



ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ПІДТРИМКИ ПРОЦЕДУРИ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ СЕРЕНДИПОВИХ ПОВЕРХОНЬ

УДК 004.92:519.6

ГУЧЕК Петро Йосипович

к.т.н., доцент кафедри інформаційних технологій Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси: математичне моделювання й інформаційні технології в природничих та технічних науках, наукова візуалізація.

ЛИТВИНЕНКО Олена Іванівна

к.т.н., доцент кафедри прикладної математики та математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси: математичне моделювання та інформаційні технології в природничих та технічних науках, теоретичні основи серендипових апроксимацій.

ХОМЧЕНКО Анатолій Никифорович

д.ф.-м.н., професор кафедри прикладної математики та математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси: імовірнісні схеми випадкових блукань, методи відновлення гармонійних функцій, теоретичні основи серендипових апроксимацій.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Комп'ютерні засоби та інструментальні програмні системи, як універсального так і вузькоспеціалізованого напрямку, для моделювання та візуалізації в різноманітних задачах останнім часом набули широкого розповсюдження.

Найбільш поширеними для моделювання та візуалізації на сучасному етапі є математичні пакети Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica та інші, в яких реалізовані потужні бібліотеки візуалізації різноманітних функцій та поверхонь в 2D/3D моделях. Кожна з бібліотек вищеназваних пакетів має певний набір інструментальних функцій, які на початковому етапі дозволяють швидко провести моделювання та візуалізацію [1-3].

Для більш детального дослідження дискретних моделей необхідно виходити за рамки функціональних можливостей, представлених в універсальних пакетах. Це стосується, наприклад, візуалізації функцій форми і дослідження серендипових моделей, які використовую-

ються при скінченноелементному аналізі фізичних полів у граничних задачах. Отже, актуальним завданням є побудова вузькоспеціалізованого прикладного програмного забезпечення з функціональними можливостями, відсутніми у стандартних інструментальних засобах.

АНАЛІЗ ОСНОВНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПУБЛІКАЦІЙ

У методі скінченних елементів (МСЕ) важливу роль відіграють скінченні елементи серендипової сім'ї [4]. Для побудови базису скінченного елемента традиційно використовують *матричну процедуру* [4]. *Процедура систематичного генерування базису*, що була запропонована Тейлором у 1972 році, привела до вже відомих стандартних моделей на елементах серендипової сім'ї [5]. У 70-х роках минулого століття завдяки роботам Уачспреса з'явився метод "*product of planes*" для конструювання базисних функцій CE [6]. Але цей метод не застосовувався на серендипових скінченних елементах (CCE). На початку 80-х років був запропонований *ймовірнісно-геометричний метод* конструювання

базисів скінченних елементів різноманітної конфігурації [7]. Переваги цього метода найбільш виразно проявилися саме на серендипових моделях. Для конструювання серендипових елементів використовувався *геометричний метод* [8]. Це модифікація методу "product of planes", яка використовує техніку перемноження рівнянь площин і поверхонь другого порядку. Нові методи значно спрощують процедуру побудови базису (не виникає потреби розв'язувати СПАР відповідного порядку на елементі) і дозволяють отримати альтернативні моделі ССЕ. Наявність "позавузлових" параметрів у моделях, що отримані за допомогою нових методів, дає можливість позбутися недоліків, які притаманні стандартним моделям (наприклад, від'ємних значень навантажень у вузлах).

Але побудова систем базисних функцій цими методами не дає можливості будувати базиси на ССЕ з наперед заданими характеристиками. Для розв'язання на ССЕ задачі інтерполювання з умовами [9] був запропонований *аналітичний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій* [10].

Мета статті – розробка процедури візуалізації альтернативних серендипових поверхонь на біквадратичному скінченному елементі, які отримані аналітичним методом побудови ієрархічних форм базисних функцій.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

В роботі розглядається скінченний елемент серендипової сім'ї з біквадратичною інтерполяцією (рис. 1) [4].

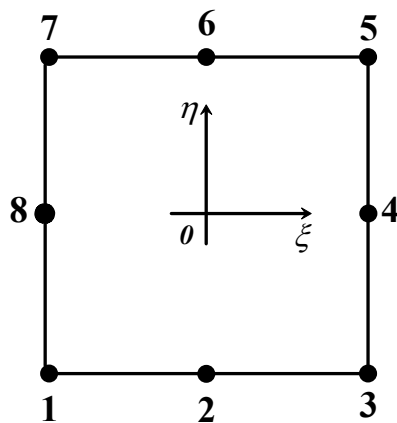


Рисунок 1 – ССЕ-8 ($|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$)

В аналітичному методі використовується пряме моделювання ієрархічних форм базисних функцій ССЕ. Множину базисів ССЕ-8 можливо отримати додаванням до поверхні стандартного базису [10]:

$$N_1^{(s)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta) \quad (1)$$

$$N_2^{(s)} = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (2)$$

гіперболічного параболоїда з коефіцієнтом K :

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \times \quad (3)$$

$$\times (-1 - \xi - \eta + K(1 + \xi)(1 + \eta)),$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta) \left((1 + \xi) - \frac{1}{2}K(1 + \xi)(1 + \eta) \right) \quad (4)$$

де $N_1^{(s)}, N_2^{(s)}$ – стандартні базисні функції ССЕ-8,

N_1, N_2 – модифіковані базисні функції ССЕ-8.

Запишемо узагальнені формули для побудови альтернативних базисних функцій біквадратичного елемента:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (5)$$

$$(-1 + \xi_i \xi + \eta_i \eta + K(1 - \xi_i \xi)(1 - \eta_i \eta))$$

$$i = 1, 3, 5, 7; \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \eta) \left((1 + \xi) - \frac{1}{2}K(1 + \xi)(1 - \eta) \right), \quad (6)$$

$$i = 2, 6; \quad \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta)(1 + \xi) \left((1 + \eta) - \frac{1}{2}K(1 + \eta)(1 - \xi) \right), \quad (7)$$

$$i = 4, 8; \quad \xi_i = \pm 1.$$

Отримані базисні функції відповідають всім властивостям, які притаманні функціям форми в МСЕ [4, 10].

Для більш детального дослідження нових моделей серендипових елементів виникла потреба в розробці процедури візуалізації поверхонь. В якості інструментального середовища для розробки процедури візуалізації використовувалися Delphi та бібліотека OpenGL. OpenGL є одним з найпопулярніших прикладних програмних інтерфейсів (API – Application Programming Interface) для розробки додатків в області двовимірної і тривимірної графіки. На сьогоднішній день графічна система OpenGL підтримується більшістю виробників апаратних і програмних платформ [11, 12].

Взаємодія процедури візуалізації серендипових поверхонь з OpenGL представлена на рис. 2.

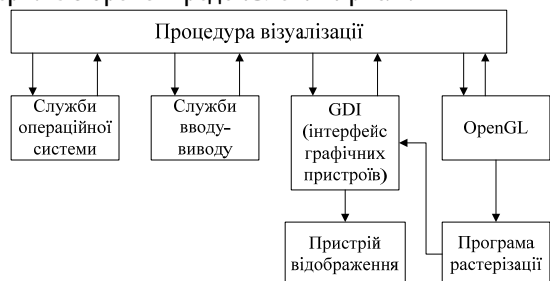


Рисунок 2 – Місце OpenGL в процедурі візуалізації

Програмна реалізація OpenGL отримує графічні запити від процедури візуалізації і будує (растерізує) кольорове зображення тривимірної графіки. Потім вона передає це зображення GDI (Graphics Device Interface) інтерфейсу Windows для представлення графічних об'єктів і передачі їх на пристрої відображення, такі як монітори і принтери.

В цілому, для відображення тривимірних компонентів побудови серендипових поверхонь у вікно виводу процедури візуалізації координати вершин піддаються перетворенням, які представлені на схемі (рис.3):

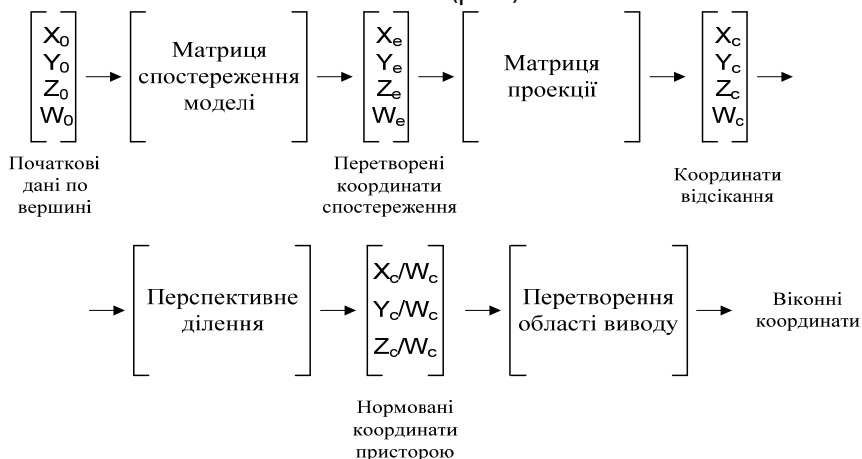


Рисунок 3 – Конвеєр перетворення вершин

Розглянемо роботу конвеєра перетворення вершин. Спочатку вершини записуються у матрицю початкових даних, трьома першими значеннями якої є координати X, Y та Z, а четверте число - це масштабний коефіцієнт W. Після цього будується добуток матриці початкових даних і матриці спостереження моделі, що дає перетворені координати системи спостереження. Потім матриця координат системи спостереження перемножується з матрицею проєкції і результат записується у матрицю координат відсікання. Таким чином, ефективно усуваються дані, що не входять в об'єм, що спостерігається. Далі елементи матриці координат відсікання діляться на масштабний коефіцієнт W і отримуємо матрицю нормованих координат пристрою. В залежності від виконаних перетворень значення W може модифікуватися матрицею проєкції або матрицею спостереження моделі. Нарешті, за допомогою

перетворення поля виводу трійка координат відображається на двовимірну площину екрану[11, 12].

В процедурі візуалізації поверхні базисної функції реалізований гнучкий механізм, що задає кількість точок розбиття з метою швидкого ескізного зображення поверхні. Сукупність таких точок утворює каркас - систему ліній на поверхні.

В даному випадку серендипова поверхня $N(\xi, \eta)$ зображується параметричними лініями $N(\xi_i, \eta)$, $N(\xi, \eta_j)$, які розраховуються наступним чином:

– задаються цілі числа n і m що визначають індексну сітку (i, j) в якій $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$;

– виконується дискретизація параметрів $\xi = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, $\eta = \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m$ і створюється параметрична сітка $\{\xi_i, \eta_j\}$. У найпростішому випадку

вона може бути рівномірною з інтервалами дискретності:

$$\begin{aligned} \Delta \xi_i &= \xi_i - \xi_{i-1} = \text{const} \quad \forall i, \\ \Delta \eta_j &= \eta_j - \eta_{j-1} = \text{const} \quad \forall j \end{aligned} ;$$

– обчислюються вузли $N(\xi_i, \eta_j)$ і циклічно будується каркасна сітка з проекцій відрізків між вузлами

$$\begin{aligned} N((\xi_i, \eta_j \quad \forall j = \overline{0, m}), \quad \forall i = \overline{0, n}), \\ N((\xi_i \quad \forall i = \overline{0, n},) \quad \eta_j, \quad \forall j = \overline{0, m}). \end{aligned}$$

Завдяки гнучкому механізму вибору числа інтервалів дискретизації, ми отримуємо реалістичну згладжену поверхню базисної функції (рис. 4).

Рисунок дозволяє спостерігати поверхню функції форми, від’ємні та додатні значення та лінії нульового рівня серендипової поверхні, які передаються за допомогою використання різних кольорів.

Алгоритм роботи процедури візуалізації представлений на рис. 5.

Нааявність керуючого параметра K у формулах (5-7) дозволяє будувати серендипові поверхні для всієї множини всю множину альтернативних моделей ССЕ-8, використовуючи алгоритм процедури візуалізації (рис. 5).

За допомогою розробленого алгоритму можна розміщувати в одному екранному вікні як окрему базисну функцію, так і компоненти її побудови. Наприклад, у формулах (5)-(7) при $K = 0$ отримаємо стандартний базис ССЕ-8 (рис. 6).

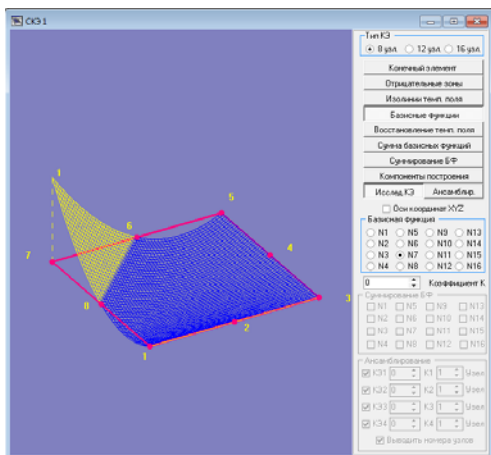


Рисунок 4 – Головне вікно процедури візуалізації

Використовуючи екранну копію (рис. 6), можна спостерігати процедуру отримання поверхні стандартної

“кутової” функції біквадратичного елемента. При побудові функції форми для вузла 7 (рис. 6г) в якості множників використано площину $f_1^{(1)} = -1 - \xi + \eta$ (рис. 6а) та гіперболічний параболоїд (гіпар) $f_1^{(2)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$ (рис. 6д).

Аналогічно можна побудувати будь-яку “проміжну” функцію форми ССЕ-8 для вузлів 2,4,6,8.

Нагадаємо, що інтерполяційний поліном стандартного базису має кількість параметрів, яка відповідає кількості вузлів ССЕ. Відповідна схема Паскаля для біквадратичного елемента показана на рис.7а.

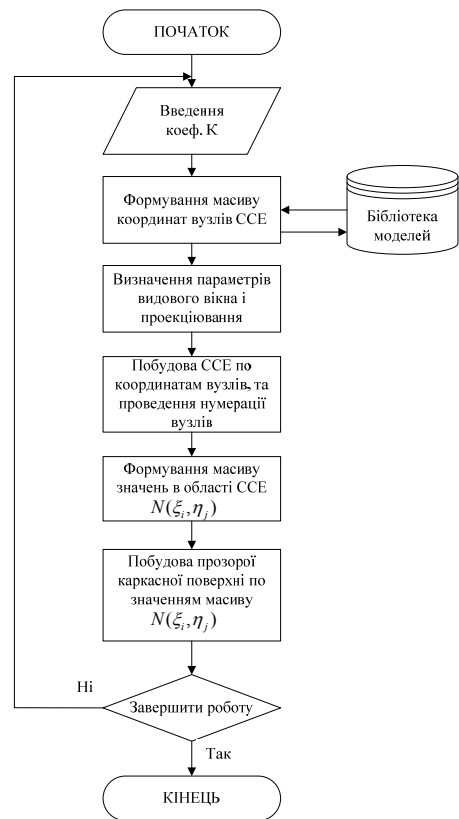


Рисунок 5 – Алгоритм процедури візуалізації

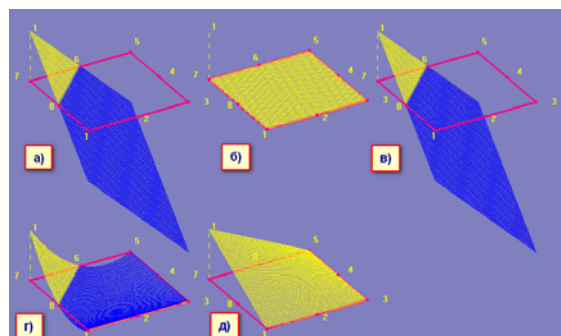


Рисунок 6 – Візуалізація компонентів побудови стандартного базису CSE-8

<table border="1"> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>$\xi \quad \eta$</td></tr> <tr><td>$\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2$</td></tr> <tr><td>$\xi^2\eta \quad \xi\eta^2$</td></tr> </table>	1	$\xi \quad \eta$	$\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2$	$\xi^2\eta \quad \xi\eta^2$	<table border="1"> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>$\xi \quad \eta$</td></tr> <tr><td>$\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2$</td></tr> <tr><td>$\xi^2\eta \quad \xi\eta^2$</td></tr> <tr><td>$\xi^2\eta^2$</td></tr> </table>	1	$\xi \quad \eta$	$\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2$	$\xi^2\eta \quad \xi\eta^2$	$\xi^2\eta^2$
1										
$\xi \quad \eta$										
$\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2$										
$\xi^2\eta \quad \xi\eta^2$										
1										
$\xi \quad \eta$										
$\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2$										
$\xi^2\eta \quad \xi\eta^2$										
$\xi^2\eta^2$										
а) Стандартний базис (8 параметрів) $K = 0$	б) Модифікований базис (9 параметрів)									

Рисунок 7 – Схема Паскаля для CSE-8

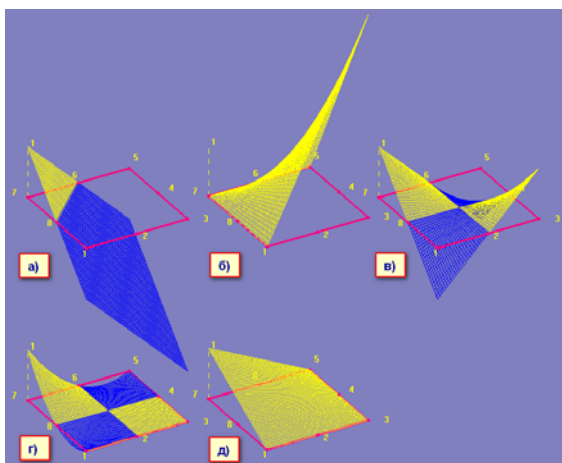


Рисунок 8 – Візуалізація компонентів побудови альтернативного базису CSE-8

Розглянемо процес побудови альтернативної моделі при $K = 1$ (рис. 8). Базисна функція для вузла 7 у цій моделі має вигляд:

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - \xi + \eta + (1 + \xi)(1 - \eta)) \quad (8)$$

На рис. 8 показана геометрична процедура побудови модифікованого базису. Спочатку будується поверхня, яка є сумою двох поверхонь (рис. 8в): площини $f_1^{(1)} = -1 - \xi + \eta$ (рис. 8а) і гіпара $f_1^{(2)} = (1 + \xi)(1 - \eta)$ (рис. 8б). Остаточну базисну функцію для вузла 7 (рис. 8г) отримуємо як суперпозицію гіпару $f_1^{(2)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$ (рис. 8д) і поверхні $f_1^{(1+2)} = f_1^{(1)} + f_1^{(2)}$, що зображена на рис. 8в. Зауважимо, що на відміну від стандартної поверхні (рис. 6), де використовувався лише добуток двох поверхонь, у альтернативному базисі при побудові використовується ще один гіперболічний параболоїд (рис. 8б).

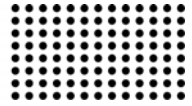
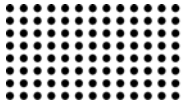
Використання при конструюванні функції форми додаткової поверхні (рис. 8б) приводить до появи “прихованого” параметра $\xi^2\eta^2$. На відміну від стандартної моделі, цей базис має 9 мономів у інтерполяційному поліномі (рис. 7б). Саме “приховані” параметри дозволяють будувати ієрархічні форми базисних функцій. Нагадаємо, що О. Зенкевич і К. Морган називають ієрархічними базисні функції, які отримані адитивним уточненням. У монографії [13] автори пишуть наступне: “Повышение точности приближения может быть достигнуто последовательным повышением степени базисных функций (при фиксированной сетке конечных элементов)...”. Саме це відбувається в аналітичному методі побудови ієрархічних форм базисних функцій.

“Приховані” параметри [14] дозволяють отримати нові моделі CSE вищих порядків, які не тільки задовольняють основним властивостям базисів MCE, а і реалізують додаткові умови:

- реалізують експериментальний спектр навантажень при $K = 1.533$;
- задовольняють інтегральним критеріям гармонічності Привалова і Кьобе при $K = 1.2$ та $K = 1.333$ відповідно;
- отримані за допомогою альтернативної моделі з коефіцієнтом $K = 1.25$ матриці жорсткості мають мінімальний слід, що, як відомо, забезпечує більш високу точність розв’язку при розрахунках у методі скінченних елементів [15].

ВИСНОВКИ

В роботі розроблена процедура візуалізації серендипових поверхонь, що дозволяє більш детально досліджувати альтернативні моделі CSE-8. Цікавим є вико-



ристання процедури візуалізації на інших елементах серендипової сім'ї.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Басюк Т.М. Основні підходи до побудови програмних засобів візуалізації даних /Т.М. Басюк //Інформаційні системи та мережі. – Львів: Національний ун-т "Львівська політехніка". – 2008. – №631. – С.3-10.
2. Гучек П.И. Геометрическое моделирование и компьютерная визуализация базисов конечных элементов /П.И. Гучек //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Сб. науч. тр. – К.: Ин-т математики НАНУ. – 1996. – С.95-97.
3. Гучек П.И. Компьютерная визуализация функций формы конечных элементов /П.И. Гучек //Интегральні перетворення та їх застосування до крайових задач – К.: Ін-т математики НАНУ. – 1997. – Вып. 14 – С.79-81.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике /О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
5. Taylor R.L. On the completeness of shape functions for finite element analysis /R.L. Taylor //Internat. J. Numer. Methods Eng. – 1972. – V.4. – № 1. – P.17-22.
6. Wachspress E.I. A rational finite element basis /E.I. Wachspress. – Academic Press. – New York, 1975. – 344 p.
7. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ /А.Н. Хомченко //Ивано-Франковск. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1982. – 5 с. — Деп. в ВИНТИ 21.10.1982, №5264.
8. Хомченко А.Н. Геометрия серендиповых аппроксимаций /А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, П.И. Гучек //Прикл. геом. и инж. графика. – К.: Будівельник, 1996. – Вып. 59. – С.40-42.
9. Попов Б.А. Приближение функций для технических приложений /Б.А. Попов, Г.С. Теслер. – К.: Наукова думка, 1980. – 352 с.
10. Хомченко А.Н. Новый подход к построению базисов серендиповых элементов /А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, И.А. Астионенко //Геометричне та комп'ютерне моделювання. – 2009. – Вып. 23. – С.90-95.
11. Херн Д. Компьютерная графика и стандарт OpenGL /Д. Херн, М. Паулин Бейкер. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. – 1168 с.
12. Райт Ричард С. OpenGL. /Ричард С. Райт, Бенджамин Липчак. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2006. – 1040 с.
13. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация /О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
14. Хомченко А.Н. Серендиповы базисы иерархического типа: роль «скрытых» параметров интерполяции /А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, И.А. Астионенко //Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2010. – Вып. 86. – С.87-91.
15. Секулович М. Метод конечных элементов /М. Секулович. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.