АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ УСЛОВИЙ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОПАСНЫХ СОЧЕТАНИЙ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

УДК 512.83

МАРАСАНОВ Владимир Васильевич
д.т.н., профессор, заведующий кафедрой Технической кибернетики Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: моделирование сложных систем.

РУДАКОВА Анна Владимировна
к.т.н., доцент кафедры Технической кибернетики Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: оптимальное управление большими распределенными системами.

ДЫМОВ Владимир Степанович
к.т.н., доцент кафедры Технической кибернетики Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: исследование систем встроенного контроля.

ДЫМОВА Анна Олеговна
старший преподаватель кафедры Технической кибернетики Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: моделирование процессов и систем, принятие решений в условиях неопределенности, распознавание образов.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Обычно из опытных данных или конструктивных расчетов испытываемых образцов динамических объектов имеются сведения, согласно которым можно определить диапазоны изменения измеряемых параметров, вхождение в которые может привести к разрушению образца испытываемого динамического объекта. Эти диапазоны могут определяться прочностными характеристиками материалов конструкции, выполнением сочетаний некоторых параметров, опасных для данного образца (например: выполнение условия баланса фаз и баланса амплитуд приводит к возникновению колебаний, разрушающих объект; превышение ускорением предельного значения приводит к большим ошибкам гироскопических систем и т.д.). Поэтому на этапе испытаний необходимо оценить условия возникновения опасного состояния.

Цель работы – разработка математического аппарата оценки условий возникновения опасных состояний динамических объектов.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Имеется выборка

$$(x_{1\xi},\ldots,x_{k\xi}),\ \ \xi=\overline{1,N},\ \ N>k \tag{1}$$

из k-мерной совокупности измеряемых параметров. Выборку вместе с точкой $(x_{10},\ldots,x_{k0})$ будем рассматривать как совокупность ($N+1$) точек в евклидовом пространстве E_k. N выборочных точек k-мерного выборочного пространства берутся на участке нормального функционирования динамического объекта из телеметрии.

Пусть $(x_{p\xi};\ p=\overline{1,S};\ \xi=\overline{1,N})$ – выборка объема N, соответствующая S параметрам, определяющим возникновение опасных состояний и характеризующая их t параметрами;

$(x_{v\xi};\ v=\overline{S+1,k};\ \xi=\overline{1,N};\ t+S=k)$ — выборка значений параметров, являющихся следствием изменения параметров $x_{p\xi}$ (например, группа *p* – горючее, окислитель, добавки, производительности насосов горючего и окислителя; группа *v* – температура в камере сгорания, показания тензодатчиков, фазовые сдвиги в магистралях горючего и окислителя и т.д.).

Указанные выборки можно рассматривать как выборки объема *N* соответственно *s*- и *t*-мерных векторов

$$(x_{p\xi})=\begin{pmatrix} x_{1\xi} \\ x_{2\xi} \\ \vdots \\ x_{s\xi} \end{pmatrix};\quad (x_{v\xi})=\begin{pmatrix} x_{s+1\xi} \\ x_{s+2\xi} \\ \vdots \\ x_{k\xi} \end{pmatrix};\xi=\overline{1,N}. \qquad (2)$$

Тогда выборка $(x_{1\xi},x_{2\xi},\ldots,x_{k\xi})$ запишется в векторной форме

$$\begin{pmatrix} (x_{p\xi}) \\ (x_{v\xi}) \end{pmatrix};\quad \xi=\overline{1,N};\ p=\overline{1,s};\ v=\overline{(s+1),k}. \qquad (3)$$

Предположим, что матрица внутреннего рассеяния для (3)

$$(u_{ij})=\begin{pmatrix} \Sigma(x_{1\xi}-x_{10})^2\,\Sigma(x_{1\xi}-x_{10})(x_{2\xi}-x_{20})\ldots\Sigma(x_{1\xi}-x_{10})(x_{k\xi}-x_{k0}) \\ \Sigma(x_{2\xi}-x_{20})(x_{1\xi}-x_{10})\Sigma(x_{2\xi}-x_{20})^2\ldots\Sigma(x_{2\xi}-x_{20})(x_{k\xi}-x_{k0}) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Sigma(x_{k\xi}-x_{k0})(x_{1\xi}-x_{10})\Sigma(x_{k\xi}-x_{k0})(x_{2\xi}-x_{20})\ldots\Sigma(x_{k\xi}-x_{k0})^2 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

и соответствующая ей $\frac{1}{N-1}(u_{ij})$ матрица ковариаций являются неособенными с вероятностью единица и может быть представлена в виде

$$\frac{1}{N-1}(u_{ij})=\frac{1}{N-1}\begin{pmatrix} (u_{pq}) & (u_{pw}) \\ (u_{vq}) & (u_{vw}) \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где (u_{pq}) и (u_{vw}) – матрицы внутреннего рассеяния *s*- и *t*-мерных векторов;

(u_{pw}) и (u_{vq}) – матрицы взаимного внутреннего рассеяния этих же векторов;

$$p,q=\overline{1,s};\quad v,w=\overline{s+1,k}.$$

Векторные выборки заданы в произвольном базисе [1, 2]. Для выявления наиболее характерной картины связи находится линейное преобразование, задающее вращение первых *s* и последних *t* координатных осей. Для этой цели используются две линейные формы от первых *s* и последних *t* случайных величин.

$$Z_{1\xi}=(C_{1p})'(x_{p\xi})=\sum_{p=1}^{s}C_{1p}x_{p\xi},$$
$$Z_{2\xi}=(C_{2v})'(x_{v\xi})=\sum_{v=s+1}^{k}C_{2v}x_{v\xi}, \qquad (6)$$

где $(C_{1p};\ p=\overline{1,s})$, $(C_{2v};\ v=\overline{s+1,k})$ – некоторые вещественные векторы. Штрих в (6) означает транспонирование.

Введением линейных форм мы переходим от выборки $(x_{1\xi},x_{2\xi},\ldots,x_{k\xi})$ к выборке

$$(z_{1\xi},z_{2\xi},\ldots,z_{k\xi});\ \xi=\overline{1,N} \qquad (7)$$

с матрицей ковариаций

$$(\tilde{u}_{ij})=\begin{pmatrix} (\tilde{u}_{11}) & (\tilde{u}_{12}) \\ (\tilde{u}_{21}) & (\tilde{u}_{22}) \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

где

$$(\tilde{u}_{11})=\sum_{p,q}u_{pq}C_{1p}C_{1q};\ (\tilde{u}_{22})=\sum_{v,w}u_{vw}C_{2v}C_{2w};$$
$$(\tilde{u}_{12})=\sum_{p,w}u_{pw}C_{1p}C_{2w};\ (\tilde{u}_{21})=\sum_{v,q}u_{vq}C_{1v}C_{2q};$$
$$\tilde{u}_{ij}=\frac{1}{N-1}\sum_{\xi=1}^{N}(Z_{i\xi}-Z_{i0})(Z_{j\xi}-Z_{j0}),\ i,j=1,2; \qquad (9)$$
$$Z_{i0}=Z_{j0}=0,\ \text{если } x_{i0}=0,\ i=\overline{1,k},$$

что можно принять без потери общности рассуждений, так как всегда можно перейти от измеряемых параметров к их центрированным величинам. Задача сводится, следовательно, к определению векторов $(C_{1p};\ p=\overline{1,s})$ и $(C_{2v};\ v=\overline{s+1,k})$, при которых коэффициент корреляции между линейными формами (6)

$$R=\frac{(\tilde{u}_{12})}{\sqrt{(\tilde{u}_{11})(\tilde{u}_{22})}} \qquad (10)$$

будет максимальным [3].

Введя нормировку $\left(\frac{x_{i\xi}}{\sigma_i};\ i=\overline{1,k};\ \xi=\overline{1,N}\right)$, формулу (10) можно записать в виде

$$R=(C_{1p})'(\tilde{u}_{12})(C_{2v}). \qquad (11)$$

Теперь задача нахождения векторов (c_{1p}) и (c_{2v}) при которых выражение (11) достигает максимума сводится к задаче на условный экстремум. Введем функцию Лагранжа

$$L=(C_{1p})'(\tilde{u}_{12})(C_{2v})-\frac{1}{2}\lambda\left[(C_{1p})'(\tilde{u}_{11})(C_{1p})-1\right]-\frac{1}{2}\mu\left[(C_{2v})'(\tilde{u}_{22})(C_{2v})-1\right] \qquad (12)$$

Продифференцировав L по компонентам векторов (C_{1p}) и (C_{2v}), получим

$$\left(\frac{\partial L}{\partial C_{1p}}\right) = (\widetilde{U}_{12})(C_{2v}) - \lambda(\widetilde{U}_{11})(C_{1p}) = (0),$$
$$\left(\frac{\partial L}{\partial C_{2v}}\right) = (\widetilde{U}_{12})(C_{1p}) - \mu(\widetilde{U}_{22})(C_{2v}) = (0), \quad (13)$$

где *λ* и *μ* – множители Лагранжа.

Так как $(C_{1p})'(\widetilde{U}_{11})(C_{1p}) = 1$ и $(C_{2v})'(\widetilde{U}_{22})(C_{2v}) = 1$, согласно нормировки, то, очевидно, что

$$\lambda = \mu = (C_{1p})'(\widetilde{U}_{12})(C_{2v}) \quad (14)$$

и уравнения (13) в силу симметричности матриц $(\widetilde{U}_{12})$ и $(\widetilde{U}_{21})$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} -\lambda(\widetilde{U}_{11}) & (\widetilde{U}_{12}) \\ (\widetilde{U}_{21}) & -\lambda(\widetilde{U}_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (C_{1p}) \\ (C_{2v}) \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

Условием ненулевого решения (15) будет

$$\begin{vmatrix} -\lambda(\widetilde{U}_{11}) & (\widetilde{U}_{12}) \\ (\widetilde{U}_{21}) & -\lambda(\widetilde{U}_{22}) \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) может быть приведено по формуле Лапласа к виду [1, 3]:

$$(-1)^k(\lambda^k - q_1\lambda^{k-1} + q_2\lambda^{k-2} + \ldots + q_k) = 0. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) будет *k* вещественных собственных значений матрицы ковариаций; корни будут вещественными в силу симметричности матрицы (Uij). При этом, в силу теоремы Перрона [2, 4], одно из значений будет максимальным, а остальные, соответственно, λ2, λ3, … λk. Из формулы (14) видно, что λ равно коэффициенту корреляции между $(z_{1\xi}) = (C_{1p})'(x_{p\xi})$ и $(z_{2\xi}) = (C_{2v})'(x_{v\xi})$, где (C1p) и (C2v) удовлетворяют уравнению (15) при некотором значении λ, то есть вектор $\begin{pmatrix} C_{1p} \\ C_{2v} \end{pmatrix}$ является собственным вектором [1, 3]. Так как требуется получить максимальный коэффициент корреляции, выберем λ = λ1. Подставив это значение в уравнение (15), найдем собственные векторы $\left(C_{1p}^{(1)}\right)$ и $\left(C_{2v}^{(1)}\right)$. Согласно формулы (6), найдем линейные комбинации

$$z_{1\xi}^{(1)} = (C_{1p}^{(1)})'(x_{p\xi}) = \sum_{p=1}^{s} C_{1p}^{(1)} x_{p\xi}$$
$$z_{2\xi}^{(1)} = (C_{2v}^{(1)})'(x_{v\xi}) = \sum_{v=s+1}^{k} C_{2v}^{(1)} x_{v\xi}, \quad (6)$$

являющиеся нормированными линейными формами первых *s* (“причин”) и последних *t* (“следствий”) измеряемых параметров, имеющих наибольший коэффициент корреляции.

В силу того, что все собственные направления, задаваемые собственными векторами ковариационной матрицы ортогональны (в силу ее симметричности), мы получим *s* пар линейных форм z_1, z_2 некоррелированных между собой. Ввиду максимальности коэффициента корреляции между линейными формами $z_{1\xi}^{(1)} = \sum_{p=1}^{s} C_{1p}^{(1)} x_{p\xi}$ и $z_{2\xi}^{(1)} = \sum_{v=s+1}^{k} C_{2v}^{(1)} x_{v\xi}$, линейная форма $z_{1\xi}^{(1)}$ представляет собой комбинацию компонент вектора $(x_{p\xi})$ (“причин”), которая имеет наиболее сильное влияние на линейную комбинацию вектора $(x_{v\xi})$ (“следствий”) и этой линейной комбинацией является $z_{2\xi}^{(1)}$.

ВЫВОДЫ

1. При испытании динамических объектов множество телеметрируемых параметров возможно разделить на две группы на основе причинно-следственных связей.

2. Используя экстремальные свойства собственных значений матрицы внутреннего рассеивания телеметрируемых параметров с помощью линейных преобразований находятся группы сочетаний параметров, оказывающие наибольшее влияние на группы параметров, характеризующих опасные (предаварийные) состояния.

3. Вероятностные оценки возникновения предаварийных состояний могут быть получены с учетом распределения вероятностей собственных значений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.
2. П. Ланкастер. Теория матриц. – М.: Наука, 1978.
3. Дж.Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1972.
4. Марасанов В.В. Прогнозирование структуры динамических систем /В.В. Марасанов, О.И. Забытовская, А.О. Дымова. //Вестник Херсонского национального технического университета. – 2011. – №41. – С.265-275.