

## ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ СУДОВОЖДЕНИЯ

УДК 656.61.052

### **ИВАНОВСКИЙ Николай Владимирович**

к.т.н., доцент кафедры судовождения Керченского государственного морского технологического университета.

**Научные интересы:** проблемы судовождения.

### **ГОЛИКОВ Сергей Павлович**

к.т.н., доцент кафедры электрооборудования судов и автоматизации производства Керченского государственного морского технологического университета.

**Научные интересы:** проблемы судовождения.

### **ЧЁРНЫЙ Сергей Григорьевич**

к.т.н., доцент кафедры электрооборудования судов и автоматизации производства Керченского государственного морского технологического университета.

**Научные интересы:** экспертные технологии поддержки принятия решений.

### **КУЗЬМЕНКО Александр Сергеевич**

ассистент кафедры судовождения Керченского государственного морского технологического университета.

**Научные интересы:** проблемы судовождения.

### **КУЦЕНКО Дмитрий Георгиевич**

аспирант кафедры судовождения Керченского государственного морского технологического университета.

**Научные интересы:** проблемы судовождения.

#### **ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ В ОБЩЕМ ВИДЕ**

Трудно переоценить важность математической модели какого-либо процесса. Имея математическую модель возможно качественно и количественно оценить исследуемый процесс, найти аналитические зависимости, необходимые для выполнения проектных работ. Любая современная система управления предполагает наличие математической модели управляемого объекта. Поэтому проблема создания адекватных математических моделей объектов является актуальной задачей.

Как известно морское судно является, с точки зрения строгой формализации, сложным объектом. Задача построения наиболее адекватной модели судна до сих пор полностью не решена. Причиной этого является большое количество факторов влияния на динамику движения судна. С другой стороны ряд факторов достаточно сложно

оценить, что приводит к неоднозначному подходу при формализации динамики движения морского судна.

#### **АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ДОСТИЖЕНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ**

Практическая значимость решения данной задачи привлекла многих ученых. Такие исследователи как А.М. Басин, К.К. Федяевский, Г.В. Соболев, Я.И. Войткунский, Ю.М. Мاستушкин и др. создали фундаментальные основы для теоретических расчетов параметров движения судна [1-3]. В результате была получена математическая модель [2], которая, по сути, является базовой. Недостатком этой модели является большое количество параметров, расчет которых представляет собой не простую задачу. В связи с этим были получены производные модели, в которых имеются элементы линеаризации и упрощения.

С развитием средств вычислительной техники и прикладной математики появилась возможность отойти от упрощений, таким образом, сохранив нелинейные свойства судна, но тогда мы сталкиваемся с прежней задачей – оценкой огромного количества параметров модели. Идентификация этих параметров для реального судна является сложной задачей. Поэтому исследования направленные на поиск решения наиболее опти-

мального подхода к формализации процесса движения морского судна являются актуальными.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ставится задача выработать подход к построению математической модели судна, без линеаризации и упрощений, с перспективой идентификации ее параметров для конкретного судна.

$$m_{11} \frac{dv_x}{dt} = m_{22} v_y \omega - \left( \frac{C_{x3} + C_{x0}}{2} v^2 - \frac{C_{x3} - C_{x0}}{2} v v_x + b_1 v^2 + 2b_2 \frac{v_x v_y^4}{v^3} \right) \frac{\rho A_L}{2} - C_{xR}(\alpha) \left( \frac{\rho v_2}{2} A_R + cT \right) + T \quad (1)$$

$$m_{22} \frac{dv_y}{dt} = -m_{11} v_x \omega - \left( 2C_{y\beta} \frac{v_x^2 v_y}{v} + c_2 |v_y| v_y - 16c_3 \frac{v_x^4 v_y^3 |v_y|}{v^6} \right) \frac{\rho A_L}{2} - C_{yR} \left( \frac{\rho v_2}{2} A_R + cT \right) \sin \alpha + Y_p \quad (2)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = -[2m_1 v_x v_y + m_2 v v_y + m_3 \frac{v_x^3 v_y^3}{v^4} - 16m_4 \frac{v_x^4 |v_y^3| v_y}{v^6} + C_{Mo} L^2 |\omega| \omega + \frac{C_{M\omega}}{\pi} (v^2 + L^2 \omega^2) \sin \pi \Omega] \frac{\rho A_L L}{2} + C_{yR} \alpha l_R \left( \frac{\rho v_2}{2} A_R + cT \right) \sin \alpha + M_p \quad (3)$$

### ИЗЛОЖЕНИЕ МАТЕРИАЛА ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве исходной выбрана математическая модель управления судна на тихой глубокой воде вида [2]:

где для лаконичности символами  $m_{11}$ ,  $m_{22}$ ,  $J$  обозначены масса судна и момент его инерции с соответствующими присоединенными массами воды.

Традиционно на этапе приложений математической модели ее упрощают путем линеаризации, исключения отдельных слагаемых для различных режимов движения и т.д. Обычно это делается для получения аналитического решения или для идентификации ее параметров. В данной работе предполагается численное интегрирование математической модели, поэтому ставились следующие задачи:

1) сохранить все детали модели, не прибегая к упрощающим приближениям, чтобы она имела большую степень достоверности;

2) преобразовать модель к наиболее универсальной форме, разрешенной относительно производных, с безразмерными коэффициентами и переменными;

3) перегруппировать слагаемые, путем приведения подобных слагаемых и выделения управляющих функций: угла перекадки руля  $\alpha(t)$ , тяги движителя  $T(t)$ , которые в общем случае являются функциями времени.

После таких преобразований математическая модель (1-3) принимает вид

$$\frac{d\bar{v}_x}{d\bar{t}} = c_{11} \bar{v}_y \bar{\omega} + c_{12} \bar{v} \bar{v}_x + c_{13} \bar{v}_y^2 + c_{14} \frac{\bar{v}_x \bar{v}_y^4}{\bar{v}^3} + c_{15} (\alpha) \bar{v}^2 + c_{16} (\alpha) \bar{T} \quad (4)$$

$$\frac{d\bar{v}_y}{d\bar{t}} = c_{21} \bar{v}_x \bar{\omega} + c_{22} \frac{\bar{v}_x^2 \bar{v}_y}{\bar{v}} + c_{23} |\bar{v}_y| \bar{v}_y + c_{24} \frac{\bar{v}_x^4 \bar{v}_y^3 |\bar{v}_y|}{\bar{v}^6} + c_{25} (\alpha) \bar{v}^2 + c_{26} (\alpha) \bar{T} \quad (5)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{t}} = c_{31} \bar{v}_x \bar{v}_y + c_{32} \bar{v}_y \bar{v} + c_{33} \frac{\bar{v}_x^3 \bar{v}_y^3}{\bar{v}^4} + c_{34} \frac{\bar{v}_x^4 \bar{v}_y^3 |\bar{v}_y|}{\bar{v}^6} + c_{35} |\bar{\omega}| \bar{\omega} + c_{36} (\alpha) \bar{v}^2 + c_{37} (\alpha) \bar{\omega}^2 + c_{38} (\alpha) \bar{T} + c_{39} \quad (6)$$

где черта над символами обозначает их приведение к безразмерной форме. Для скоростей, времени и упора это сделано следующим образом

$$\bar{v}_x = \frac{v_x}{v_0}, \quad \bar{v}_y = \frac{v_y}{v_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega L}{v_0}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_0} \quad (7)$$

Один из параметров скорость  $v_0$  или упор  $T_0$  может быть выбран произвольно, а второй определяется из их функциональной зависимости этих параметров для какого-нибудь простого типа движения. В этом случае исключается произвол в выборе этих параметров, а числовые значения нормированных величин приобретут более отчетливый смысл. Наиболее естественным для связи этих параметров кажется выбор режима прямолинейного движения, для которого уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\rho A_L C_{x0}}{2m_{11}} v^2 + \frac{T}{m_{11}}. \quad (8)$$

Его решение дает для максимальной скорости значение

$$v_0 = \sqrt{\frac{2T_0}{\rho A_L C_{x0}}}. \quad (9)$$

Именно это соотношение удобно использовать для связи  $v_0$  и  $T_0$ .

Связь коэффициентов  $c_{ij}$  системы уравнений (4-6) с параметрами уравнений (1-3) будет более лаконичной при введении обозначения

$$\rho A_L L = m.$$

Необходимо также воспользоваться формулой Федеяевского для коэффициента сопротивления руля

$$C_{xR}(\alpha) = C_{xR0} + K_D \sin^2 \alpha + 2 \sin^3 \alpha. \quad (10)$$

Тогда для коэффициентов уравнения (4) получаем соотношения

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{m_{22}}{m_{11}}, c_{12} = \frac{m_0(C_{x3} - C_{x0})}{4m_{11}}, \\ c_{13} &= -\frac{m_0 b_1}{2m_{11}}, c_{14} = -\frac{m_0 b_2}{m_{11}}, \\ c_{15}(\alpha) &= -\left(\frac{C_{x3} + C_{x0}}{2A_R} A_L + C_{x0} + \right. \\ &\quad \left. K_D \sin^2 \alpha + 2 \sin^3 \alpha\right) \frac{m_0}{2m_{11}}, \\ c_{16}(\alpha) &= (1 - cC_{x0} - cK_D \sin^2 \alpha - 2c \sin^3 \alpha) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{LT_0}{m_{11}v_0^2} \sin^3 \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично для коэффициентов уравнения (5):

$$\begin{aligned} c_{21} &= -\frac{m_{11}}{m_{22}}, c_{22} = -\frac{m_0 C_{y\beta}}{m_{22}}, \\ c_{23} &= -\frac{m_0 c_2}{2m_{22}}, c_{24} = -\frac{8m_0 c_3}{m_{22}}, \\ c_{25} &= -\frac{m_0 C_{yR}^\alpha}{2m_{22}} \sin \alpha, \\ c_{26} &= -\frac{c C_{yR}^\alpha L T_0}{m_{22} v_0^2} \sin \alpha, c_{27} = \frac{Y_p L}{m_{22} v_0^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Последнее уравнение модели (6) имеет коэффициенты

$$\begin{aligned} c_{31} &= -\frac{m_0 m_1 L^2}{J}, c_{32} = -\frac{m_0 m_2 L^2}{2J}, \\ c_{33} &= -\frac{m_0 m_3 L^2}{2J}, c_{34} = \frac{8m_0 m_4 L^2}{J}, \\ c_{35} &= -\frac{m_0 C_{M\omega} L^2}{2\pi J}, \\ c_{36} &= -\left(C_{M\omega} \sin \pi \Omega - \frac{\pi C_{yR}^\alpha I_R A_R}{L A_L} \sin \alpha\right) \frac{m_0 L^2}{2\pi J}, \\ c_{37} &= -\frac{C_{M\omega} m_0 L^2}{2\pi J} \sin \pi \Omega, \\ c_{38} &= \frac{c C_{yR}^\alpha I_R T_0 L^2}{J v_0^2} \sin \alpha, c_{39} = \frac{M_p L^2}{J v_0^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Программа численного решения математической модели имеет следующую структуру

- 1) задание числовых значений основных параметров модели;
- 2) задание управляющих величин как функций времени;
- 3) задание начальных условий для переменных модели;
- 4) блок решения системы дифференциальных уравнений;
- 5) вывод решения.

Разработанная модель, а точнее, «переформатирование» базовой модели (1-3), имеет 21 параметр, что существенно меньше, чем в исходной модели. Процесс идентификации этих параметров должен основываться только с использованием натуральных испытаний.

Внешний вид модели может быть представлен в виде:

$$\frac{d\bar{v}_x}{dt} = f(c_{11}, \dots, c_{16}, \bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{\omega}) \quad (14)$$

$$\frac{d\bar{v}_y}{dt} = f(c_{21}, \dots, c_{26}, \bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{\omega}) \quad (15)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = f(c_{31}, \dots, c_{39}, \bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{\omega}) \quad (16)$$

Данное представление очень удобно для проведения идентификации матрицы неизвестных констант  $C$ .

На рисунках приведены тестовые кривые, полученные с помощью разработанной модели.

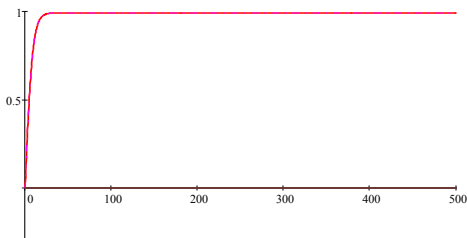


Рисунок 1 – Разгон при нулевом угле перекадки и нулевой начальной скорости, упор  $T_0$ : зависимость от времени скорости  $v_x$

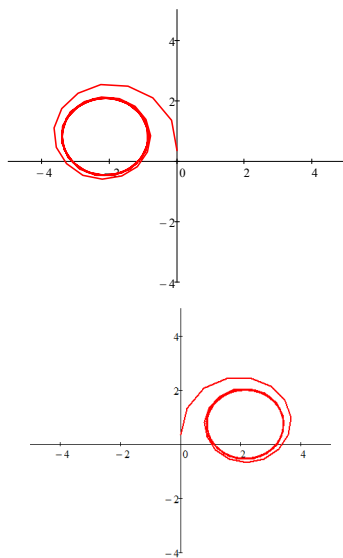


Рисунок 2 – Симметрия левой и правой циркуляции (угол перекадки  $\pm 30^\circ$ , начальная скорость  $0,7v_0$ , упор  $0,5T_0$ )

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Basin A.M. Hodkost' i upravljaemost' sudov. – М.: Transport, 1977. – 305 s.
2. Vojtkunskij Ja.I. Spravochnik po teorii korablja: [Spravochnik] /Ja.I. Vojtkunskij, R.Ja. Pershic, I.A. Titov – L.: Sudostroenie, 1973. – 534 s.
3. Mastushkin Ju.M. Upravljaemost' promyslovyh sudov. – М.: Legkaja i pishhevaia promyshlennost', 1981. – 232 s.

Рецензент: д.т.н., проф. Коваленко И.И., Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова.

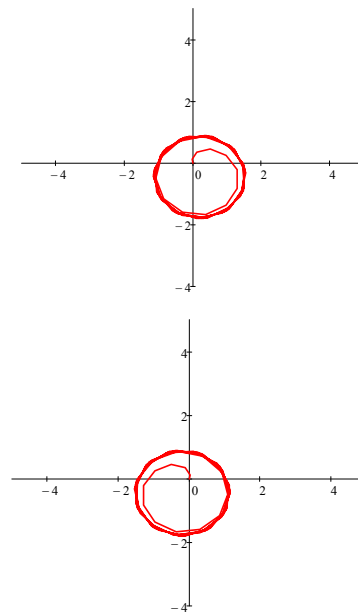


Рисунок 3 – Симметрия левой и правой циркуляции (угол перекадки  $\pm 30^\circ$ , начальная скорость  $= 0$ , упор  $T_0$ )

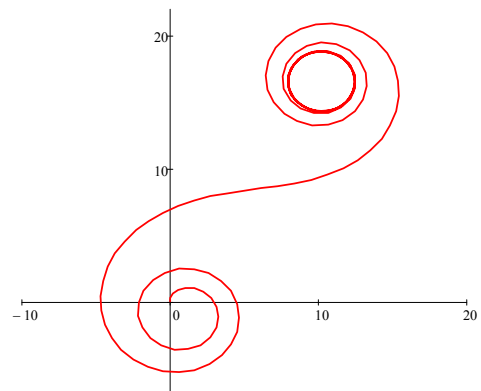


Рисунок 4 – Спиральная траектория для определения поворотливости судна и устойчивости на курсе

#### ВЫВОДЫ

Описанный выше подход к построению математической модели судна позволяет сохранить его нелинейные свойства, а также полученная модель наиболее удобна для идентификации ее параметров.

Алгоритм идентификации параметров модели будет изложен в следующей работе.