ГІБРИДНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ПОТІК ВАНТАЖУ У МАТРИЧНІЙ ПОСТАНОВЦІ ІЗ ДОДАТКОВИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

УДК 656.02

СЛАВИЧ В'ячеслав Петрович
к.т.н., доцент кафедри транспортних технологій Херсонського національного технічного університету.
Наукові інтересі: моделювання транспортних процесів і систем.
e-mail: vslavich@yandex.ua

ВСТУП

Задача про максимальний потік вантажу у матричній постановці використовуються при плануванні та управлінні вантажними перевезеннями. В класичній постановці дана задача присвячена проблемі перевезення максимально можливої кількості продукту від постачальників до споживачів в заданих обмеженнях. В якості вхідних даних є величини запасів та величини потреб вантажу, а також умови можливостей перевезення вантажу від кожного з постачальників до кожного споживача, що задані у вигляді наступної матриці:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

де n – кількість постачальників;

m – кількість споживачів,

a_{ij} – можливість перевезення вантажу від i-го постачальника до j-го споживача, причому:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ якщо вантаж перевозити можна;} \\ 1, \text{ якщо вантаж перевозити не можна.} \end{cases}$$

Задача складається в знаходженні такого плану перевезень, при якому була би вивезена максимально можлива кількість вантажу (або щоб потік перевезеного вантажу був максимальним).

Існують також різновиди даної задачі [8], в яких на умови перевезення продукту надаються додаткові обмеження. Наприклад: обмеження на кількість вивезеного продукту; обмеження на кількість ввезеного продукту; обмеження на час доставки вантажу; обмеження за пропускними здатностями та ін.

Однак, у практиці перевізних процесів виникають ситуації, коли на вивезення вантажу накладається одночасно декілька видів з зазначених обмежень, що, в свою чергу, і зумовлює актуальність даного дослідження – необхідність створення відповідних моделей та методів розв'язання оптимізаційних задач, що використовуються в процесах планування та управління вантажними перевезеннями.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В даній роботі викладено побудову гібридної моделі задачі про максимальний потік вантажу у матричній постановці, на умови якої накладається два додаткових обмеження:

1) за вивозом продукту від груп постачальників вантажу;
2) за пропускними здатностями сполучень, що з'єднують постачальників та споживачів.

Перше обмеження пояснюється випадком, коли постачальники продукту в свою чергу отримують вантаж з заводів і відповідно до цього всі вони розділені на певні групи так, що кожна група отримує вантаж від певного заводу, сумарно який може надати продукту в обмежених кількостях.

Друге обмеження може бути зумовлено, наприклад, вантажопідйомністю транспортного засобу, їх кількістю або обмеженнями за вагою при русі по ділянці вулично-дорожньої мережі та ін..

В роботі запропоновано метод розв'язання даної задачі.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Сформулюємо умови зазначеної гібридної моделі задачі про максимальний потік у матричній постановці.

Нехай задано n постачальників $A_1, A_2, \ldots, A_m$, у яких зосереджено вантаж відповідно у кількостях $a_1, a_2, \ldots, a_m$ од., та m споживачів даного вантажу $B_1, B_2, \ldots, B_m$, яким даний вантаж необхідний відповідно у кількостях $b_1, b_2, \ldots, b_m$ од.. Та нехай задано матрицю чисел (a_{ij}), які можуть приймати два значення – 0 чи 1, в залежності від того, можна чи ні перевозити продукт від i-го постачальника до j-го споживача.

Позначимо через $(x_{ij}), \ i=\overline{1,n}, \ j=\overline{1,m}$ – план перевезень та введемо додаткові обмеження.

1) Припустимо, що всі постачальники вантажу розділені на певні групи та задані обмеження за вивезенням загальної кількості продукту з кожної групи:

$$\sum_{i \in I_k} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le S_k, k=\overline{1,r},$$

де r – кількість груп постачальників (кількість заводів);

I_k – множина номерів пунктів відправлень, що належать до k-ої групи.

S_k – максимальна кількість продукту, що може бути вивезена з k-ої групи (S_k>0).

2) Припустимо, що існують обмеження за пропускними здатностями маршрутів руху транспортних засобів, що задані у вигляді наступної матриці коефіцієнтів:

$$(d_{ij}), \ i=\overline{1,n}, \ j=\overline{1,m}.$$

Тоді модель задачі буде мати наступний вигляд.

1) Цільова функція:

$$F=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \to \max.$$

2) Система обмежень:

$x_{ij}=0$, якщо $a_{ij}=1$; $x_{ij} \ge 0$, якщо $a_{ij}=0$;

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le a_i, \text{ при фіксованому i, } i=\overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le b_j, \text{ при фіксованому j, } j=\overline{1,m};$$

$$\sum_{i \in I_k} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le S_k, k=\overline{1,r};$$

$$x_{ij} \le d_{ij}, \ i=\overline{1,n}, \ j=\overline{1,m}.$$

Умови задачі та подальший хід пошуку оптимального плану представляється у вигляді табл. 1.

Таблиця 1

Поста-чаль-ники	Споживачі				Запаси	Обмеження за вивозом вантажу із групи
	B_1	**B_2**	…	**B_m**		
A_1	a_{11} d_{11}	a_{12} d_{12}	…	a_{1m} d_{1m}	a_1	
A_2	a_{21} d_1	a_{22} d_{22}	…	a_{2m} d_{2m}	a_2	S_1
…	…	…	…	…	…	
A_{i_1}	$a_{i_1 1}$ $d_{i_1 1}$	$a_{i_1 2}$ $d_{i_1 2}$	…	$a_{i_1 m}$ $d_{i_1 m}$	a_{i_1}	
A_{i_1+1}	$a_{i_1+1,1}$ $d_{i_1+1,1}$	$a_{i_1+1,2}$ $d_{i_1+1,2}$	…	$a_{i_1+1,m}$ $d_{i_1+1,m}$	a_{i_1+1}	
A_{i_1+2}	$a_{i_1+2,1}$ $d_{i_1+2,1}$	$a_{i_1+2,2}$ $d_{i_1+2,2}$	…	$a_{i_1+2,m}$ $d_{i_1+2,m}$	a_{i_1+2}	S_2
…	…	…	…	…	…	
A_{i_2}	$a_{i_2 1}$ $d_{i_2 1}$	$a_{i_2 2}$ $d_{i_2 2}$	…	$a_{i_2 m}$ $d_{i_2 m}$	a_{i_2}	
…	…	…	…	…	…	…
A_{i_k+1}	$a_{i_k+1,1}$ $d_{i_k+1,1}$	$a_{i_k+1,2}$ $d_{i_k+1,2}$	…	$a_{i_k+1,m}$ $d_{i_k+1,m}$	a_{i_k+1}	
A_{i_k+2}	$a_{i_k+2,1}$ $d_{i_k+2,1}$	$a_{i_k+2,2}$ $d_{i_k+2,2}$	…	$a_{i_k+2,m}$ $d_{i_k+2,m}$	a_{i_k+2}	S_r
…	…	…	…	…	…	
A_n	a_{n1} d_{n1}	a_{n2} d_{n2}	…	a_{nm} d_{nm}	a_n	
Потреби	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{j=1}^{m} b_j$	$\sum_{k=1}^{r} S_k$

Для розв'язання даної задачі пропонується використання наступного модифікованого алгоритму.

1. Будуємо опорний план.

Опорний план (початковий розв'язок) будується згідно класичних підходів шляхом почергового перегляду стовпців та заповненням клітинок, де можливе перевезення. Але значення перевезення слід обирати як менше з чотирьох чисел: відповідних величин запасів, величин потреб, величин обмежень за вивозом продукту, що відповідає групі, до якої відноситься розглянута клітинка, та величини пропускної здатності клітинки, тобто:

$$\min(a_i; b_j; S_k; d_j).$$

2. Для кожного стовпця перевіряємо умову:

$$b_j = 0.$$

Стопці, для яких дана умова виконується, вважаємо закритими та позначаємо їх знаком „V".

3. Перевіряємо, чи всі стопці закриті. Якщо це так, то задача розв'язана, оскільки всі потреби споживачів задоволені, а, отже, більша кількість вантажу не може бути перевезена.

В іншому випадку перевіряємо, чи є серед чисел a_i такі, що не дорівнюють нулю. Якщо таких чисел не існує, то задача також розв'язана, оскільки весь продукт вивезено і потік вантажу також не може бути збільшений.

Додатково для рядків, у яких виконується нерівність $a_i > 0$, перевіряємо умову $S_k = 0$. Якщо всі такі числа S_k дорівнюють нулю, то потік максимальний і задачу також буде розв'язано, оскільки можливості усіх груп постачальників вичерпано.

Якщо ж і серед чисел a_i, і серед чисел b_j, і серед чисел S_k (при умові $a_i > 0$) є відмінні від нуля, то не можна стверджувати, що даний план є оптимальним, тому слід перевірити можливість збільшення потоку вантажу.

4. Знаходимо не розглянутий відкритий стовпчик. Якщо такий стовпчик знайдеться, то переходимо до п.5 алгоритму, в протилежному випадку (всі відкриті стопці розглянуто) збільшити потік вантажу не вдасться, таким чином, даний план перевезень є оптимальним і задачу буде розв'язано.

5. В знайденому відкритому стовпці (позначимо його номер через j_0) знаходимо клітинку, через яку можливе перевезення та яка розташована у незакритому рядку (позначимо номер цього рядка через i_0), при цьому розглядаємо тільки ті клітинки, для яких виконується умова:

$$x_{ij} < d_{ij},$$

та переходимо до п.6.

Якщо у даному стовпці не існує таких клітинок, то вважаємо його розглянутим і повертаємось до п.4.

6. Перевіряємо для рядка i_0 умову вивезення всього вантажу з i_0-го пункту.

1) Якщо виконується один з двох виразів:

$$a_{i_0} = 0 \text{ або } \begin{cases} a_{i_0} > 0 \\ S_k = 0 \end{cases},$$

тоді переходимо до п.7.

2) В разі виконання системи нерівностей:

$$\begin{cases} a_{i_0} > 0 \\ S_k > 0 \end{cases}$$

переходимо до п.8.

7. Закриваємо рядок i_0 (позначаємо його знаком „V"), а при виконанні умови $S_k = 0$ закриваємо всі рядки k-ої групи, а клітинки даного рядка (рядків), для яких виконується умова:

$$x_{i_0 j} \neq 0$$

і які розташовані у закритих стовпцях позначаємо знаком „–", а відповідні їм стовпці розкриваємо (знак „V" таких стовпців видаляємо).

Клітинка (i_0j_0) позначається знаком „+". Далі переходимо до п.5 і повторюємо зазначені в ньому процедури.

8. Будуємо ланцюг клітинок за наступними правилами: у стовпці j_0 знайденої клітинки (i_0j_0) знаходимо клітинку, що позначена знаком „–". Якщо її не існує, то ланцюг побудований і складається тільки з одного елемента (i_0j_0). Якщо така клітинка існує, то з'єднуємо її відрізком прямої з клітинкою (i_0j_0). Далі у рядку (або серед рядків даної групи постачальників) знайденої клітинки знаходимо іншу клітинку, що позначена знаком „+" (така клітинка обов'язково знайдеться і тільки одна) і з'єднуємо її з попередньою, при цьому рядок закривається. Далі у стовпці останньої клітинки знову відшукуємо клітинку із позначкою „–" і алгоритм цього пункту продовжується за аналогічними розмірковуваннями.

Таким чином, у результаті даних процедур буде побудовано ланцюг клітинок, що почергово позначені знаками „–" та „+".

9. Тепер необхідно перерозподілити вантаж за наступними правилами:

1) визначаємо величину перерозподілу вантажу із системи:

$$\begin{cases} \Delta x = \min(x_{ij}, a_{i_0}, b_{j_0}); \\ \Delta x \le S_{k_0}; \\ \Delta x \le d_{i_p j_p} - x_{i_p j_p}, \end{cases}$$

де x_{ij} – перевезення, що розташовані у клітинках ланцюга, що позначені знаком „–";

k_0 – номер групи постачальників, до якої належить рядок i_0;

$(i_p j_p)$ – клітинки ланцюга, що не позначені знаком „–".

2) з усіх перевезень, що знаходяться в клітинках із позначкою „–", віднімаємо величину Δx;

3) до всіх перевезень, що знаходяться в клітинках із позначкою „+", додаємо величину Δx.

10. Видаляємо всі введені додаткові позначення та переходимо до п.2.

При виконанні даного алгоритму при кожній побудові ланцюга клітинок кількість вантажу, що перевозиться, збільшується, тому після скінченої кількості повторень даної процедури буде отримано оптимальний план задачі.

ВИСНОВКИ

Таким чином, в даній роботі запропоновано гібридну модель задачі про максимальний потік вантажу у матричній постановці, на умови якої накладено два додаткових обмеження: за вивозом продукту від груп постачальників вантажу та за пропускними здатностями сполучень, що з'єднують постачальників зі споживачами.

Для даної задачі побудовано модель та запропоновано метод знаходження відповідного оптимального плану перевезень.

Дані викладення рекомендовано до використання при плануванні вантажних транспортних перевезень.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Брайловский Н.О. Моделирование транспортных систем. – М.: Транспорт, 1978. – 125 с.
2. Воркут А.И. Грузовые автомобильные перевозки. – К.: Вища школа, 1986. – 447 с.
3. Дрю Д. Теория транспортных потоков и управление ими. – М.: Транспорт, 1972. – 423 с.
4. Клинковштейн Г.И. Организация дорожного движения. Учебник для автомобильно-дорожных вузов и факультетов. – М.: Транспорт, 2001. – 192 с.
5. Лобанов Е.М., Сильянов В.В. и др. Пропускная способность автомобильных дорог. – М.: Транспорт, 1970. – 150 с.
6. Справочник по організации и планированию автомобильних перевозок /Под ред. И.Г. Крамаренко – К.: Техніка, 1991. – 208 с.
7. Триус Е.Б. Задачи математического программирования транспортного типа. – М.: Советское радио, 1967. – 208 с.