УДК 519.711.3

О.В. ГЛАДКІВСЬКА, *кандидат фізико-математичних наук,*
старший науковий співробітник

ДОСЛІДЖЕННЯ ОКРЕМИХ ПАРАМЕТРІВ СИСТЕМ, ЩО РОЗВИВАЮТЬСЯ

Анотація. *Щодо знаходження деяких параметрів інтегральних динамічних моделей В.М. Глушкова для систем, що розвиваються.*

Серед апарату моделювання складних систем значний інтерес представляє клас інтегральних динамічних моделей, розроблений академіком В.М. Глушковим та його учнями [1, 2]. Ці моделі знайшли широке застосування при моделюванні систем, що розвиваються, а саме економічних, технічних, біологічних, екологічних та соціальних систем, окремих галузей і підприємств, наукових організацій, обчислювальних центрів і т.п. Питання побудови математичних моделей різних процесів та об’єктів тісно пов’язані з задачами ідентифікації як задачами визначення (оцінювання) параметрів і структури об’єктів за результатами експериментальних досліджень. В роботі [3] описано застосування методу моделювання для дослідження інформаційних систем та наведено приклад математичної моделі обчислювального процесу, що характерний для роботи інформаційно-пошукової системи правової інформації. Порівняння одного із класичних методів опису динамічних систем з інтегральними динамічними моделями В.М. Глушкова, задача моделювання деяких структурних елементів систем вимірювання за допомогою цих моделей та знаходження окремих параметрів моделі розглядається в роботі [4]. Приклад використання математичного апарату інтегральних динамічних моделей В.М. Глушкова для формалізації сутності цивілізації наведено в [5].

Мета статті – опис математичної моделі системи, що розвивається, та розв’язання задачі заходження параметрів моделі, фізичний зміст яких – показники ефективності функціонування системи.

Будемо враховувати тільки дві загальні функції системи моделювання: перша (внутрішня), що забезпечує її існування, і друга (зовнішня), що є результатом її взаємодії з зовнішнім середовищем. Матеріальні носії першої функції назвемо продуктами першого (I) виду, другої – продуктами другого (II) виду. Об’єкт моделювання поділимо на дві підсистеми А і Б наступним чином: система А за допомогою одної частини раніше вироблених продуктів I виду створює продукти I виду, система Б за допомогою іншої частини раніше вироблених продуктів I виду створює продукти II виду.

Найпростіша двопродуктова модель системи має вигляд [1]:

$$m(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha(\tau,t) \cdot y(\tau) \cdot m(\tau) \cdot d\tau, \qquad (1)$$

$$c(t) = \int_{a(t)}^{t} \beta(\tau,t) \cdot [1 - y(\tau)] \cdot m(\tau) \cdot d\tau, \qquad (2)$$

$$M(t) = \int_{0}^{t} m(\tau) \cdot d\tau, \quad P(t) = \int_{a(t)}^{t} m(\tau) \cdot d\tau,$$

$$C(t)=\int_0^t c(\tau)\cdot d\tau\,,\quad G(t)=\int_0^{a(t)} m(\tau)\cdot d\tau\,,$$

$$0\le y\le 1;\;\; 0\le t_0\le t;\;\; 0\le a(t)<t;\quad a(t_0)=0;\;\; t,\tau\in[0,T],$$

де: t_0 - початковий момент дослідження;

$m(t)$ - швидкість створення нових продуктів І виду в момент t;

$y(t)$ - доля продуктів І виду, що використовуються для створення продуктів І виду, в момент t;

$\alpha(\tau,t)$ - продуктивність створення продуктів І виду для виконання внутрішніх функцій системи;

$c(t)$ - швидкість створення продуктів ІІ виду в момент $\boldsymbol{t}$;

$a(t)$ - часова межа ліквідації застарілих продуктів І та ІІ виду (ніякі продукти, створені в момент $\tau<a(t)$, в момент t не використовуються);

$1-y(t)$ - доля продуктів І виду, що використовуються для створення продуктів ІІ виду, в момент t;

$\beta(\tau,t)$ - продуктивність створення продуктів І виду для виконання зовнішньої функції системи;

$M(t)$ - загальна кількість продуктів І виду;

$C(t)$ - кількість продуктів ІІ виду;

$P(t)$ - кількість продуктів І виду, що функціонують в системі;

$G(t)$ - кількість застарілих ресурсів, що вже не використовуються в системі для забезпечення виконання зовнішньої і внутрішньої функції;

T - кінцевий момент дослідження.

Наведена модель – лінійна. У випадку нелінійної двопродуктової моделі функції α, β залежать не тільки від моментів часу τ, *t*, але й від функцій *m, y, a,* тобто $\alpha=\alpha(\tau,t,m,a,y)$, $\beta=\beta(\tau,t,m,a,y)$. З математичної точки зору α – це ядро інтегрального рівняння (1), β – рівняння (2). В даному дослідженні обмежимось випадком лінійної двопродуктової моделі.

Постановка задачі ідентифікації

Застосування інтегральних динамічних моделей до систем, що розвиваються, показало, що в розглядуваному класі моделей важливу роль відіграють показники ефективності функціонування системи, яку моделюють, тобто функції $\alpha(\tau,t)$, $\beta(\tau,t)$. При отриманні важливих результатів аналітичного та числового розв’язку інтегральних рівнянь, а також задач оптимізації припускають, що вказані функції відомі [1, 2]. Тому виникла необхідність розв’язання задачі ідентифікації динамічних моделей В.М.Глушкова в плані аналітичного та числового знаходження функцій типу $\alpha(\tau,t)$, $\beta(\tau,t)$. Актуальність дослідження випливає із важливості задач ідентифікації для вказаного класу моделей, які виникають в теорії і практиці моделювання складних систем в багатьох областях діяльності людини.

Для знаходження функції $\alpha(\tau,t)$ використовуємо відомий критерій оцінювання – оцінку математичного очікування квадрату різниці лівої та правої частин рівняння (1) моделі (аналогічно для функції $\beta(\tau,t)$ – рівняння (2)):

$$I(\alpha,t)=M^*\left[m(t)-\int\limits_{a(t)}^{t}\alpha(\tau,t)\cdot y(\tau)\cdot m(\tau)\cdot d\tau\right]^2, \qquad t\in[\,0,T\,].$$

Будемо вважати, що вхідні дані – випадкові нестаціонарні процеси і що експериментально задано p значень процесів $m(t)$, $c(t)$, $y(t)$, $a(t)$ для R ідентичних об’єктів на відрізку часу $[\,0,T\,]$: $m_i(t_j)$, $c_i(t_j)$, $y_i(t_j)$, $a_i(t_j)$, $i=\overline{1,R}$, $j=\overline{1,p}$. Виходячи із можливостей застосування апріорної інформації та враховуючи факт, що математичне очікування у нестаціонарному випадку знаходиться як середнє сукупності реалізацій (у нашому випадку – R ідентичних об’єктів, для яких наявні вхідні дані), задачу ідентифікації записуємо у наступному вигляді:

$$I(\alpha,t)=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left[m_i(t)-\int\limits_{a_i(t)}^{t}\alpha(\tau,t)\cdot y_i(\tau)\cdot m_i(\tau)\cdot d\tau\right]^2\to\min_{\alpha},\ \ t\in[0,T]. \qquad (3)$$

Таким чином, дослідження зводиться до розв’язання задачі (3) на заданому класі функцій $\alpha(\tau,t)$.

Складнішою є задача, коли значення $a_i(t)$, $i=\overline{1,R}$, невідомі. Якщо задана функція $G(t)$, то ці значення можна знайти із рівняння моделі

$$G_i(t)=\int\limits_{0}^{a_i(t)}m_i(\tau)\cdot d\tau,\ i=\overline{1,R},\ t\in[0,T].$$

Для розв’язання поставленої задачі ідентифікації (3) використовуємо метод найменших квадратів у просторі L_2. Цей метод вибрано у зв’язку з тим, що його можна застосовувати до моделі, нічого не знаючи про розподіл ймовірностей спостережень. Важливою перевагою методу найменших квадратів є також лінійність задач відносно невідомих параметрів.

Методи розв’язання задачі ідентифікації

Використання методу найменших квадратів полягає у наступному.

Якщо вхідні дані – гладкі функції, то функцію $\alpha(\tau,t)$ апроксимуємо многочленом

$$\alpha(\tau,t)\approx\alpha_n(\tau,t)=\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot\varphi_k(\tau)\cdot\psi_k(t), \qquad (4)$$

де: c_k - невідомі коефіцієнти; $\varphi_k(\tau)$, $\psi_k(t)$ - задані координатні функції з простору L_2; $\tau,t\in[0,T]$; $k=\overline{1,n}$.

Підставляємо значення (4) функції $\alpha(\tau,t)$ в (3), одержуємо для кожного $t\in[0,T]$:

$$I(\alpha_n,t)=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left[m_i(t)-\sum_{k=1}^{n}c_k\ \xi_{ik}(t)\right]^2\to\min_{c_k},$$

де: $\xi_{ik}(t)=\psi_k(t)\cdot\int\limits_{a_i(t)}^{t}\varphi_k(\tau)\cdot y_i(\tau)\cdot m_i(\tau)\cdot d\tau$, $k=\overline{1,n}$.

Невідомі коефіцієнти c_k, $k=\overline{1,n}$ (для кожного заданого $t\in[0,T]$) будемо знаходити шляхом мінімізації критерію $I(\alpha_n,t)$. Задача ідентифікації зводиться до розв’язку нормальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку n:

$$\big(m(t),\xi_s(t)\big)=\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot\big(\xi_k(t),\xi_s(t)\big),\ \ s=\overline{1,n},$$

де: $\left(m(t),\xi_s(t)\right)=\sum_{i=1}^{R} m_i(t)\cdot\xi_{is}(t)$; $\left(\xi_k(t),\xi_s(t)\right)=\sum_{i=1}^{R}\xi_{ik}(t)\cdot\xi_{is}(t)$; $k=\overline{1,n}$; $s=\overline{1,n}$.

Щоб використати метод найменших квадратів у випадку, який часто зустрічається на практиці та мало досліджений, тобто якщо вхідні дані – розривні функції, то невідомі характеристики типу $\alpha(\tau,t)$ доцільно апроксимувати узагальненими функціями. Так як в математичній моделі функція $\alpha(\tau,t)$ входить під знак інтеграла, то знаходити її слід в класі узагальнених функцій по одній змінній τ. Для розв’язання задачі ідентифікації у цьому випадку для апроксимації ядра $\alpha(\tau,t)$ рівняння (1) використовується повна ортонормована система узагальнених функцій, описана в [6].

Розглянемо інший метод розв’язання задачі ідентифікації (3), в якому теж використовується метод найменших квадратів і який зводиться до знаходження функції двох змінних, заданої у вигляді таблиці.

Розіб’ємо інтервал $[0,T]$ на підінтервали $[t_{k-1},t_k]$ різної довжини Δt_k, $k=\overline{1,p}$, так, що $0=t_0$, $T=t_p$, $a(t_k)=t_{k(a)}$, $\widetilde{T}=t_{k'}$, де $\widetilde{T}$ - момент часу, коли починається ліквідація застарілих продуктів (для $k=\overline{1,k'-1}$ $t_{k(a)}=0$). Будемо вважати, що на кожному малому інтервалі $[t_{k-1},t_k]$ підінтегральна функція дорівнює її значенню в точці t_k, $k=\overline{1,p}$.

Записуємо критерій (3) для кожного $t_k\in[0,T]$, $k=\overline{1,p}$:

$$I(\alpha,t_k)=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left[m_i(t_k)-\int_{a_i(t_k)}^{t_k}\alpha(\tau,t_k)\cdot y_i(\tau)\cdot m_i(\tau)\cdot d\tau\right]^2 .$$

Для простоти викладення припустимо, що $a_i(t_k)=a(t_k)$, та введемо позначення $\widetilde{\alpha}_{sk}=\int_{t_{s-1}}^{t_s}\alpha(\tau,t_k)\cdot d\tau$; $s=\overline{k(a)+1,k}$; $k=\overline{1,p}$; $i=\overline{1,R}$. Тоді одержуємо остаточний вираз для критерію $I(\alpha,t_k)$:

$$I(\alpha,t_k)\approx\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left[m_i(t_k)-\sum_{s=k(a)+1}^{k}(t_s-t_{s-1})\cdot y_i(t_s)\cdot m_i(t_s)\cdot\widetilde{\alpha}_{sk}\right]^2 . \qquad (5)$$

Аналогічно попередньому, невідомі коефіцієнти $\widetilde{\alpha}_{sk}$; $s=\overline{k(a)+1,k}$; $k=\overline{1,p}$ будемо знаходити за допомогою методу найменших квадратів, мінімізуючи по $\widetilde{\alpha}_{sk}$ критерій (5). Розв’язавши нормальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, одержимо значення функції двох змінних, що задана таблицею. Максимальна розмірність прямокутної числової матриці обчислених значень складає $(p-1)\times(p-1)$. За обчисленими значеннями $\widetilde{\alpha}_{sk}=\int_{t_{s-1}}^{t_s}\alpha(\tau,t_k)\cdot d\tau$, $s=\overline{k(a)+1,k}$; $k=\overline{1,p}$ знайдемо і значення невідомої характеристики $\alpha(\tau,t)$ моделі.

Висновки.

В статті зроблено опис математичної моделі системи, що розвивається. Дається постановка задачі ідентифікації динамічних моделей В.М.Глушкова, що полягає в знаходженні функцій, фізичний зміст яких – показники ефективності функціонування системи, яку моделюють. Запропоновано методи розв’язання задачі ідентифікації, основані на використанні методу найменших квадратів. Одержані результати представляють інтерес в теорії ідентифікації систем, що розвиваються, їх можна використовувати, зокрема, для моделювання обчислювального процесу, що характерний для роботи інформаційно-пошукової системи.

Використана література

1. Глушков В.М. Моделирование развивающихся систем / В.М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
2. Ivanov V.V. Model Development and Optimization / Viktor V. Ivanov. – Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 249 p.
3. Гладківська О.В. Деякі аспекти математичного моделювання інформаційних систем соціального призначення / О.В. Гладківська, М.Я. Швець // Правова інформатика. – № 2(6)/2005.– С. 3-8.
4. Гладківська О.В. Використання інтегральних динамічних моделей В.М. Глушкова в метрології / О.В. Гладківська // Правове, нормативне та метрологічне забезпечення системи захисту інформації в Україні. – 2005. – Вип. 10. – С. 79-84.
5. Гладківська О.В. До питання математичного моделювання в теорії управління соціальними системами / О.В. Гладківська, Л.Л. Бєсєдна // Правова інформатика. – № 4(8)/2005. – С. 69-73.
6. Гладківська О.В. Приклад повної ортонормованої системи в гільбертовому просторі узагальнених функцій / О.В. Гладківська // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49. – № 5. – С. 725-728.

~~~~~~~~~~~~ * * * ~~~~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~~~