент<sup>2</sup><sup>1</sup>Національний університет біоресурсів і природокористування  
України<sup>2</sup>Київський Національний університет будівництва і архітектури

**РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ РУХУ Й ОПТИМІЗАЦІЯ  
(МІНІМІЗАЦІЯ) ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ У  
ПРУЖНИХ КАНАТАХ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МАШИН ПРИ  
РІЗНИХ СПОСОБАХ ПІДЙОМУ ВАНТАЖУ**

***Анотація.** Наведений аналітичний розрахунок основних параметрів руху й проведена оптимізація (мінімізація) динамічних навантажень у пружних канатах вантажопідйомних машин при різних способах підйому вантажу (“з ваги”, “з підхватом”), і для різних режимів руху приводного механізму.*

***Ключові слова:** розрахунок, параметри руху, оптимізація, мінімізація, динамічні навантаження, пружний канат, вантажопідйомні машини, способи підйому вантажу.*

***Аннотация.** Приведен аналитический расчет основных параметров движения и проведена оптимизация (минимизация) динамических нагрузок в упругих канатах грузоподъемных машин при различных способах подъема груза (“с веса”, “с подхватом”) и для различных режимов движения приводного механизма.*

***Ключевые слова:** расчет, параметры движения, оптимизация, минимизация, динамические нагрузки, упругий канат, грузоподъемные машины, способы подъема груза.*

***Annotation.** An analytical calculation of the main parameters of motion is proposed and optimization (minimization) of the dynamic loading is conducted in the elastic ropes of hoisting machines clue to the different ways of getting up of load (so-called “from the weight”, “with picked-up”) and for the different modes of motion of drive mechanism.*

***Key words:** calculation, parameters of motion, ooptimization, minimization, dynamic loading, elastic rope, hoisting machines, methods of getting up of load.*

**Постановка проблеми.** Встановлено, що біля (80...90)% відмов сучасних вантажопідйомних машин у основному пов'язане з динамічними навантаженнями.

Зазвичай розрахунок навантажень включає: 1) складання розрахункових зв'язаних чи еквівалентних схем вантажопідйомного

механізму; 2) визначення величини і характеру зміни зовнішніх навантажень, які прикладені до системи; 3) визначення жорсткості пружних зв'язків; 4) складання диференціальних рівнянь руху мас системи; 5) знаходження пружних сил і моментів у ланцюгах приводу. Привод, як правило, складається з великої кількості зосереджених й розподілених мас, внаслідок чого теоретичне дослідження такої системи стає доволі складним або взагалі неможливим. З достатньою для практики точністю визначення максимальних динамічних навантажень у елементах механізмів підйому можна проводити за двомасовою системою з пружним ланцюгом.

Продуктивність і надійність вантажопідйомних машин, а також точність виконання ними розвантажувально-навантажувальних, транспортних і монтажних операцій суттєво залежать від динамічних навантажень саме у пружних елементах гнучких робочих органів, приводу і металоконструкцій. Величини цих навантажень залежать від ділянки руху вантажопідйомної машини чи її механізму. Найбільші динамічні навантаження виникають на ділянках перехідних процесів (пуск, гальмування, реверсування руху). В роботі [1] показано, що під час гальмування у процесі спуску вантажу коефіцієнт динамічності ( $K_a$ ) в пружних елементах (канатах) кранових механізмів досягає величини 2,5 і більше.

Одним із шляхів зменшення цих навантажень є вибір необхідних режимів руху як приводних механізмів на ділянках перехідних процесів, так і самого вантажу. Саме цій проблемі й присвячене дане дослідження.

**Аналіз публікацій по темі дослідження.** Як показують дослідження різних авторів [1–4], динамічні навантаження, визначені у пружному елементі за допомогою двомасової моделі, на (5...10)% відрізняються від дійсних динамічних навантажень. Автори [5, 6] проводять розрахунки режимів руху вантажопідйомних механізмів кранів за різних способів підйому вантажу: «з ваги», «з підхватом», а у роботі [7] здійснена мінімізація динамічних навантажень в канатах кранів для різних режимів руху приводу при підйомі вантажу «з ваги». Проте у цитованих вище роботах не досліджені режими руху вантажу, які мінімізують динамічні навантаження у канатах вантажопідйомних кранів, для різних способів підйому вантажу й різних (оптимальних за певною оцінкою [6]) режимів руху приводу у процесах пуску/гальмування вантажопідйомних механізмів.

Слід зазначити, що у даному дослідженні будуть частково використані результати робіт [5–7].

**Мета роботи.** Мета роботи полягає в обґрунтуванні аналітичним шляхом режимів руху вантажу вантажопідйомних кранів, за яких мінімізуються динамічні навантаження у канатах, для різних способів підйому «з ваги»/«з підхватом» і для різних режимів руху приводів вантажопідйомних механізмів кранів. Для досягнення мети даної роботи використаний апарат варіаційного числення та звичайних диференціальних рівнянь.

**Виклад основного змісту дослідження.** На рис.1 наведені типові еквівалентні схеми [5] для розрахунку параметрів руху й натягу у канаті підйомного механізму крана у процесі підйому вантажу для різних моделей власне канату (абсолютно жорсткий/пружний) і різних способів підйому («з ваги», «з підхватом»).

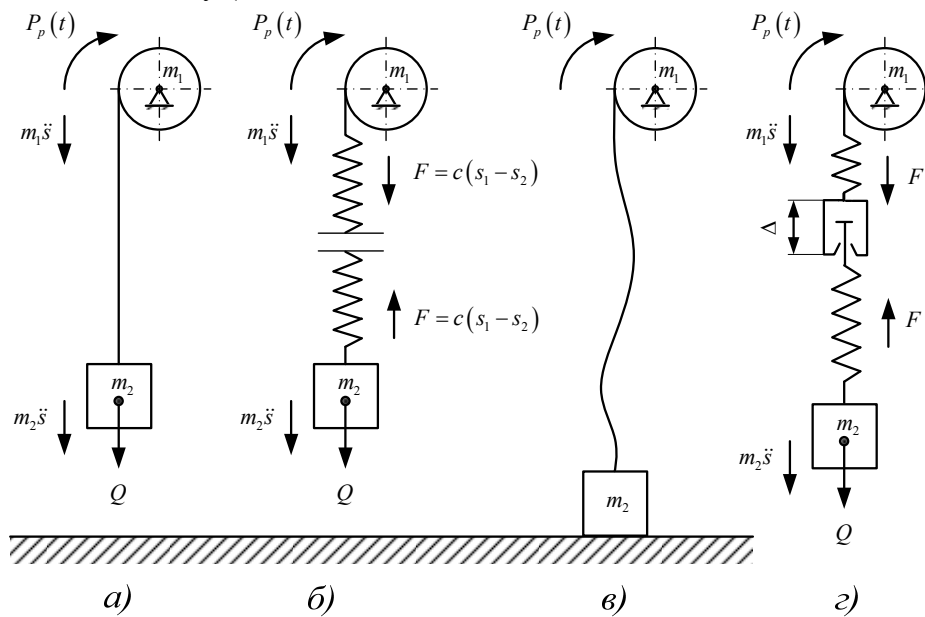


Рисунок 1. Еквівалентні схеми для розрахунку параметрів руху й натягу у канаті підйомного механізму у процесі підйому вантажу: а – “з ваги” абсолютно жорстким канатом; б – “з ваги” пружним канатом; в, з – “з підхватом”.

У роботі [6] наведено декілька можливих режимів руху приводного механізму на ділянці пуску: 1) режим руху з постійним прискоренням, який мінімізує величину рушійного моменту приводу; 2) режим руху з лінійною зміною прискорення, який мінімізує динамічну складову потужності приводу; 3) режим руху зі зміною прискорення по кривій третього порядку; 4) режим руху зі зміною прискорення по кривій п'ятого порядку. Останні два режими руху дають плавну зміну прискорень приводного механізму, що забезпечує зменшення коливань динамічних навантажень в пружних елементах.

Функція  $a_i = a_i(t), i = (\overline{1,4})$ , є функцією прискорення того або

іншого ( $i$  – го) режиму руху приводного механізму, яка залежить від часу і має наступний вид:

$$\begin{cases} a_1(t) = \frac{v_y}{t_p} = const, a_2(t) = \frac{2v_y}{t_p} \left(1 - \frac{t}{t_p}\right), \\ a_3(t) = \frac{12v_y}{t_p} \left(\frac{t}{t_p} - 2\frac{t^2}{t_p^2} + \frac{t^3}{t_p^3}\right), \\ a_4(t) = \frac{60v_y}{t_p} \cdot \left[1 - \frac{3t}{t_p} + 3\frac{t^2}{t_p^2} - \frac{t^3}{t_p^3}\right] \cdot \frac{t^2}{t_p}, \end{cases} \quad (1)$$

де  $v_y$  – швидкість сталого руху вантажу під час підйому;  $t_p$  – тривалість розгону вантажу.

Розглянемо перший з випадків, зображених на рис.1, а саме: підйом вантажу «з ваги» абсолютно жорстким канатом. Застосовуючи принцип Даламбера, складемо по схемі, зображеній на рис.1, а рівняння динаміки системи:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{S} = P_n + Q, \\ m_2 \cdot \ddot{S} = -Q, \end{cases} \quad (2)$$

де  $m_1$  й  $m_2$  – приведені маси приводу й вантажу, відповідно;  $S$  – переміщення вантажу;  $Q = m_2 \cdot g$  – вага вантажу;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $P_n(t) = (m_1 + m_2) \cdot a_i(t)$ .

Після перетворення (2) матимемо:

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{S} = P_n(t) = (m_1 + m_2) \cdot a_i(t), \ddot{S} = \frac{P_n(t)}{(m_1 + m_2)}. \quad (3)$$

Для знаходження динамічного зусилля, діючого на канат при підйомі вантажу слід величину  $m_2 \cdot \ddot{S}$  скласти зі статичним опором  $Q$ , тобто матимемо:

$$F = m_2 \cdot \ddot{S} + m_2 g = \frac{m_2 \cdot P_n(t)}{(m_1 + m_2)} + m_2 g. \quad (4)$$

Коефіцієнт динамічності для канату має вигляд:

$$K_d(t) = \frac{m_2 \cdot \ddot{S} + m_2 g}{m_2 g} = 1 + \frac{\ddot{S}}{g} = 1 + \frac{a_i(t)}{g}. \quad (5)$$

У якості критерію якості руху при підйомі вантажу оберемо наступний:

$$\int_0^{t_p} K_d^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (6)$$

Необхідною умовою досягнення критерію (6) є умова Ейлера-

Пуассона:

$$S^{(IV)} = 0. \quad (7)$$

Саме ця умова визначає закон руху вантажу, який реалізує критерій якості руху (6). З рівнянь (3) та (7) маємо:

$$\begin{cases} \ddot{S} = a_i(t), \\ S^{(IV)} = 0, \end{cases} \Rightarrow \ddot{a}_i(t) = 0. \quad (8)$$

Якщо  $a_i(t)$  не задовольняє (8), то такий режим руху приводного механізму не можна вважати оптимальним у сенсі реалізації критерію (6). Для  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  умова (8) виконується, а для  $a_3(t)$ ,  $a_4(t)$  – ні. Для кожного з режимів  $K_d(t)$  визначаємо з (5). Розв'язок (7) відшукуємо за наступних умов:

$$t = 0 : S = 0, \dot{S} = 0, \ddot{S} = a_i(0), t = t_p : \dot{S} = v_y. \quad (9)$$

Закон руху  $S(t)$ , який реалізує критерій (6), є наступним:

$$S(t) = \frac{a_i(0) \cdot t^2}{2} + \left[ \frac{v_y}{3t_p^2} - \frac{a_i(0)}{3t_p} \right] \cdot t^3. \quad (10)$$

Для оптимальних режимів підйому вантажу маємо:

$$K_d^{(1)}(t) = 1 + \frac{v_y}{t_p g}; K_d^{(2)}(t) = 1 + \frac{2v_y}{t_p g} \left( 1 - \frac{t}{t_p} \right), \quad (11)$$

де  $K_d^{(i)}(t)$  – коефіцієнт динамічності  $i$ -го режиму руху приводного механізму.

Для  $i = 1, 2$  вказані значення  $K_d^{(i)}(t)$  є мінімальними. Для режимів  $i = 3, 4$  цього стверджувати не можна:

$$\begin{aligned} K_d^{(3)}(t) &= 1 + \frac{12v_y}{t_p g} \left( \frac{t}{t_p} - 2\frac{t^2}{t_p^2} + \frac{t^3}{t_p^3} \right); \\ K_d^{(4)}(t) &= 1 + \frac{60v_y}{t_p g} \left( 1 - \frac{t}{t_p} \right)^3 \cdot \frac{t^2}{t_p^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

При врахуванні пружності канату (рис.1, б) рух механічної системи описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{S}_1 + C(S_1 - S_2) = P_H + Q, \\ m_2 \cdot \ddot{S}_2 - C(S_1 - S_2) = -Q, \end{cases} \quad (13)$$

де  $S_1$  й  $S_2$  – незалежні переміщення приведеної маси механізму  $m_1$  й вантажу  $m_2$ ;  $C$  – приведена жорсткість канату;  $P_H(t)$  визначене

вище.

Якщо ввести нову змінну  $S = S_1 - S_2$  (і, відповідно,  $\ddot{S} = \ddot{S}_1 - \ddot{S}_2$ ), знайдемо з (13):

$$\ddot{S} + k^2 \cdot S = \frac{P_H(t)}{m_1} + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} Q = \frac{P_H(t)}{m_1} + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot g, \quad (14)$$

де  $k^2 = \frac{C \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 m_2}$ . Рівняння (14) можна подати у формі:

$$\ddot{S} + k^2 \cdot S = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot (a_i(t) + g). \quad (15)$$

Якщо у якості критерію якості руху обрати (6), тоді можна записати:

$$\int_0^{t_2} \left( \frac{C}{m_2 g k^2} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} [a_i(t) + g] - \ddot{S} \right\}^2 dt \Rightarrow \min. \quad (16)$$

Необхідною умовою реалізації критерію (16) є наступне рівняння Ейлера-Пуассона:

$$S^{(IV)} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \ddot{a}_i(t). \quad (17)$$

Для того, щоб розв'язати рівняння (17), слід використати наступні умови:

$$t = 0: S = \frac{m_2 g}{C}, \dot{S} = 0, \quad (18)$$

$$\ddot{S} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} [a_i(0) + g] - k^2 \frac{m_2 g}{C}, \ddot{\ddot{S}} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \dot{a}_i(0).$$

Для того, щоб розв'язати рівняння (17) за умов (18), слід знайти для кожного  $i$ -го режиму руху приводу значення  $a_i(0)$ ;  $\dot{a}_i(0)$ ;  $\ddot{a}_i(t)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1, a_1(0) = \frac{v_y}{t_p}, \dot{a}_1(0) = 0, \ddot{a}_1(t) = 0, \\ i = 2, a_2(0) = \frac{2v_y}{t_p}, \dot{a}_2(0) = -\frac{2v_y}{t_p^2}, \ddot{a}_2(t) = 0, \\ i = 3, a_3(0) = 0, \dot{a}_3(0) = \frac{12v_y}{t_p^2}, \ddot{a}_3(t) = \frac{12v_y}{t_p} \left[ -\frac{4}{t_p^2} + \frac{6t}{t_p^3} \right], \\ i = 4, a_4(0) = 0, \dot{a}_4(0) = 0, \ddot{a}_4(t) = \frac{60v_y}{t_p} \left[ \frac{2}{t_p^2} - \frac{18t}{t_p^3} + \frac{36t^2}{t_p^4} - 20 \frac{t^3}{t_p^5} \right]. \end{array} \right. \quad (19)$$

Для режимів руху приводу вантажопідйомного механізму  $i = 1, 2$  маємо наступні закони руху, які реалізують критерій (6):

$$\left\{ \begin{aligned} S^{(1)}(t) &= \frac{m_2 g}{C} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \left[ \frac{v_y}{t_p} + g \right] - k^2 \frac{m_2 g}{C} \right\} \cdot t^2, \\ S^{(2)}(t) &= \frac{m_2 g}{C} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \left[ \frac{2v_y}{t_p} + g \right] - \frac{k^2 m_2 g}{C} \right\} \cdot t^2 - \\ &\quad - \frac{(m_1 + m_2)v_y}{3m_1 t_p^2} \cdot t^3. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Для режимів руху вказаного приводу  $i = 3, 4$  закони руху  $S^{(3)}(t)$ ,  $S^{(4)}(t)$ , які реалізують критерій (6), мають вид:

$$\left\{ \begin{aligned} S^{(3)}(t) &= \frac{m_2 g}{C} + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{2v_y}{t_p^2} t^3 - \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{2v_y}{t_p^3} t^4 + \\ &\quad + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{3v_y t^5}{5t_p^4}, \\ S^{(4)}(t) &= \frac{m_2 g}{C} + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{5v_y}{t_p^3} t^4 - \\ &\quad - \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{9v_y}{t_p^4} t^5 + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{6v_y}{t_p^5} t^6 - \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{10v_y}{7t_p^6} t^7. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Після нескладних спрощень вирази (20), (21) можна подати у наступному вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} S^{(1)}(t) &= \frac{m_2 g}{C} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{v_y}{t_p} \cdot t^2, \\ S^{(2)}(t) &= \frac{m_2 g}{C} + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{v_y}{t_p} \cdot t^2 - \frac{(m_1 + m_2)v_y}{3m_1 t_p^2} \cdot t^3, \\ S^{(3)}(t) &= \frac{m_2 g}{C} + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{v_y}{t_p^2} t^3 \left\{ 2 - 2 \frac{t}{t_p} + 3 \frac{t^2}{5t_p^2} \right\}, \\ S^{(4)}(t) &= \frac{m_2 g}{C} + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{v_y}{t_p^3} t^4 \left\{ 5 - 9 \frac{t}{t_p} + 6 \frac{t^2}{t_p^2} - \frac{10}{7} \cdot \frac{t^3}{t_p^3} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Для кожного з  $S^{(i)}(t)$  режимів руху вантажопідйомного механізму отримаємо наступні (мінімальні) значення  $K_d^{(i)}(t)$ :

$$K_d^{(i)}(t) = 1 + \frac{a_i(t)}{g} - \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{\ddot{S}^{(i)}}{g}, \quad i = (\overline{1, 4}). \quad (23)$$

Знайдемо  $\ddot{S}^{(i)}$  для кожного  $i$ -го режиму руху приводу:

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1, a_1(t) = \frac{v_y}{t_p}, \ddot{S}^{(1)} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{v_y}{t_p}, \\ i = 2, a_2(t) = \frac{2v_y}{t_p} \left( 1 - \frac{t}{t_p} \right), \ddot{S}^{(2)} = \frac{(m_1 + m_2)v_y}{m_1 t_p} \left\{ 2 - 2 \frac{t}{t_p} \right\}, \\ i = 3, a_3(t) = \frac{12v_y}{t_p} \cdot \left( \frac{t}{t_p} - 2 \frac{t^2}{t_p^2} + \frac{t^3}{t_p^3} \right), \\ \ddot{S}^{(3)} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{v_y}{t_p^2} \left\{ 12t - 24 \frac{t^2}{t_p} + 12 \frac{t^3}{5t_p^2} \right\}, \\ i = 4, a_4(t) = \frac{60v_y}{t_p} \cdot \left[ 1 - \frac{3t}{t_p} + 3 \frac{t^2}{t_p^2} - \frac{t^3}{t_p^3} \right] \frac{t^2}{t_p^2}, \\ \ddot{S}^{(4)} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{v_y}{t_p^3} \left\{ 60t^2 - 180 \frac{t^3}{t_p} + 180 \frac{t^4}{t_p^2} - 60 \frac{t^5}{t_p^3} \right\}. \end{array} \right. \quad (24)$$

Тоді вирази (23) приймають наступний вид:

$$K_d^{(1)} = 1 ; K_d^{(2)} = 1 ; K_d^{(3)} = 1 ; K_d^{(4)} = 1. \quad (25)$$

Це означає, що для всіх режимів руху приводу коефіцієнт динамічності набуває ідеального значення (тобто вантажопідйомний механізм працює без перевантажень!).

Для того, щоб знайти закон руху вантажу для кожного  $i$ -го режиму руху приводу, слід підставити вирази (22), кожний з яких помножений на  $C$ , у друге рівняння системи (13), тоді матимемо:

$$m_2 \ddot{S}_2^{(i)} - C \cdot S^{(i)} = -m_2 g \quad (26)$$

Або:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_2 \cdot \ddot{S}_2^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{v_y}{t_p} \cdot t^2, \\ m_2 \cdot \ddot{S}_2^{(2)} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{Cv_y}{t_p} \left\{ t^2 - \frac{t^3}{3t_p} \right\}, \\ m_2 \cdot \ddot{S}_2^{(3)} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{Cv_y t^3}{t_p^2} \left\{ 2 - 2 \frac{t}{t_p} + 3 \frac{t^2}{5t_p^2} \right\}, \\ m_2 \cdot \ddot{S}_2^{(4)} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{Cv_y t^4}{t_p^3} \left\{ 5 - 9 \frac{t}{t_p} + 6 \frac{t^2}{t_p^2} - \frac{10}{7} \frac{t^3}{t_p^3} \right\}. \end{array} \right. \quad (27)$$

Оскільки початкові умови нульові:  $t = 0, S_2^{(i)} = 0, \dot{S}_2^{(i)} = 0$ , тоді розв'язок (27) можна подати наступним чином:



$$\left\{ \begin{aligned} S_2^{(1)}(t) &= k^2 \cdot \frac{v_y}{t_p} \cdot \frac{t^4}{24}, \\ S_2^{(2)}(t) &= k^2 \cdot \frac{v_y}{t_p} \left\{ \frac{t^4}{12} - \frac{t^5}{60t_p} \right\}, \\ S_2^{(3)}(t) &= k^2 \cdot \frac{v_y}{t_p^2} \left\{ \frac{t^5}{10} - \frac{t^6}{15t_p} + \frac{t^7}{70t_p^2} \right\}, \\ S_2^{(4)}(t) &= k^2 \cdot \frac{v_y}{t_p^3} \left\{ \frac{t^6}{6} - \frac{3 t^7}{14 t_p} + \frac{3 t^8}{28 t_p^2} - \frac{5 t^9}{252 t_p^3} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (28)$$

Саме за таких законів руху  $S_2^{(i)}(t)$ ,  $i = \overline{(1,4)}$ , вантажу на канаті можливий ідеальний (без перевантажень,  $K_d^{(i)} = 1$ , протягом  $t \in [0, t_p]$ ) режим підйому вантажу. По суті, отримані результати дозволяють стверджувати, що у межах двомасової моделі для пружного канату можна, користуючись такими (28) законами підйому вантажу, досягти оптимальних (мінімальних) навантажень на канат і до того ж працювати з приводом підйомного механізму крана у оптимальних режимах, визначених у роботі [6]. Таким чином, за допомогою мехатронних пристроїв керування приводом і рухом канату з вантажем, можна досягти т.з. “optimum optimorum”.

Разом з тим, в межах моделі жорсткого канату значення  $K_d^{(i)}(t)$  мінімальні, проте далекі від ідеальних значень ( $K_d^{(i)} \equiv 1$ ).

Чисельні розрахунки для значень параметрів:  $v_y = 0,5 \text{ М/с}$ ;  $t_p = 2,0 \text{ с}$  [7] дають для  $t = 0$ ,  $t = 1 \text{ с}$  й  $t = t_p$  наступні оцінки (див. таблицю).

Таблиця. Значення  $K_d^{(i)}(t)$  для абсолютно жорсткого канату при підйомі “з ваги”.

$i$	$t, \text{ с}$		
	0	$t=1,0 \text{ с}$	$t_p=2,0 \text{ с}$
1	1,025	1,025	1,025
2	1,051	1,025	1,000
3	1,000	1,038	1,000
4	1,000	1,048	1,000

Розглянемо далі режим підйому вантажу «з підхватом» за допомогою пружного канату (рис.1,в, г).

Рівняння динаміки, які описують рух системи, зображеної на рис.1,в нічим не будуть відрізнятись від отриманих, у чому легко впевнитись, співставляючи обидві розрахункові схеми. Вирази, які

визначають у загальному виді розв'язок вихідних рівнянь для  $S(t)$  й  $\dot{S}(t)$ , а також інші знайдені співвідношення для системи, зображеної на рис.1,б, будуть такими ж, як і для системи, показаної на рис.1,в. Однак, у обох випадках початкові умови руху різні. Якщо при підйомі вантажу «з ваги» канат перед початком руху вже має деформацію розтягу від статичного навантаження, а швидкість системи при цьому дорівнює нулю, тоді як при підйомі вантажу «з підхватом» у початковий момент деформація канату дорівнює нулю (оскільки вага вантажу сприймається основою), але приведена маса приводу у процесі вибирання слабкості канату має швидкість, яка дорівнює або близька до номінальної. Таким чином, для систем, зображених на рис.1,в, з початковими умовами будуть наступні:

При

$$t = 0 : S = 0; \dot{S} = v_y; \ddot{S} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot [a_i(0) + g]; \ddot{\dot{S}} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \dot{a}_i(0). \quad (29)$$

Для режимів руху приводу вантажопідйомного механізму  $i = 1, 2$  маємо наступні закони руху, які реалізують (6):

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n^{(1)}(t) = v_y \cdot t + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \left[ \frac{v_y}{t_p} + g \right] \right\} \cdot t^2; \\ S_n^{(2)}(t) = v_y \cdot t + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \left[ \frac{2v_y}{t_p} + g \right] \right\} \cdot t^2 - \\ - \frac{(m_1 + m_2)v_y}{3m_1 t_p^2} \cdot t^3. \end{array} \right. \quad (30)$$

У (30) і подальших співвідношеннях індекс «п» означає, що рух відбувається при підйомі вантажу «з підхватом».

Для режимів руху вказаного приводу  $i = 3, 4$  закони руху  $S_n^{(3)}(t)$  й  $S_n^{(4)}(t)$ , які реалізують критерій (6), мають вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n^{(3)}(t) = v_y t + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{2v_y}{t_p^2} t^3 - \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{2v_y}{t_p^3} t^4 + \\ + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{3v_y t^5}{5t_p^4}, \\ S_n^{(4)}(t) = v_y t + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{5v_y}{t_p^3} t^4 - \\ - \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{9v_y}{t_p^4} t^5 + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{6v_y}{t_p^5} t^6 - \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{10v_y}{7t_p^6} t^7. \end{array} \right. \quad (31)$$

Після нескладних спрощень вирази (30) й (31) можна подати у

наступному вигляді:

$$\begin{cases} S_n^{(1)}(t) = v_y t + \frac{1}{2} \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \left( \frac{v_y}{t_p} + g \right) \cdot t^2; \\ S_n^{(2)}(t) = v_y t + \frac{1}{2} \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \left( \frac{2v_y}{t_p} + g \right) t^2 - \frac{(m_1 + m_2)v_y}{3m_1 t_p^2} t^3; \\ S_n^{(3)}(t) = v_y t + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{v_y}{t_p^2} t^3 \cdot \left\{ 2 - 2 \frac{t}{t_p} + 3 \frac{t^2}{5t_p^2} \right\}; \\ S_n^{(4)}(t) = v_y t + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \frac{v_y}{t_p^3} t^4 \cdot \left\{ 5 - 9 \frac{t}{t_p} + 6 \frac{t^2}{t_p^2} - \frac{10}{7} \frac{t^3}{t_p^3} \right\}. \end{cases} \quad (32)$$

Для кожного з  $S_n^{(i)}(t)$  режимів руху вантажопідйомного механізму отримуємо наступні (мінімальні) значення  $K_{дп}^{(i)}(t)$ , що співпадають з правою частиною співвідношень (23).  $\ddot{S}_n^{(i)}$  для кожного  $i$ -го режиму руху приводу аналогічні (24). Вирази, які визначають  $K_{дп}^{(i)}(t)$ , приймають ідеальні значення і у випадку підйому вантажу «з підхватом»:

$$K_{дп}^{(1)} = K_{дп}^{(2)} = K_{дп}^{(3)} = K_{дп}^{(4)} = 1. \quad (33)$$

Міркування, наведені при виведенні співвідношення (26), повторюються і у випадку підйому вантажу «з підхватом». Тому, замість (27) тепер маємо:

$$\begin{cases} m_2 \cdot \ddot{S}_{2n}^{(1)} = C v_y t + \frac{1}{2} \cdot \frac{C(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \left[ \frac{v_y}{t_p} + g \right] \cdot t^2 - m_2 g; \\ m_2 \cdot \ddot{S}_{2n}^{(2)} = C v_y t + \frac{1}{2} \frac{(m_1 + m_2)C}{m_1} \cdot \left[ \frac{2v_y}{t_p} + g \right] \cdot t^2 - \frac{(m_1 + m_2)v_y C}{3m_1 t_p^2} t^3 - m_2 g; \\ m_2 \cdot \ddot{S}_{2n}^{(3)} = C v_y t + \frac{(m_1 + m_2)C v_y t^3}{m_1 t_p^2} \cdot \left\{ 2 - 2 \frac{t}{t_p} + 3 \frac{t^2}{5t_p^2} \right\} - m_2 g; \\ m_2 \cdot \ddot{S}_{2n}^{(4)} = C v_y t + \frac{(m_1 + m_2)C v_y t^4}{m_1 t_p^3} \cdot \left\{ 5 - 9 \frac{t}{t_p} + 6 \frac{t^2}{t_p^2} - \frac{10}{7} \frac{t^3}{t_p^3} \right\} - m_2 g. \end{cases} \quad (34)$$

Вважаючи, що початкові умови для  $S_{2n}(t)$  при  $t = 0$  нульові, тобто:  $t = 0, S_{2n}^{(i)} = 0; \dot{S}_{2n}^{(i)} = 0, i = \overline{(1,4)}$ , розв'язок (34) можна подати наступним чином:

$$\left\{ \begin{aligned} S_{2n}^{(1)}(t) &= \frac{C}{m_2} v_y \frac{t^3}{6} + \frac{1}{2} k^2 \cdot \left( \frac{v_y}{t_p} + g \right) \cdot \frac{t^4}{12} - g \frac{t^2}{2}; \\ S_{2n}^{(2)}(t) &= \frac{C}{m_2} v_y \frac{t^3}{6} + \frac{1}{2} k^2 \cdot \left( \frac{2v_y}{t_p} + g \right) \cdot \frac{t^4}{12} - \frac{k^2 v_y}{3t_p^2} \cdot \frac{t^5}{20} - g \frac{t^2}{2}; \\ S_{2n}^{(3)}(t) &= \frac{C}{m_2} v_y \frac{t^3}{6} + k^2 \frac{v_y}{t_p^2} \cdot \left\{ \frac{t^5}{10} - \frac{t^6}{15t_p} + \frac{t^7}{70t_p^2} \right\} - g \frac{t^2}{2}; \\ S_{2n}^{(4)}(t) &= \frac{C}{m_2} v_y \frac{t^3}{6} + k^2 \frac{v_y}{t_p^3} \cdot \left\{ \frac{t^6}{6} - \frac{3t^7}{14t_p} + \frac{3t^8}{28t_p^2} - \frac{5t^9}{252t_p^3} \right\} - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \right. \quad (35)$$

Подамо результати (35) у канонічному виді:

$$\left\{ \begin{aligned} S_{2n}^{(1)}(t) &= -\frac{gt^2}{2} + \frac{C}{m_2} v_y \frac{t^3}{6} + \frac{k^2}{24} \cdot \left( \frac{v}{t_p} + g \right) \cdot t^4; \\ S_{2n}^{(2)}(t) &= -\frac{gt^2}{2} + \frac{C}{m_2} v_y \frac{t^3}{6} + \frac{k^2}{24} \cdot \left( \frac{2v}{t_p} + g \right) \cdot t^4 - \frac{k^2 v_y t^5}{60t_p^2}; \\ S_{2n}^{(3)}(t) &= -\frac{gt^2}{2} + \frac{C}{m_2} v_y \frac{t^3}{6} + \frac{k^2 v_y}{t_p^2} \cdot \left\{ \frac{t^5}{10} - \frac{t^6}{15t_p} + \frac{t^7}{70t_p^2} \right\}; \\ S_{2n}^{(4)}(t) &= -\frac{gt^2}{2} + \frac{C}{m_2} v_y \frac{t^3}{6} + \frac{k^2 v_y}{t_p^3} \cdot \left\{ \frac{t^6}{6} - \frac{3t^7}{14t_p} + \frac{3t^8}{28t_p^2} - \frac{5t^9}{252t_p^3} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (36)$$

### Висновки

1. У межах двомасової моделі проведений аналітичний розрахунок параметрів руху вантажу на канаті, який розглядається як абсолютно жорсткий і як пружний елемент вантажопідйомного механізму крана, при різних способах підйому вантажу: «з ваги», «з підхватом».
2. Обґрунтовані режими руху вантажопідйомного механізму крана, які мінімізують динамічні навантаження у канатах при різних способах підйому вантажу («з ваги», «з підхватом»).
3. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку кінематично-силових параметрів механізмів підйому вантажу у процесах їх пуску/гальмування як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації, а також для оптимізації керування вказаними механізмами за допомогою мехатронних систем.

---

**ЛІТЕРАТУРА**

1. Волков Д. П. Динамические нагрузки в универсальных экскаваторах-кранах /Д. П. Волков. – М.: Машгиз, 1958. – 269 с.
2. Кожевников С. Н. Динамика нестационарных процессов в машинах / С. Н. Кожевников.- К.: Наукова думка, 1986. – 288 с.
3. Казак С.А. Динамика мостовых кранов / С.А. Казак.– М.: Машиностроение, 1968.–331 с.
4. Александров М.П. и др. Грузоподъемные машины / М.П. Александров и др. – М.: Машиностроение, 1986.–399 с.
5. Гоберман Л.А. Теория, конструкция и расчет строительных и дорожных машин / Л.А. Гоберман, К.В. Степанян, А.А. Яркин, В.С. Заленский. – М.: Машиностроение, 1979.–407 с.
6. Ловейкин В.С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин /В.С. Ловейкин. – К.: УМК ВО, 1990. – 166 с.
7. Ловейкін В.С. Мінімізація динамічних навантажень в пружних елементах вантажопідйомних машин / В.С. Ловейкін // Гірничі, будівельні, дорожні і меліоративні машини. – 1998. – Вип. 52. – С. 63-68.