ПРИНЯТИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РАВНОВОЗМОЖНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 519.81

КОЛЕСНИК Людмила Владимировна
к.т.н., доцент, доцент кафедры системотехники Харьковского национального университета радиоэлектроники.
Научные интересы: принятие решений в условиях интервальной неопределенности.
e-mail: kolesnik_l_v@ukr.net

ВИВДЕНКО Сергей Александрович
студент факультета компьютерных наук Харьковского национального университета радиоэлектроники.
Научные интересы: оптимизация и принятие решений.
e-mail: vivdenko_sergei@ukr.net

ВВЕДЕНИЕ

Любая осознанная целенаправленная деятельность представляет собой последовательность решений, принимаемых и реализуемых человеком или группой людей, которые выступают в качестве лица, принимающего решение (ЛПР). Таким образом, процедура принятия решений является важнейшим аспектом интеллектуальной деятельности человека. Именно это обстоятельство определило давний и непрерывно возрастающий интерес к изучению этих процессов с целью их формализации и выработки на этой основе «нормативных» методов, правил, процедур выбора «эффективных» решений. В конечном счете, эти исследования привели к возникновению теории принятия решений [1].

Практическая потребность общества в научных основах принятия решений возникла с развитием науки и техники только в XVIII веке. Бурный рост технического прогресса ставил все новые и новые задачи, для решения которых привлекались и разрабатывались новые научные методы. Можно выделить следующие научно-технические предпосылки становления «Теории принятия решений»: удорожание «цены ошибки»; ускорение научно-технического прогресса; развитие ЭВМ.

ОБЗОР СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ

В общем случае в процессе принятия решений можно выделять три основных этапа [2]:

формирование множества допустимых решений X;

выбор и обоснование системы оценок, позволяющих установить на множестве X отношение порядка (задача оценивания);

определение наилучшего решения $x^o \in X$ (задача оптимизации).

Трудность реализации задачи оценивания заключается в том, что в большинстве случаев при синтезе сложных систем не удается выбрать единственный критерий, достаточно полно характеризующий систему. Это приводит к необходимости реализовать следующие шаги:

1) формирование множества частных критериев, достаточно полно отражающих все значимые характеристики системы;

2) выбор на множестве частных критериев метрики, позволяющей устанавливать на множестве решений $x \in X$ отношение порядка.

При этом каждый критерий имеет свой функциональный смысл, размерность, интервал изменения. Выбор в этих условиях наилучшего решения не вызывает затруднений только в том случае, если производится на множестве согласованных (подчиненных) решений. Последнее означает, что каждое решение лучше другого по всем или нескольким, при равенстве значений остальных, критериям. В противном случае возникает задача многокритериального выбора (оптимизации) на множестве противоречивых решений, которую можно записать в виде

$$x^o = \arg\operatorname{extr}\{k_i(x)\}, \ \forall i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где x^o – оптимальное решение, k_i – частные критерии, n - число частных критериев.

Задача (1) на множестве противоречивых решений (множестве Парето) не имеет единственного решения, т. е. является некорректной по Адамару [1] и требует регуляризации.

Наиболее общим и универсальным методом регуляризации задач многокритериальной оптимизации является формирование обобщенного скалярного критерия, который учитывает разнородные частные критерии:

$$P = F\{k_i(x)\}, \ \forall i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Теоретической основой формирования скалярной многофакторной оценки является теория полезности. Она основана на гипотезе Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна [3], что каждая локальная характеристика решения, которая оценивается частными критериями, имеет для ЛПР некоторую полезность (ценность), которая может быть описана численно. Поэтому существует обобщенная количественная оценка предпочтения решения. Иными словами, если решение $x_1, x_2 \in X$ и x_2 предпочтительнее x_1, тогда

$$x_1 \prec x_2 \Leftrightarrow P(x_1) < P(x_2),$$

где $P(x)$ – количественная скалярная оценка полезности решения.

Решая задачу структурной идентификации функции в рамках этой гипотезы, согласно [4], получим, что для любой системы, характеризуемой кортежем разнородных критериев $\langle k_i(x) \rangle$, $\forall i = \overline{1, n}$, существует скалярная оценка вида

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i k_i^{\,i}(x), \quad (3)$$

где $k_i^{\,i}(x)$ – нормализованные (безразмерные, с одинаковым интервалом изменения $[0, 1]$ и направлением доминирования) частные критерии [4];

a_i – коэффициенты относительной важности, удовлетворяющие требованиям

$$0 \le a_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \ \forall i = \overline{1, n}.$$

Для конструктивного использования многофакторной аддитивной оценки (3) необходимо решить задачу параметрической идентификации, т. е. определить значения коэффициентов a_i, $i = \overline{1, n}$.

Известны два способа определения коэффициентов относительной важности частных критериев a_i: путем экспертного оценивания и компараторной идентификации [4].

Современные работы в области поддержки принятия решений [5, 6] выявили характерную ситуацию, которая состоит в том, что полная формализация процесса нахождения точечных значений a_i возможна только для хорошо изученных, относительно простых задач, тогда как на практике чаще встречаются слабо структурированные задачи, для которых полностью формализованных алгоритмов не разработано. Поэтому с учетом неопределенности задачи будем предполагать, что ЛПР может получить только интервальные численные значения коэффициентов a_i вида

$$a_i = \left[a_i^{\min}; a_i^{\max}\right] \quad (4)$$

Интервал (4) является количественной характеристикой. При принятии точечного решения интерес представляет информация о характере распределения возможных значений внутри интервала. Возможны следующие три ситуации неопределенности:

- вероятностная (статистическая) неопределенность (интервал распределения возможных значений внутри интервала определяет закон распределения вероятностей);
- нечеткая неопределенность (интервал распределения возможных значений внутри интервала определяет функция принадлежности нечеткому множеству);

– равновозможная интервальная неопределенность (все значения внутри интервала являются равновозможными).

Для принятия точечных решений в условиях интервальной неопределенности применяются методики, описанные в [7], основанные на замене статистических интервальных величин на их математические ожидания, нечетких величин на их модальные значения, равновозможных интервалов на их центры. Однако в этом случае «теряется» информация об интервале как таковом.

Еще одна особенность заключается в том, что в реальных задачах часто встречается «смесь» перечисленных видов неопределенностей и для решения задачи необходимо трансформировать их в один базовый вид. На основе исследований [7], можно сделать вывод, что наиболее предпочтительной базовой формой является статистическая неопределенность с равномерным законом распределения. Это обусловлено тем, что приведение к реальному (нормальному) закону распределения требует информации, которая в большинстве случаев отсутствует. Кроме того, некоторые переменные принципиально не могут быть интерпретированы как случайные. В то же время равновероятностный закон распределения можно интерпретировать не как случайную величину, а как ситуацию, в которой отсутствует информация о предпочтениях конкретных значений, т.е. они все равновозможны (равновероятны).

Поэтому *целью данной статьи* является разработка методики принятия решений в условиях равновозможной интервальной неопределенности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ – множество альтернатив, каждая из которых характеризуется кортежем разнородных частных критериев, преобразованным в кортеж изоморфных (безразмерных, с одинаковым интервалом изменения и инвариантных к виду экстремума частных критериев) функций полезности $\left\langle k^{í}_{1}(x_j), k^{í}_{2}(x_j), \ldots, k^{í}_{n}(x_j) \right\rangle$, $j = \overline{1,m}$. Предположим, что существует скалярная численная оценка обобщенной полезности альтернатив вида (3), где параметры a_i заданы в виде (4) при условии $0 \le a_i \le 1$, $\forall i = \overline{1,n}$. При этом все значения внутри интервала являются равновозможными.

Необходимо решить задачу многофакторного оценивания и ранжирования альтернатив в этих условиях.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В описываемой модели задачи многофакторного оценивания для каждой альтернативы $x_j \in X$ значения $k^{í}_{i}(x)$, $i = \overline{1,n}$, являются действительными числами, а значения коэффициентов важности критериев – равновозможными интервалами. Поэтому для формирования интервальных многофакторных оценок воспользуемся следующими базовыми операциями интервальной математики [8]:

– сложения интервальных величин

$$\begin{aligned} c + d &= \left[c^{\min}; c^{\max} \right] + \left[d^{\min}; d^{\max} \right] = \\ &= \left[c^{\min} + d^{\min}; c^{\max} + d^{\max} \right] \end{aligned}, \qquad (5)$$

где c, d – интервальные величины;

– умножение интервальной величины на действительное число

$$b \cdot d = b \cdot \left[d^{\min}; d^{\max} \right] = \left[b \cdot d^{\min}; b \cdot d^{\max} \right], \qquad (6)$$

где b – действительное число, d – интервальная величина.

На основе аддитивной модели (3) и базовых операций интервальной математики (5), (6) интервал возможных значений многофакторной оценки примет вид

$$\begin{aligned} P(x_j) &= \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^{\min} \cdot k_i^{н}(x_j);\ \sum_{i=1}^{n} a_i^{\max} k_i^{н}(x_j) \right] = \\ &= \left[P_j^{\min}; P_j^{\max} \right] \\ & j = \overline{1,m} \end{aligned}, \qquad (7)$$

Решение задачи выбора экстремального решения основывается на нахождении максимальной «интервальной» обобщенной полезности.

Пусть необходимо сравнить значения «интервальной» обобщенной полезности вида (7). При этом могут возникнуть следующие ситуации:

– Интервалы не пересекаются (рис. 1).

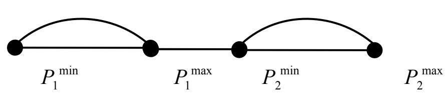

Рисунок 1 – Непересекающиеся интервальные величины

В этом случае решить задачу нахождения максимальной обобщенной полезности не составляет труда, потому что даже нижняя граница полезности второй альтернативы x_2 больше полезности первой альтернативы x_1.

— Интервалы соприкасаются (рис. 2).

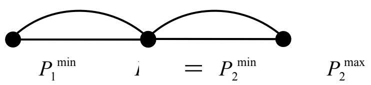

Рисунок 2 – Соприкасающиеся интервальные величины

Из рис. 2 видно, что большей полезностью можно считать полезность альтернативы x_2.

— Интервалы пересекаются (рис. 3).

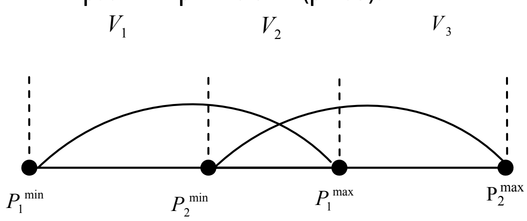

Рисунок 3 –Интервальные величины пересекаются

В этом случае для нахождения наибольшей полезности воспользуемся идеями теории проверки статистических гипотез, согласно которой более предпочтительной является гипотеза, имеющая большую вероятность реализации, а сила предпочтительности определяется значением этой вероятности.

Реализация такого подхода связана с необходимостью определения функции плотности распределения вероятностей значений внутри интервала. Согласно сформулированной постановки задачи, все значения внутри интервала являются равновозможными, т. е. распределены по закону равной вероятности. Отметим, что особенностью данного распределения является то, что вероятность попадания в любой интервал, равна относительному значению величины этого интервала.

Сформируем полную группу возможных событий ($P_1 < P_2$, $P_1 = P_2$, $P_1 > P_2$) и определим вероятности наступления этих событий. Сумма вероятностей полной группы событий равна единице, поэтому пронормируем интервал $\left[P_1^{min}; P_2^{max}\right]$ следующим образом:

$$V_1 = \frac{P_2^{min} - P_1^{min}}{P_2^{max} - P_1^{min}},$$
$$V_2 = \frac{P_1^{max} - P_2^{min}}{P_2^{max} - P_1^{min}}, \qquad (8)$$
$$V_3 = \frac{P_2^{max} - P_1^{max}}{P_2^{max} - P_1^{min}},$$

где V_i, $i = \overline{1,3}$ – вероятность попадания события в интервал, границы которого определяется выражением в числителе.

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{3} V_i = 1$.

Тогда:

— вероятность события $P_1 < P_2$ равна:

$$V_{(P_1<P)} = V_3 + V_1 + \left(V_3 + \frac{V_2}{2}\right)\left(V_1 + \frac{V_2}{2}\right); \qquad (9)$$

— вероятность события $P_1 > P_2$ равна:

$$V_{(P_1>P_2)} = \left(\frac{V_2}{2}\right)^2; \qquad (10)$$

— вероятность события $P_1 = P_2$ равна:

$$V_{(P_1=P_2)} = 1 - V_{(P_1>P_2)} - V_{(P_1<P_2)}. \qquad (11)$$

Событие с максимальной вероятностью считается наиболее достоверным.

— Один интервал находится внутри другого (рис. 4).

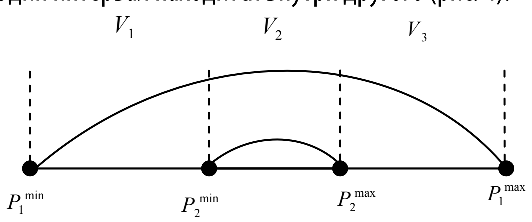

Рисунок 4 – Одна интервальная величина находится внутри другой

Этот случай аналогичен ситуации 3, только изменяются правила нормирования интервала $\left[P_1^{min}; P_1^{max}\right]$ следующим образом:

$$V_1 = \frac{P_2^{min} - P_1^{min}}{P_1^{max} - P_1^{min}}, \qquad (12)$$

$$V_2 = \frac{P_2^{max} - P_2^{min}}{P_1^{max} - P_1^{min}},$$

$$V_3 = \frac{P_2^{max} - P_1^{max}}{P_1^{max} - P_1^{min}},$$

а вероятности $V_{(P_1<P_2)}$, $V_{(P_1>P_2)}$, $V_{(P_1=P_2)}$ рассчитываются по формулам (9) – (11).

ВЫВОДЫ

В данной статье предложена методика принятия решений в условиях равновозможной интервальной неопределенности, основанная на теории полезности и элементах интервальной математики. В отличие от существующих методов, она учитывает информацию о характере распределения возможных значений внутри интервала.

Эта методика, в частности, может применяться для решения задачи распределения ресурсов в сильно централизованных системах с учетом интервальных входных параметров.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Петров, Е.Г. Методи і засоби прийняття рішень у соціально-економічних системах [Текст] /Е.Г. Петров, М.В. Новожилова, І.В. Гребеннік. – Харків: ХДТУБА, 2002. – 284 с.
2. Теория выбора и принятия решений [Текст]: учеб. пособие /Н.И. Макаров, Т.М. Виноградская, А.А. Рубчинский, В.Б. Соколов. – М.: Наука, 1982. – 326 с.
3. Нейман, Дж. Моргенштерн, О Теория игр и экономическое поведение [Текст]: пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 124 с.
4. Овезгельдыев, А.О. Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации [Текст] /А.О. Овезгельдыев, Э.Г. Петров, К.Э. Петров. – К.: Наук. думка, 2002. – 164 с.
5. Петров, К.Э. Определение значений многофакторных оценок альтернативных вариантов решений в условиях интервальной неопределенности [Текст] //Проблеми інформаційних технологій. – 2007. – №2. – С.167-173.
6. Писклакова, О.А. Анализ особенностей решения задач многокритериальной оптимизации в условиях неопределенности [Текст] /О.А. Писклакова, Н.А. Брынза, Д.И. Филипская //Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – 2008. – Выпуск 3 (56). – С.147–157.
7. Крючковский, В.В. Исследование корректности взаимной трансформации различных видов интервальной неопределенности [Текст] /В.В. Крючковский, Э.Г. Петров, Н.А. Брынза //Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2010. – №46. – С.174-187.
8. Алефельд, Г., Херцбергер, Ю. Введение в интервальные вычисления [Текст]: пер. с англ. – М.: Мир, 1987 – 356 с.