ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УДК 004.94:004.032.26

КОРОТКАЯ Лариса Ивановна
к.т.н., доцент кафедры информационных систем ГВУЗ «Украинский государственный химико-технологический университет».
Научные интересы: теория нечётких множеств, интервальный анализ, искусственные нейронные сети.
e-mail: korliv@hotmail.com

ЗЕЛЕНЦОВ Дмитрий Гегемонович
д.т.н., профессор, заведующий кафедрой информационных систем
ГВУЗ «Украинский государственный химико-технологический университет».
Научные интересы: моделирование поведения корродирующих объектов,
системы искусственного интеллекта: теория нечётких множеств, нейронные сети.
e-mail: dmyt_zel@mail.ru

НАУМЕНКО Наталья Юрьевна
к.т.н., доцент, доцент кафедры информационных систем ГВУЗ «Украинский
государственный химико-технологический университет».
Научные интересы: моделирование поведения корродирующих конструкций,
принятие решений в условиях неопределённости.
e-mail: nay_nata@i.ua

ВВЕДЕНИЕ

Проблемам моделирования поведения сложных систем, в частности, металлических конструкций, функционирующих в условиях агрессивных внешних сред, за последние десятилетия уделяется значительное внимание. В таких отраслях промышленности как химическая, металлургическая, горная, технологические процессы предполагают контакт конструкционных элементов оборудования с агрессивными рабочими средами. В качестве основного дестабилизирующего воздействия таких сред следует рассматривать коррозионный износ – разрушение поверхностного слоя металла. В результате коррозии металла происходят изменения геометрических и прочностных характеристик элементов конструкций и, как следствие, преждевременный, а иногда и аварийный выход их из строя. Несмотря на большой интерес к указанным проблемам, многие вопросы не получили достаточного освещения и далеки от своего завершения. Таким образом, актуальность проблемы определения ресурса конструкции, обеспечение её работоспособности в течение заданного срока времени, не вызывает сомнений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решение задачи прогнозирования долговечности корродирующей конструкции предполагает наличие модели её поведения в агрессивной среде. Большое количество математических моделей делает проблематичным построение единого подхода к решению указанного класса задач. Однако следует отметить, что все они феноменологически подобны. В работе рассматриваются лишь те модели процесса накопления геометрических повреждений, в которых скорость коррозии зависит от напряжений, в свою очередь изменяющихся с течением времени [1]:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \Psi\{\sigma(t)\} \quad (1)$$

Здесь δ — глубина коррозионного поражения; t — время; v_0 — скорость коррозии при отсутствии напряжений; σ^* — абсолютное значение эквивалентного напряжения; $\Psi\{\sigma(t)\}$ — некоторая известная функция.

В том случае, когда закон изменения напряжений во времени известен (например, они зависят только от геометрических размеров конструкционного элемента), тогда уравнение (1) может быть сведено к уравнению с разделяющимися переменными и решено аналитически [2] или, в большинстве случаев, численно.

Изменение геометрических размеров элементов в статически неопределимых системах влияют на изменение напряжений как непосредственно, уменьшая площадь сечения, так и опосредовано, вызывая изменение внутренних усилий [3]. Тогда напряжение в некотором элементе конструкции будет зависеть не только от его геометрических характеристик, но и в различной степени всех остальных её элементов.

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 \Psi\left\{\sigma_i\left(\delta_i, Q_i\left(\bar{\delta}\right)\right)\right\}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где Q_i — усилие в $i-м$ элементе, N — количество параметров, определяющих размеры конструкции.

Отметим, что определить состояние конструкции в некоторый момент времени или оценить её долговечность можно путём решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (СДУ) вида (2).

Размерность этой системы равна количеству параметров, однозначно определяющих геометрические размеры конструкции, количество которых достигает нескольких десятков, а нередко и сотен. Правые части уравнений содержат нелинейные функции напряжений, заданные в общем случае в виде некоторого вычислительного алгоритма. Более того, определение напряжений в конструкции с произвольной геометрией, граничными условиями и условиями нагружения также возможно лишь с использованием численных методов, например, метода конечных элементов (МКЭ) [4].

При решении СДУ (2) задача МКЭ решается в каждом узле временной сетки:

$$\delta_i^s = \delta_i^{s-1} + \Delta t^s \cdot v_0 \cdot \psi\left(\sigma_i^{s-1}\left(\delta^{s-1}\right)\right), \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

где s — номер итерации, Δt — шаг интегрирования.

Если размерность задачи МКЭ достаточно большая, то вычислительные затраты могут оказаться чрезмерно высокими, прежде всего в задачах определения оптимальных параметров элементов корродирующих конструкций (далее задача оптимизации). В этом случае для известных постановок функции ограничений предполагают определение долговечности конструкции на каждом шаге поиска оптимального проекта [5].

ПРОБЛЕМНЫЕ АСПЕКТЫ

С целью повышения эффективности вычислительных алгоритмов решения СДУ можно использовать следующие способы:

– обоснованный выбор численного метода решения задачи Коши;

– определение рационального шага интегрирования СДУ (такого шага, который при минимальном количестве итераций обеспечивал бы получение решения с погрешностью, не превышающей предельно допустимого значения).

Остановимся подробней на каждом из них. На основе анализа поведения функции правой части дифференциального уравнения (2) может быть сделан выбор численного метода решения задачи Коши. Для определённости в качестве корродирующего элемента рассмотрим стержень кольцевого сечения при одноосном нагружении. Зависимость напряжений от времени будет определяться формулой:

$$\sigma(t) = \frac{Q}{\pi((R-\delta)^2 - r^2)}, \quad (4)$$

где R и r — соответственно внешний и внутренний радиусы элемента.

График этой зависимости представлен на рисунке 1. Точка τ соответствует тому времени, когда $\delta(t) = R - r$, и является точкой разрыва второго рода. Долговечность элемента определяется абсциссой точки *A*, ордината которой соответствует предельному значению напряжения $[\sigma]$. Согласно формуле (3) при численном решении СДУ не исключаются следующие случаи.

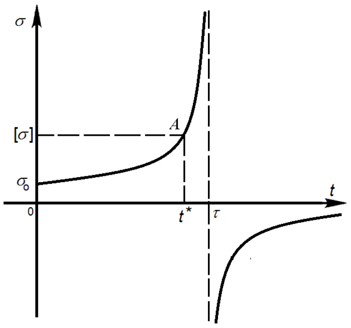


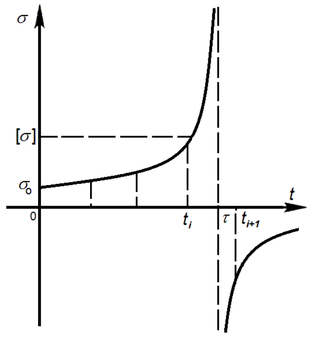
Рисунок 1 – График зависимости «напряжение – время»

Возможна ситуация, когда точка разрыва второго рода может оказаться между узлами временной сетки (рис. 2а). Тогда в точке t_i условие прочности выполняется, состояние конструкции считается допустимым, и алгоритм предполагает следующий шаг интегрирования уравнения, приводящий систему в точку t_{i+1}, которая не принадлежит окрестности τ. В результате будет получено, заведомо, неверное решение. Описанный случай можно отследить путём контроля знака разности $((R-\delta)-r)$, а при его возникновении можно вернуться в точку t_i и продолжить решение с меньшим шагом Δt.

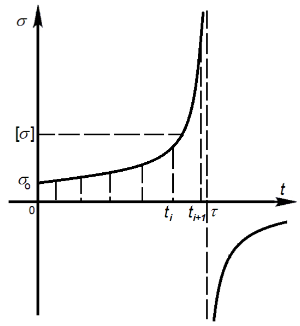
Не исключается и ситуация, изображенная на рисунке 2б, когда точка t_{i+1} попадает в окрестность точки τ. Знаменатель дроби в выражении (4) становится бесконечно малой величиной, при этом может возникать нештатное завершение программы (например, «деление на ноль»). Решение задачи приходится начинать заново с новым значением Δt, что, впрочем, не является гарантией того, что описанная ситуация не повторится.

Вероятность того, что точка разрыва второго рода окажется между узлами возрастает пропорционально увеличению шага интегрирования. Это ставит под сомнение преимущества одношаговых численных методов высших порядков. Именно этим и объясняется тот факт, что в большинстве известных работ для решения СДУ вида (2) используется метод Эйлера.

Становится очевидным, что при решении задачи прогнозирования долговечности методом Рунге-Кутты первого порядка повышение эффективности вычислительного алгоритма может быть достигнуто путём рационального выбора шага интегрирования Δt. Последнее утверждение особенно актуально при решении задачи оптимизации корродирующих конструкций, когда задача прогнозирования долговечности становится частью более общей указанной задачи.



а)



б)

Рисунок 2 – Нежелательные ситуации, возникающие при численном решении

Анализ литературных источников показал, что практически во всех известных авторам работах величина Δt является параметром задачи определения оптимальных параметров корродирующих конструкций и не изменяется в процессе её решения. Ввиду того, что варьируемые параметры, определяющие геометрические характеристики системы, изменяются в широком диапазоне, то для одного подмножества пространства решений требуемая точность не достигается (погрешность превышает допустимое значение), а для другого его подмножества число итераций является избыточным. Представляется очевидным, что повышение эффективности алгоритма при соблюдении требуемой точности может быть достигнуто лишь с помощью управления погрешностью решения СДУ, описывающей коррозионный износ.

В работе предлагается подход к решению проблемы повышения эффективности численных алгоритмов решения СДУ с использованием искусственных нейронных сетей (НС). Задача НС состоит в определении на основе имеющейся информации о геометрических параметрах элементов конструкции (например, площади A_0 и периметра P_0 конструкционного элемента), параметрах агрессивной среды v_0, начального σ_0 и предельного $[\sigma]$ напряжений такого шага интегрирования СДУ Δt, при котором погрешность решения не превышает предельно допустимого значения ε^*.

Исходя из анализа факторов, которые, помимо шага интегрирования, влияют на погрешность численного решения, предложена архитектура НС (многослойный персептрон), выступающей в роли нейроконтроллера. Не вдаваясь в подробное описание выбора архитектуры НС, функций активации [6], отметим, что сеть была обучена с помощью алгоритма обратного распространения ошибки. С целью предотвращения замкнутых циклов порядок подачи обучающих образцов проводился в стохастическом порядке. Количество учебных образцов для обучения и тестирования НС принималось с учётом рекомендаций, приведенных в [6].

Ввиду того, что процедура получения обучающей выборки не является тривиальной (как известно, процесс обучения нейронной сети зависит именно от качества обучающих образцов), следует остановиться на указанной процедуре более детально.

Воспользуемся тем, что в некоторых случаях, возможно, получить аналитическое решение для отдельного уравнения системы (2). Так, например, для стержня при постоянном одноосном нагружении и модели коррозионного износа [7]:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \cdot (1 + k\sigma), \qquad (5)$$

получена аналитическая формула, позволяющая определить время, за которое напряжение в стержне изменится от значения σ_0 до $\sigma_1 \le [\sigma]$ [8].

$$t^*_{\text{ан}} = t_0 - \frac{2kQ}{v_0 \cdot |d|}\left\{arctg\frac{2a\delta|d|}{|d|^2 + (2a\delta + b)b}\right\}. \qquad (6)$$

Здесь A_0, P_0 – площадь и периметр сечения в начальный момент времени; Q – величина осевого усилия; $t_0 = \dfrac{\delta(t^*)}{v_0}$; a – коэффициент формы сечения; $b = -P_0$; $c = A_0 + kQ$; $d = \sqrt{|b^2 - 4ac|}$; $d \ne 0$; $\delta(t^*)$ – глубина коррозионного износа, соответствующая предельному значению напряжения; k – коэффициент влияния напряжения на скорость коррозии.

Следовательно, формула (6) позволяет получить точное решение в предположении, что осевое усилие постоянно во времени. Задача состоит в определении такого наибольшего значения шага интегрирования Δt, при котором погрешность численного решения $t^*(\Delta t)$ относительно аналитического $t^*_{ан}$ не превысит предельно допустимого значения ε^*:

$$\frac{\left|t^*_{ан} - t^*(\Delta t)\right|}{t^*_{ан}} \le \varepsilon^*. \qquad (7)$$

Выражение (7) является нелинейным уравнением, которое можно решить каким-либо известным численным методом и получить значение Δt, обеспечивающее для данного образца заданную точность численного решения дифференциального уравнения.

ЧИСЛЕННАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ

Для численной иллюстрации предложенного подхода рассматривается решение задачи прогнозирования долговечности стержня растянутого силой Q. На рисунке 3 приведены кривые роста напряжений для стержней с различными площадями поперечных сечений и осевой нагрузкой. Размеры сечений и величины нагрузки подбирались таким образом, чтобы долговечность стержня, определяемая по аналитической формуле (6), была равна $t^* = 8{,}00$ годам.

Численное решение задачи было получено, в том числе, с применением нейроконтроллера. Для определения погрешности решения использовались значения напряжений в момент времени *t**. При получении решения методом Эйлера с величиной шага интегрирования $\Delta t = 0{,}25$ года его погрешность составила 0,34% при $[\sigma]/\sigma_0 = 2$ (кривая 1); 2,44% при $[\sigma]/\sigma_0 = 6$ (кривая 2) и 25,06% при $[\sigma]/\sigma_0 = 16$ (кривая 3). При этом периметр сечения стержня составлял $A_0 = 52{,}89\ \text{см}^2$, коэффициент слитности $\eta = 0{,}49\ см^{-1}$ (кривая 1), значение напряжений оказались равными $\sigma = 239{,}18\ Мпа$; $A_0 = 9{,}36\ \text{см}^2$, $\eta = 1{,}16\ см^{-1}$ (кривая 2) – $\sigma = 234{,}14\ Мпа$; $A_0 = 4{,}83\ \text{см}^2$, $\eta = 1{,}61\ см^{-1}$ (кривая 3) – $\sigma = 179{,}85 Мпа$.

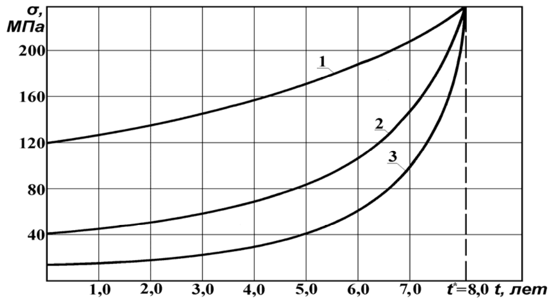


Рисунок 3 – Изменение напряжений во времени для трёх образцов

В табл. 1 приведены результаты численного решения с использованием нейроконтроллера, как управляющего механизма, позволяющего определить параметры численных процедур с погрешностью, не превышающей предельно допустимого значения.

Таблица 1 –
Результаты численного решения задачи прогнозирования с использованием нейроконтроллера

Предельно допустимая погрешность, %	№ стержня	Δt, лет	σ, МПа	Получаемая погрешность, %
≤ 3	1	0,743	233,04	2,90
	2	0,261	233,56	2,81
	3	0,043	232,94	2,94
≤ 6	1	1,015	226,08	5,81
	2	0,604	225,79	5,92
	3	0,079	225,89	5,88
≤ 10	1	1,629	220,56	8,92
	2	0,897	218,30	9,04
	3	0,107	216,82	9,66

ВЫВОДЫ

На основании приведенных результатов численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1.При численном решении системы дифференциальных уравнений, описывающей коррозионный износ, использование нейроконтроллера позволяет избежать избыточных итераций и, как следствие, повысить эффективность вычислительного алгоритма.

2.Впервые получена возможность управления точностью решения таких систем дифференциальных уравнений. В качестве параметра задачи может выступать не шаг интегрирования системы вида (2), а предельно допустимая погрешность её решения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ovchinnikov I.G. Opredelenie dolgovechnosti jelementov konstrukcij, vzaimodejstvujushhih s agressivnoj sredoj /I.G. Ovchinnikov, V.V. Petrov //Stroit. mehanika i raschet sooruzhenij. – 1982. – №2. – S.8-10.
2. Zelencov D.G. Raschjot konstrukcij s izmenjajushhejsja geometriej v agressivnyh sredah. Sterzhnevye sistemy. – Dnepropetrovsk: UGHTU, 2002. – 168 s.
3. Korotkaja L.I. Povyshenie jeffektivnosti vychislitel'nyh metodov modelirovanija povedenija korrodirujushhih konstrukcij: dis. ... kand. tehn. nauk: 01.05.02 /L.I. Korotkaja – Dn-sk, 2012. – 144 s.
4. Zelencov D.G. Novye konechnye jelementy peremennoj zhjostkosti dlja raschjota konstrukcij, podverzhennyh korrozionnomu iznosu /D.G. Zelencov //Sbornik nauchnyh trudov Nacional'noj gornoj akademii Ukrainy. – Dnepropetrovsk: «Navchal'na kniga», 2002. – №13. – T.2. – S.169-174.
5. Zelencov D.G. Optimal'noe proektirovanie korrodirujushhih konstrukcij pri interval'nyh harakteristikah parametra agressivnoj sredy. /D.G. Zelencov, L.I. Korotkaja //Sistemni tehnologiї. [Regional'nij mizhvuzivs'kij zbirnik naukovih prac']. – 2010. – Vip.4 (69). – S.51-57.
6. Korotkaja L.I. Ispol'zovanie nejronnyh setej pri chislennom reshenii nekotoryh sistem differencial'nyh uravnenij. /L.I. Korotkaja //Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij. – 2011. – №¾ (51). – S.24-27.
7. Dolinskij V.M. Raschjot nagruzhennyh trub, podverzhennyh korrozii /V.M. Dolinskij //Himicheskoe i neftjanoe mashinostroenie. – 1967. – №2. – S.9-10.
8. Zelencov D.G. Analiz primenimosti analiticheskih formul pri reshenii zadach dolgovechnosti sterzhnevyh korrodirujushhih konstrukcij /D.G. Zelencov, O.A. Radul', L.I. Korotkaja //Sistemni tehnologiї. [Regional'nij mizhvuzivs'kij zbirnik naukovih prac']. – 2007. – Vip.3 (50). – S.121-129.

Рецензент: *д.т.н., проф. Слесарев В.В., Национальный горный университет, Днепропетровск.*