УДК 539.3
DOI: 10.15276/pidtt.1.60.2019.07
Човнюк Ю. В. [1], Кравчук В. Т. [2], Комоцька С. Ю. [2], Марченко О. А. [2], Кадикало І. О. [1]
[1] *Національний університет біоресурсів і природокористування України*
[2] *Київський Національний університет будівництва і архітектури*

АНАЛІЗ ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ У ПРУЖНІЙ СТРІЧЦІ КОНВЕЄРА, ЯКА ПЕРЕМІЩУЄТЬСЯ ПО НЕРУХОМИХ КОТКАХ: ДВОХВИЛЬОВА ФОРМА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Анотація. *Розглянуті поздовжні коливання у пружній стрічці конвеєра, яка переміщується по нерухомих котках, і проведений їх аналіз методом професора Горошка О.О. Знайдені розв'язки початково-крайової задачі у двохвильовій формі. Отримані у роботі результати дозволяють оцінити залежність інтенсивності розсіювання енергії та зміни власних форм і частот від швидкості протяжки полоси по котках.*

Ключові слова: *аналіз, поздовжні коливання, пружна стрічка, конвеєр, нерухомі котки, двохвильова форма розв'язку.*

Постановка проблеми.

До поздовжніх коливань, як різновиду руху при деяких припущеннях зводиться задача про коливання підйомного канату у похилих підйомниках, коливання транспортерної стрічки, пружної полоси, що рухається по рольгангу та ін.

Здобути розв'язки рівнянь математичної фізики, що описують коливання пружних систем вказаного типу, за допомогою класичного методу розділення змінних (метод Фур'є) неможливо, оскільки у відповідних рівняннях присутні змішані (по просторовій та часовій координатах) похідні. Тому розв'язки таких рівнянь слід шукати, використовуючи інші підходи, зокрема, узагальнений метод розділення змінних, розроблений у роботі Каленюка П.Т. й Скоробогатько В.Я. [1] та професора Горошка О.О. та ін. [2].

Аналіз публікацій по темі дослідження.

Двохвильове представлення розв'язків диференціальних рівнянь, які описують динаміку деяких конструкцій з рухомим навантаженням, наведене у роботі [3]. Двохвильовий характер осесиметричних коливань циліндричної оболонки з рухомим навантаженням розглянутий у [4]. Точні розв'язки деяких задач динаміки підкріплених пластин та оболонок з рухомим інерційним

© Човнюк Ю. В., Кравчук В. Т., Комоцька С. Ю., Марченко О. А., Кадикало І. О., 2019

навантаженням досліджені авторами [5]. Саме ці підходи й будуть використані у даному дослідженні.

Мета роботи полягає у обґрунтуванні моделі поздовжніх коливань у пружній стрічці конвеєра, яка переміщується по нерухомим коткам, й отримання точних розв'язків початково-крайової задачі у двохвильовій формі методами, розвинутими у роботах [1–5].

Виклад основного змісту дослідження.

Розглянемо рух пружної смуги (стрічки конвеєра) по доріжці, складеній з котків, які вільно обертаються (рис. 1). Котки розташовані на невеликій відстані один від одного, тому реакції інерційних навантажень, які переміщуються/передаються на смугу, можна вважати безперервно розподіленим навантаженням. Припустимо також, що кочення елементів смуги по котках відбувається без проковзування.

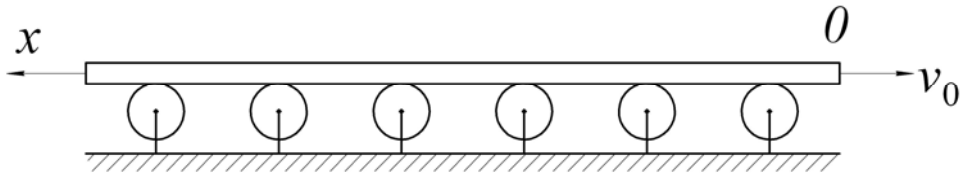

Рисунок 1 – Пружна смуга, що рухається по доріжці, складеній з котків, які вільно обертаються

Розглянемо випадок, коли кінець стрічки O рухається за заданим законом v_o (рис. 1). Введемо систему координат (Лагранжа) Ox, як це показано на рис. 2.

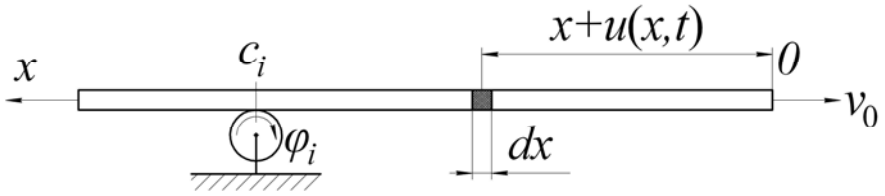

Рисунок 2 – Система координат задачі (за Лагранжем)

Абсолютна швидкість і прискорення елемента стрічки dx визначаються таким чином:

$$v = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - v_0(t),\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dot{v}_o(t)\,, \qquad (1)$$

де $u(x,t)$ – абсолютне видовження елемента стрічки dx.

Стрічка і жорсткі котки утворюють неголономну систему з пружним тілом. Припускаючи, що проковзування відсутнє, прирівняємо швидкості елементів стрічки і точок ободу i-го котка:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}-v_0\right)\Bigg|_{x=l_i(t)}=R\cdot\dot{\varphi}_i(t),\ i=1,2,...,n\ . \qquad (2)$$

Тут $l_i(t)$ – лагранжева координата точки контакту стрічки з i-м котком. Для визначення лагранжевих координат точок контакту $l_i(t)$ розглянемо абсолютні швидкості цих точок:

$$\frac{d}{dt}\left[l_i(t)+u(l_i(t),x)\right]-v_0=0,\ i=1,2,...,n\ . \qquad (3)$$

Вирази (2) і (3) характеризують дві групи, неголономних зв'язків, які визначають взаємне кочення твердих котків та пружної смуги. Перепишемо (3) у такому вигляді:

$$\dot{l}_i(t)+\frac{\partial u(l_i,t)}{\partial x}\cdot\dot{l}_i(t)+\frac{\partial u(l_i,t)}{\partial t}=v_0\ . \qquad (4)$$

Знайшовши середнє знакозмінних доданків $\partial u/\partial t$ та беручи до уваги, що відносні деформації значно менші за одиницю, дістанемо наближену формулу:

$$\dot{l}_i(t)=v_0(t)\ , \qquad (5)$$

яка справджується в межах лінійної теорії пружності. За умови великих деформацій (наприклад, у випадку руху гумового полотна) потрібно користуватися точним виразом (4).

З урахуванням (5) та (2) кутове прискорення i-го котка матиме вигляд:

$$\ddot{\varphi}_i(t)=\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\cdot v_0+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\Bigg|_{x=l_i(t)}-\dot{v}_0\right]\cdot\frac{1}{R}\ . \qquad (6)$$

Середнє інерційне навантаження від котків, яке припадає на одиницю довжини стрічки, визначається так:

$$N(x,t)=-\rho_0\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\cdot\dot{v}_0+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dot{v}_0\right), \qquad (7)$$

де $\rho_0=J\cdot n/R^2$ – зведена погонна маса котків; J та R – момент інерції та радіус котка; n – кількість котків на одиницю довжини смуги.

Рівняння поздовжніх коливань з урахуванням (7) набуде вигляду:

$$(\rho-\rho_0)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\rho_0\cdot v_0\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-E\cdot F\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\rho+\rho_0)\cdot\dot{v}_0\ , \qquad (8)$$

де ρ – погонна маса смуги; $E\cdot F$ – жорсткість смуги на розтяг.

Граничні умови для функцій $u(x,t)$ мають вид:

$$u(0,t)=0,\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0. \qquad (9)$$

Припускаючи, що $v_0=const$, будемо шукати розв'язок рівняння (8) у двохвильовій формі:

$$u(x,t)=X(x)\cdot\cos\omega t+Y(x)\cdot\sin\omega t. \qquad (10)$$

Підставимо (10) у рівняння (8) і відокремимо множники при $\sin\omega t$ та $\cos\omega t$. У результаті дістанемо два рівняння:

$$\begin{cases} EF\cdot X''(x)-\rho_0\cdot v_0\cdot\omega\cdot Y'(x)+(\rho+\rho_0)\cdot\omega^2\cdot X(x)=0, \\ EF\cdot Y''(x)+\rho_0\cdot v_0\cdot\omega\cdot X'(x)+(\rho+\rho_0)\cdot\omega^2\cdot Y(x)=0, \end{cases} \qquad (11)$$

які зводяться до одного:

$$\Phi''(x)+j\frac{\rho_0\cdot v_0}{E\cdot F}\omega\cdot\Phi'(x)+\frac{(\rho+\rho_0)}{E\cdot F}\omega^2\cdot\Phi(x)=0,\ j^2=-1, \qquad (12)$$

відносно комплексної функції

$$\Phi(x)=X(x)+j\cdot Y(x). \qquad (13)$$

Характеристичне рівняння для (12) має вид:

$$\lambda^2+\frac{j\cdot\rho_0\cdot\rho\cdot\omega}{E\cdot F}\cdot\lambda+\frac{(\rho+\rho_0)}{E\cdot F}\cdot\omega^2=0 \qquad (14)$$

і має корені

$$\lambda_{1,2}=-\frac{j\cdot\omega}{2}\cdot(a\pm 2b)\ , \qquad (15)$$

де

$$a=\frac{\rho_0 v_0}{E\cdot F}\ ,\ b=\sqrt{\frac{(\rho_0+\rho)}{E\cdot F}+\frac{a^2}{4}}\ . \qquad (16)$$

Якщо цей розв'язок задовольняє другу граничну умову (9), тоді характеристичне рівняння з комплексними коефіцієнтами матиме вигляд:

$$\cos\{\omega bl\}-j\cdot\frac{a}{2b}\cdot\sin\{\omega bl\}=0\ . \qquad (17)$$

Покладемо

$$\omega bl = \alpha + j \cdot \beta \ , \tag{18}$$

де α і β – дійсні числа. Підставимо у (17) формулу (18) і відокремимо дійсну та уявну частини:

$$\sin\{\alpha\}\left\{\left(\frac{a}{2b} + th\beta\right)\right\} = 0 \ , \ \cos\{\alpha\}\left\{\frac{a}{2b} th\beta + 1\right\} = 0. \tag{19}$$

Оскільки $1 + \frac{a}{2b} th\beta$ для будь-яких β не перетворюється на нуль, тоді рівняння (19) мають корені:

$$\alpha = \frac{(2n-1)\cdot\pi}{2} \ , \ \beta = -arcth\left\{\frac{a}{2b}\right\} \ , \ n = 1,2,3,... \tag{20}$$

У відповідності з (18) власні комплексні числа визначаються так:

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\cdot\pi}{2l\cdot b} - \frac{j}{bl}\cdot arcth\left\{\frac{a}{2b}\right\} . \tag{21}$$

Для малих значень $\frac{a}{2b} << 1$ з достатньою точністю виконується рівність $arcth\left\{\frac{a}{2b}\right\} \approx \frac{a}{2b}$. Отже, дістанемо комплексний розв'язок, дійсна частина котрого:

$$u(x,t) = \exp\left\{-\frac{at}{2b^2\cdot l}\right\}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \begin{bmatrix} x_n(x)\cos(k_n\cdot t + \gamma_n) + \\ + Y_n(x)\cdot\sin(k_n\cdot t + \gamma_n) \end{bmatrix} \tag{22}$$

буде розв'язком поставленої задачі. Тут $X_n(x)$ та $Y_n(x)$ – власні функції:

$$\begin{cases} X_n(x) = \exp\left(-\frac{a^2 x}{4b^2 l}\right)\cdot\begin{bmatrix} \sin\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right\}\cos\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{4bl}\right\}ch\left(\frac{ax}{2bl}\right) + \\ + \cos\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right\}\sin\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{4bl}\right\}sh\left(\frac{ax}{2bl}\right) \end{bmatrix}, \\ Y_n(x) = \exp\left(-\frac{a^2 x}{4b^2 l}\right)\cdot\begin{bmatrix} \sin\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right\}\sin\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{4bl}\right\}ch\left(\frac{ax}{2bl}\right) - \\ - \cos\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right\}\cos\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{4bl}\right\}sh\left(\frac{ax}{2bl}\right) \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{23}$$

Власні частоти k_n у розв'язку (22) визначаються за допомогою формули:

$$k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \cdot \sqrt{\frac{EF}{\rho_0 + \rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2 \cdot \rho_0^2}{4EF(\rho + \rho_0)}}}, \; n = 1,2,3,... \qquad (24)$$

Таким чином, коливання пружної полоси (22) мають двохвильову природу: кожній власній частоті k_n відповідають дві різні форми стоячих хвиль (23), а коливання з цими формами зсунуті по фазі на $\pi/2$.

Висновки.

1. Отримані у даній роботі співвідношення (22) – (24) дають можливість оцінити залежність інтенсивності розсіювання енергії та зміни власних форм і частот від швидкості протяжки пружної смуги по котках стрічкового конвеєра.
2. У подальшому результати дослідження можуть бути використані для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку параметрів та режимів функціонування стрічкових конвеєрів як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

Список використаної літератури

1. Каленюк П.Т. Якісні методи теорії диференціальних рівнянь / П.Т. Каленюк, В.Я. Скоробогатько. – К., 1977. – 122 с.
2. Горошко О.О. Двохвильові процеси в механічних системах / О.О. Горошко, А.Г. Дем'яненко, С.П.Киба. – К.: Либідь, 1991. – 188 с.
3. Горошко О.А. О двухволновом представлении решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику некоторых конструкций с подвижной нагрузкой / О.А. Горошко, А.Г. Демьяненко // Украинский математический журнал. – 1974. – Т. 26. – №5. – С. 648 – 651.
4. Горошко О.А. О двухволновом характере осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с подвижной нагрузкой / О.А. Горошко, А.Г. Демьяненко // Асимптотические методы в нелинейной механике. – К., 1974. – С. 34 – 41.
5. Горошко О.А. Точные решения некоторых задач динамики подкрепленных пластинок и оболочек с подвижной инерционной нагрузкой / О.А. Горошко, А.Г. Демьяненко, Г.Г. Чижов // Труды 10-й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – Тбилиси, 1975. – Т.2. – С. 98 – 109.

ANALYSIS OF LONG-TERM ROLLERS IN THE LONG-TERM CONVEYER OF THE CONVEYOR, TRANSFERRED BY RETAIL BOTTLES: TWO-WAY FORM FOR SOLVING THE PROBLEM

Chovnyuk Y. B., Kravchuk V. T., Komotckaya S. Y., Marchenko O. A, Kadikalo I. O.
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine
Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture

Annotation. The longitudinal oscillations in the elastic conveyor belt, which moves along fixed rollers, are considered, and they are analyzed by the method of Professor Goroshko O.A. The solutions of the initial-boundary problem in a two-wave form are found. The results obtained in this paper allow us to estimate the dependence of the intensity of energy dissipation and the change in the eigenforms, frequencies on the speed broach of the strip along the rollers, as well.

Keywords: analysis, longitudinal vibrations, elastic belt, conveyor, fixed rollers, two-wave form solutions.