



# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ТОЧЕЧНОЙ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

УДК 004.942:519.25

## ПРИХОДЬКО Сергей Борисович

к.т.н., доцент, заведующий кафедрой программного обеспечения автоматизированных систем  
Национального университета кораблестроения им. адмирала Макарова.

Научные интересы: математическое моделирование случайных процессов в информационных технологиях.

e-mail: [sergiy.prykhodko@nuos.edu.ua](mailto:sergiy.prykhodko@nuos.edu.ua)

## МАКАРОВА Лидия Николаевна

соискатель Национального университета кораблестроения им. адмирала Макарова/

Научные интересы: математическое моделирование случайных процессов в информационных технологиях.

e-mail: [lidija@ultra.mk.ua](mailto:lidija@ultra.mk.ua)

### Постановка проблемы

Экспоненциальный (показательный) закон распределения случайной величины (СВ) служит одним из наиболее часто используемых, наряду с нормальным. Применяется для описания процессов, обладающих свойством отсутствия последствий, в связи с чем является основным в теории стационарных марковских процессов и широко используется в теории массового обслуживания и в теории надежности [1].

В теории надежности экспоненциальный закон является одним из основных законов распределения и используется для описания распределения времени безотказной работы объектов при временных отказах или распределения времени между соседними отказами и времени восстановления. Популярность этого закона распределения объясняется тем, что он физически очень естественен, прост и удобен для использования. Задачи, решаемые на основе экспоненциального закона, оказываются на порядок проще, чем для произвольных законов распределения. Однако подчеркивается, что экспоненциальное распределение является приближенным вариантом аппроксимации эмпирических данных [1, 2, 3].

Существует проблема, связанная с оценкой параметра экспоненциального распределения. Как правило, параметр распределения определяется с помощью точечной оценки. Интервальное оценивание с помощью доверительного интервала является более надежным по сравнению с точечным. Для СВ, распределение которой отличается от нормального, определение доверительных интервалов известно только для некоторых законов распределения, одним из которых и является экспоненциальный [4].

Однако эмпирические данные не всегда могут быть в точности аппроксимированы экспоненциальным законом распределения и могут содержать некоторые отклонения, что потребует уточнения закона распределения СВ.

### АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Экспоненциальное распределение является непрерывным аналогом геометрического распределения. Это однопараметрическое распределение с параметром  $\lambda$  – постоянной интенсивностью отказов, при этом среднее время безотказной работы определяется как

величина, обратная интенсивности отказов  $t_{cp} = \frac{1}{\lambda}$  и является математическим ожиданием (начальным моментом первого порядка) экспоненциального распределения. Точечной оценкой математического ожидания является выборочное среднее.

На сегодняшний день существует методика определения доверительного интервала выборочного среднего в случае экспоненциального закона распределения на основе распределения  $\chi^2$  Пирсона по формуле, приведенной в [4]. Однако может потребоваться уточнение закона распределения эмпирических данных, содержащих значения, отклоняющиеся от экспоненциального закона. Подобное уточнение может быть получено с помощью применения нормализующего преобразования Джонсона.

В работах [5, 6] предложен подход, основанный на применении нормализующих преобразований. Суть этого подхода состоит в следующем: на основе нормализующего преобразования получить СВ с нормальным законом распределения, определить доверительный интервал выборочного среднего этой СВ традиционным способом на основе  $t$ -распределения Стьюдента [7], а затем на основе обратного преобразования получить доверительный интервал выборочного среднего начальной СВ. Выбор конкретного нормализующего преобразования необходимо выполнять в зависимости от эмпирических данных.

Для аппроксимации эмпирических распределений было предложено использовать подход на основе преобразования Джонсона. Использование указанного подхода показало хорошие результаты для различных областей применения [8, 9, 10].

**Целью данной статьи** является определение доверительного интервала точечной оценки выборочного среднего на основе как экспоненциального закона распределения, так и нормализующего преобразования Джонсона, и сравнение полученных результатов с существующими.

### ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Имеется СВ  $x$ , которая подчиняется экспоненциальному закону распределения, плотность вероятности которого задается формулой [2]:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – параметр распределения.

Параметр распределения  $\lambda$  может быть выражен через величину, обратную математическому ожиданию:  $\lambda = \frac{1}{m_x}$ . На практике для задания экспоненци-

ального закона распределения можно применять либо интенсивность отказов  $\lambda$ , либо время наработки между отказами  $t$ , и тогда параметром распределения будет служить математическое ожидание  $m_x$ . Точечной оценкой математического ожидания является выборочное среднее  $\hat{m}_x$ .

Доверительный интервал выборочного среднего  $[\hat{\alpha}_1(x)]$  СВ  $x$  в случае экспоненциального закона распределения получим следующим образом [4]:

$$[\hat{\alpha}_1(x)] = \left[ 2n\hat{m}_x / \chi_{2n, (1-\beta)/2}^2, 2n\hat{m}_x / \chi_{2n, (1+\beta)/2}^2 \right], \quad (2)$$

где  $n$  – количество значений в выборке,  $\hat{m}_x$  – выборочное среднее СВ  $x$ ;  $\chi_{2n, (1-\beta)/2}^2$  и  $\chi_{2n, (1+\beta)/2}^2$  – верхние 100 $\alpha$ % точки распределения  $\chi^2$ ,  $\beta$  – доверительная вероятность.

При использовании в качестве параметра распределения  $\lambda$ , получим следующий доверительный интервал:

$$[\hat{\lambda}] = \left[ \chi_{2n, (1+\beta)/2}^2 \cdot \lambda^* / 2(n-1), \chi_{2n, (1-\beta)/2}^2 \cdot \lambda^* / 2(n-1) \right], \quad (3)$$

где  $\lambda^* = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n x_i}$  – несмещенная точечная оценка

$\lambda$ .

При использовании подхода, основанного на применении нормализующих преобразований, значения СВ можно нормализовать с помощью преобразования Джонсона [5]:

$$\begin{aligned} z &= \gamma + \eta h(x, \phi, \lambda); \\ \eta &> 0; \\ -\infty &< \gamma < \infty; \\ \lambda &> 0; \\ -\infty &< \phi < \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Преобразование (4) имеет обратное преобразование:

$$\begin{aligned}
 x &= \phi + \lambda h^{-1}(z, \gamma, \eta); \\
 \eta &> 0; \\
 -\infty &< \gamma < \infty; \\
 \lambda &> 0; \\
 -\infty &< \phi < \infty,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Здесь  $z$  – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием ноль и дисперсией единица;  $x$  – случайная величина с распределением Джонсона;  $\gamma, \eta, \lambda, \phi$  – параметры преобразования или распределения Джонсона;  $h$  и  $h^{-1}$  – функции определенного семейства:

$$h = \begin{cases} \ln(\tilde{x}), & x > \phi, & \text{для семейства } S_L; \\ \ln[\tilde{x}/(1-\tilde{x})], & \phi < x < \phi + \lambda, & \text{для семейства } S_B; \\ \text{Arsh}(\tilde{x}), & -\infty \leq x \leq +\infty, & \text{для семейства } S_U, \end{cases}$$

$$h^{-1} = \begin{cases} e^\zeta, & \text{для семейства } S_L; \\ 1/(1+e^{-\zeta}), & \text{для семейства } S_B; \\ (e^\zeta - e^{-\zeta})/2, & \text{для семейства } S_U. \end{cases}$$

Конкретное семейство распределений Джонсона выбирается исходя из значений оценок квадрата асимметрии  $A^2$  и эксцесса  $\varepsilon$  исходной выборки [11].

Значения оценок неизвестных параметров преобразования можно найти с помощью решения задачи математического программирования [5]:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \{A_z^2 + (\varepsilon_z - 3)^2 + \bar{z}^2 + (S_z^2 - 1)^2\}, \tag{6}$$

где  $\theta$  – вектор неизвестных параметров,  $\theta = \{\gamma, \eta, \phi, \lambda\}$ ;  $A_z$  – точечная оценка асимметрии нормализованной выборки,

$A_z = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n \left( \frac{z_i - \bar{z}}{S_z} \right)^3$ ;  $\varepsilon_z$  – точечная оценка эксцесса нормализованной выборки,

$\varepsilon_z = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n \left( \frac{z_i - \bar{z}}{S_z} \right)^4$ ;  $\bar{z}$  – выборочное среднее нормализованной выборки,

$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$

;  $S_z^2$  – выборочная дисперсия нормализованной выборки,

$S_z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$ ;  $n$  – количество значений в выборке.

Алгоритм определения  $(1-\alpha)\%$  доверительного интервала выборочного среднего  $[\hat{\alpha}_1(x)]$  СВ  $x$  определяется следующим образом [6]:

1) для выборочного среднего  $\bar{x}$  определяем соответствующее значение  $\bar{z}$  по формуле (4);

2) находим  $\Delta z = t_{n-1} S_z / \sqrt{n}$ ;

3) получаем границы доверительного интервала выборочного среднего СВ  $z$ :  $z_{\min} = \bar{z} - \Delta z$  и  $z_{\max} = \bar{z} + \Delta z$ ;

4) для значений  $z_{\min}$  и  $z_{\max}$  по преобразованию (5), получаем границы доверительного интервала выборочного среднего СВ  $x$ :  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$ .

Для проверки приведенного подхода выполним расчет примера 1 из [4], количество значений в выборке  $n = 12$ , выборочное среднее  $\bar{x} = 547,25$ , выборочная дисперсия  $S_x^2 = 158586,19$ . Расчет доверительных интервалов выборочного среднего  $[\hat{\alpha}_1(x)]$  и точечной оценки параметра  $[\hat{\lambda}]$  для экспоненциального закона распределения выполнялся по формулам (2) и (3). Расчет с применением нормализующего преобразования Джонсона выполнен по приведенному выше алгоритму. По значениям оценок  $A^2 = 0,9357$  и  $\varepsilon = 2,7256$  в соответствии с диаграммой, приведенной в [11], было выбрано семейство распределений Джонсона  $S_B$ . Параметры распределения  $\gamma, \eta, \lambda, \phi$  были найдены в результате решения задачи (6):  $\gamma = 3,1525$ ,  $\eta = 1,0853$ ,  $\phi = 34,1672$ ,  $\lambda = 7337,26$ . Также было выполнено непараметрическое оценивание согласно [12]. Результаты расчета приведены в табл. 1.

Таблица 1 –

**Доверительные интервалы выборочного среднего и точечной оценки параметра экспоненциального закона распределения**

Оценка	Значения из [4]	Расчет по формулам (2) и (3)	Расчет с применением преобразования Джонсона	Непараметрическое оценивание
$[\hat{\alpha}_1(x)]$	не рассчитывалось	[297,51; 944,34]	[294,02; 810,59]	[235,00; 740,82]
$[\hat{\lambda}]$	[1,15·10 <sup>-3</sup> ; 3,67·10 <sup>-3</sup> ]	[1,155·10 <sup>-3</sup> ; 3,667·10 <sup>-3</sup> ]	[1,234·10 <sup>-3</sup> ; 3,401·10 <sup>-3</sup> ]	[1,350·10 <sup>-3</sup> ; 4,255·10 <sup>-3</sup> ]

Проверка адекватности нормализации выполнена с помощью критерия согласия Колмогорова-Смирнова [13, 14], т.к. приведенная выборка – малая ( $n < 30$ ). Для критерия Колмогорова  $\lambda = 0,544$  при критическом значении  $\lambda = 0,895$ , для критерия Смирнова  $W^2 = 0,058$  при критическом значении  $W^2 = 0,126$ . С доверительной вероятностью 0,95 гипотеза о соответствии преобразованной выборки нормальному закону распределения СВ принимается.

Проведенный расчет показал следующее. Подход на основе нормализующего преобразования Джонсона дает адекватный результат: относительные погрешности для левой и правой границы  $[\hat{\lambda}]$  составляют 7,3%, а относительно выборочного среднего  $\bar{\lambda} = 2,050 \cdot 10^{-3}$  границы расположены несимметрично как и в [4]. Использование непараметрического оценивания согласно [12] приводит к качественно неправильному результату: относительно выборочного среднего  $\bar{\lambda}$  границы расположены симметрично. При этом относительные погрешности для левой и правой границы  $[\hat{\lambda}]$  составляют соответственно 17,4% и 15,9%.

## ВЫВОДЫ

Выполнено определение доверительного интервала точечной оценки выборочного среднего на основе как экспоненциального закона распределения, так и нормализующего преобразования Джонсона. Проведено сравнение полученных результатов с существующими данными. Подход на основе нормализующего преобразования Джонсона является более универсальным, т.к. его можно использовать в случае, когда эмпирические данные отличаются от экспоненциального закона распределения.

Для выполнения расчетов было доработано соответствующее программное обеспечение на языке программирования Java. Проведенный расчет показал его работоспособность и адекватность.

Планируется использование полученных результатов для дальнейшего развития вероятностной модели распределения времени наработки между отказами устройств терминальной сети на основе нормализующего преобразования Джонсона и построения информационной технологии автоматизации системы управления терминальной сетью.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Острейковский В.А. Теория надежности: Учеб. для вузов /В.А. Острейковский. – М.: Высш. шк., 2003. – 463 с.
2. Гнеденко Б.В. Математические методы в теории надежности /Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
3. Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке /Н. Джонсон, Ф. Лион. – М.: Мир, 1980. – 610 с.
4. Монсик В.Б. Оценивание параметра показательного распределения по усеченной выборке /В.Б. Монсик, А.А. Скрынников //Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. Серия Прикладная математика. Информатика. – 2006. – №105. – С.134-140.
5. Приходько С.Б. Інтервальне оцінювання статистичних моментів негаусівських випадкових величин на основі нормалізуючих перетворень /С.Б. Приходько //Математичне моделювання: науковий журнал. – 2011. – №1 (24). – С.9-13.
6. Приходько С.Б. Метод побудови нелінійних рівнянь регресії на основі нормалізуючих перетворень /С.Б. Приходько //Тези доповідей міждерж. науково-методич. конф. «Проблеми математичного моделювання» (13-15 червня 2012 р., м. Дніпродзержинськ). – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2012. – С.31-33.
7. Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики /Дж. Поллард. – Пер. с англ. В.С. Занадворова; под ред. и с предисл. Е.М. Четыркина. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 344 с.
8. Приходько С.Б. Інтервальне оцінювання математичного сподівання часу затримок виконання програмних проектів на основі перетворення Джонсона /С.Б. Приходько, А.В. Пухалевич //Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – №2 (38). – С.402-404.
9. Приходько С.Б. Выбор нормализующего преобразования для оценки продолжительности работ при управлении временем в проектах разработки конструкторской документации судна /С.Б. Приходько, О.А. Кудин //Зб. наук. праць НУК. – 2011. – №4 (439). – С.140-145.
10. Єременко В.С. Дослідження перетворення Джонсона для задач підвищення точності метрологічних характеристик стандартних зразків /В.С. Єременко, В.М. Мокійчук, О.В. Самоїлченко //Системи обробки інформації: Зб. наук. праць ХУПС. – 2010. – №4 (85). – С.36-42.
11. Коваленко І.І. Сучасні методи статистичного аналізу даних: Навчальний посібник /І.І. Коваленко, С.Б. Приходько, Л.О. Латанська. – Миколаїв: НУК, 2011. – 192 с.
12. Орлов А.И. Прикладная статистика /А.И. Орлов. – М.: Экзамен, 2004. – 656 с.
13. Степнов М.Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний: Справочник /М.Н. Степнов. – М.: Машиностроение, 1985. – 232 с.
14. Тюрин Ю.Н. Непараметрические методы статистики /Ю.Н. Тюрин. – М.: Знание, 1978. – 64 с.