ОПТИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕНИ НАХОЖДЕНИЯ В ОЧЕРЕДИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПОТОКОВ СОБЫТИЙ

УДК 519.872

ГУСТИ Надежда Анатольевна
аспирантка кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: оптимизация конфликтных систем массового обслуживания.
e-mail: gusti-n@bk.ru

МАРАСАНОВ Владимир Васильевич
д.т.н, профессор, заведующий кафедрой технической кибернетики
Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: исследование конфликтных систем массового обслуживания.

ВВЕДЕНИЕ

Производственные, транспортные системы и много других систем можно рассматривать как системы массового обслуживания (СМО). При создании моделей СМО необходимо решать сложные задачи. При решении этих задач нужно учитывать ряд факторов: закон распределения потока; закон распределения заявок; закон распределения времени обслуживания. Поэтому разработка моделей алгоритмов управления являются сложной актуальной задачей.

Управляемая динамическая система, входом и выходом которой являются потоки заявок, называется управляемой системой массового обслуживания или просто системой массового обслуживания. СМО предназначена для обслуживания потока заявок (требований), поступающих в случайные моменты времени на её вход. Обслуживание заявки продолжается случайное время $T_{об}$, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что на входе СМО может скапливаться большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты появления событий (прихода новой заявки, окончания обслуживания, или момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь, заявки с ограниченным временем ожидания).

Предмет теории систем массового обслуживания – построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими показателями эффективности СМО, которые можно разбить на две группы: показатели, непосредственно связанные со стационарным распределением вероятностей $\{P_k\}$ числа заявок в системе и временные показатели [1].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

Основными задачами исследования являются:

- исследование простейших моделей конфликтных систем массового обслуживания;
- исследование математических моделей с фиксированным ритмом изменения обслуживания;
- оптимизация времени нахождения в очереди пересекающих потоков событий.

В качестве СМО рассматривается простейшая модель перекрестка с двумя пересекающимися однородными потоками машин.

Основная часть. *Исследование простейших моделей конфликтных систем массового обслуживания. Математические модели с фиксированным ритмом изменения обслуживания.*

Рассмотрим простейшую модель перекрестка с двумя пересекающимися однородными потоками машин с заданными плотностями потоков λ_1 и λ_2 и светофором, изменяющим свои цвета периодически с заданным фиксированным ритмом $\tau_1, \tau_{12}, \tau_2, \tau_{21}$, где τ_1 – время, в течение которого разрешено движение первого потока и запрещено движение второго, τ_2 – время разрешения движения второго потока и запрещения движения первого, τ_{12} и τ_{21} – времена так называемого желтого света, когда запрещены движения обоих потоков при разрешении закончить движение через перекресток автомашинам, уже находящимся на нем. В отношении пропускных способностей перекрестка принимается, что через перекресток может переехать за соответствующие фазы разрешения переезда $\omega_1\tau_1$ автомашин первого потока и $\omega_2\tau_2$ – второго. Коэффициенты ω_1 и ω_2 характеризуют предельные пропускные способности перекрестка в первом и втором направлениях [2].

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} (\lambda_1-\omega_1)\dfrac{x_1+|x_1|}{2}\,\textit{для}\ t = n\tau + t_1, \textit{где}\ n\ \text{целое} \\ \qquad \text{и}\ t_1 \in [0,\tau_1], \\ \lambda_1 \qquad \text{для остальных}\ t, \end{cases} \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} (\lambda_2-\omega_2)\dfrac{x_1+|x_1|}{2}\,\textit{для}\ t = n\tau + t_2, \textit{где}\ n\ \text{целое} \\ \qquad \text{и}\ t_2 \in [\tau_1+\tau_{12}, \tau_1+\tau_{12}+\tau_2], \\ \lambda_2 \qquad \text{для остальных}\ t, \end{cases}$$

В соответствии со сказанным светофор, регулирующий уличное движение, может находиться в четырех состояниях A_1, A_{12}, A_2 и A_{21}, которые периодически сменяются в некотором фиксированном ритме. За описание состояния перекрестка в момент времени t примем числа x_1 и x_2 автомашин, скопившихся перед перекрестком в этот момент времени. Для этих величин, которые примем непрерывными, имеют место дифференциальные уравнения.

В этих формулах τ – период работы светофора, равный $\tau = \tau_1 + \tau_{12} + \tau_2 + \tau_{21}$ Согласно этим уравнениям (1) изменение чисел машин x_1 и x_2 на плоскости x_1,x_2 изобразится некоторой ломаной (рис. 1).

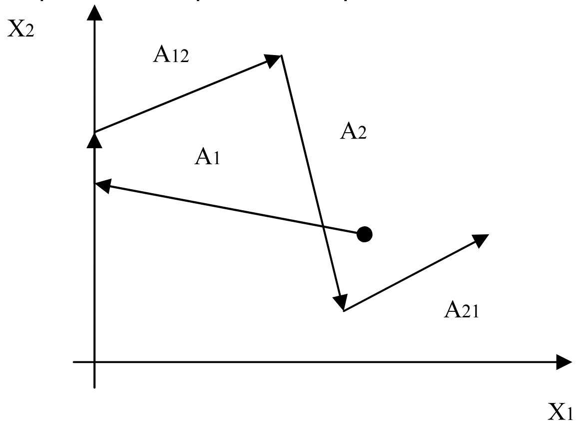

Рисунок 1 – Изображение ломаной (изменение чисел машин на плоскости)

Каждый отрезок этой ломаной, без учета возможных изломов на осях x_1,x_2, соответствует одному из состояний светофора A_1, A_{12}, A_2 или A_{21}. Из (1) непосредственно следует, что в зависимости от этого состояния А координаты x_1, x_2 и $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ концов каждого из отрезков этой ломаной связаны соотношениями вида [3]

$$\bar{x}_1 = \begin{cases} f(x_1 - (\omega_1 - \lambda_1)\tau_1) & \text{при } A = A_1 \\ x_1 + \lambda_1\tau_{12} & \text{при } A = A_{12} \\ x_1 + \lambda_1\tau_2 & \text{при } A = A_2 \\ x_1 + \lambda_1\tau_{21} & \text{при } A = A_{21} \end{cases}, \tag{2}$$

$$\bar{x}_1 = \begin{cases} x_2 + \lambda_2\tau_1 & \text{при } A = A_1 \\ x_2 + \lambda_2\tau_{12} & \text{при } A = A_{12} \\ f(x_2 - (\omega_2 - \lambda_2)\tau_2) & \text{при } A = A_2 \\ x_2 + \lambda_2\tau_{21} & \text{при } A = A_{21} \end{cases}$$

где $f(\sigma)$ обозначает функцию, равную σ при $\sigma \ge 0$ и равную нулю при $\sigma \le 0$.

Формулы (2) определяют точечные отображения $T_1(A)$ I $T_2(A)$ полупрямых $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$ в себя. Произведения отображений определяют изменения переменных x_1, x_2 за период τ работы светофора.

$$T_i = T_i(A_{21})T_i(A_2)T_i(A_{12})T_i(A_1) \quad (i=1,2). \tag{3}$$

Точечные отображения (3) имеют вид, представленный на рис. 2. Согласно этому рис. 2 последовательные преобразования точки x_i либо неограниченно возрастают, если $\lambda_i \tau > \omega_i \tau_i$ (рис. 2, а), либо асимптотически стремятся к некоторому конечному значению x^*_i, если $\lambda_i \tau < \omega_i \tau_i$ (рис. 2, б). Это означает, что при невыполнении условия

$$\lambda_i \tau < \omega_i \tau_i \tag{4}$$

в соответствующем направлении происходит неограниченное нарастание очереди, т. е. условия (4) являются необходимыми для успешной работы светофора. Отсюда следует, что светофор при соответствующем выборе времен $\tau_1, \tau_{12}, \tau_2, \tau_{21}$ может пропустить пребывающие к нему потоки автомашин лишь при условии, что

$$\frac{\lambda_1}{\omega_1} + \frac{\lambda_2}{\omega_2} < 1. \tag{5}$$

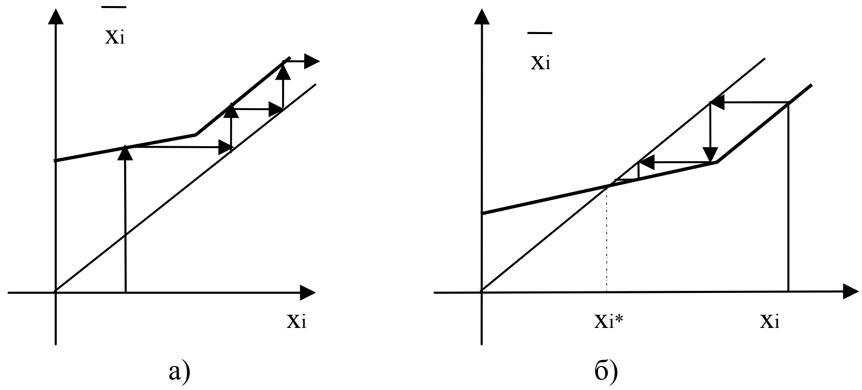

Рисунок 2 – Точечные отображения

При выполнении условия (5) можно указать такие τ_1 и τ_2 при заданных временах τ_{12} и τ_{21}, чтобы выполнялись условия (4), и при этом, как нетрудно сосчитать, общее время ожидания переезда через перекресток всеми машинами i-го потока за период τ равно

$$\frac{1}{2}(\tau - \tau_i)^2 \lambda_i (1 + \lambda_i (\omega_i - \lambda_i)^{-1}). \tag{6}$$

Таким образом, принятая математическая модель приводит к тому, что времена τ_1 и τ_2 при заданных временах τ_{12} и τ_{21} минимальные значения которых определяются условиями безопасности движения на перекрестке, должны удовлетворять условиям (4), для возможности выполнения которых необходимо и достаточно выполнения неравенства (5). При выполнении неравенства (5) допустимым значениям τ_1 и τ_2 отвечает область D, изображенная на рис. 3. Требования минимальности среднего времени ожидания сводится согласно (6) к отысканию в области D точки (τ_1 и τ_2), в которой функция вида

$$\frac{1}{\tau}\left\{B_1(\tau - \tau_1)^2 + B_2(\tau - \tau_2)^2 \right\} \tag{7}$$

где $B_i = \frac{\lambda_i}{2}(1 + \lambda_i(\omega_i - \lambda_i)^{-1})$, имеет наименьшее значение.

Описанная выше простейшая математическая модель с двумя конфликтными транспортными потоками легко обобщается на произвольное число потоков.

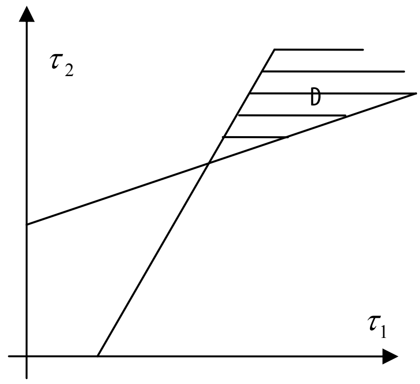

Рисунок 3 – Область D (оптимальное решение)

Пример. Для определения минимальность среднего времени ожидания машин перед перекрестком минимизируем функцию [4]

$$f(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau}\left\{B_1(\tau - \tau_1)^2 + B_2(\tau - \tau_2)^2\right\}, \tag{8}$$

где $B_i = \frac{\lambda_i}{2}\left\{1 + \lambda_i(\omega_i - \lambda_i)^{-1}\right\};$ (9)

λ_i – интенсивность i-ого потока;

ω_i – пропускная способность i-ого потока;

$i = 1,2,...$

$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_{12} + \tau_{21} = \tau_1 + \tau_2 + k$;

τ – период работы светофора;

τ_1 – время, в течении которого разрешено движение первого потока и запрещено движение второго;

τ_2 – время, в течении которого разрешено движение второго потока и запрещено движение первого;

$k = \tau_{21} + \tau_{12}$ – время желтого цвета. Подставим в функцию (8) значение τ .

$$f(\tau_1, \tau_2) = \\ = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2 + k}\left\{B_1(\tau_2 + k)^2 + B_2(\tau_1 + k)^2\right\} = \\ = \frac{B_1(\tau_2 + k)^2}{\tau_1 + \tau_2 + k} + \frac{B_2(\tau_1 + k)^2}{\tau_1 + \tau_2 + k} \quad (10)$$

Условие минимума

$$\frac{\partial f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau} = 0;$$

$$\frac{\partial f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^2} & \frac{\partial^2 f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \\ \frac{\partial^2 f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} & \frac{\partial^2 f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2^2} \end{vmatrix} \rangle 0 \quad (11)$$

Светофор при соответствующем выборе времен может пропустить пребывающие к нему потоки автомашин при условии, что $\frac{\lambda_1}{\omega_1} + \frac{\lambda_2}{\omega_2} \langle 1;$

λ_1 – интенсивность 1-ого потока;

ω_1 – пропускная способность 1-ого потока;

λ_2 – интенсивность 2-ого потока;

ω_2 – пропускная способность 2-ого потока.

$\lambda_i \tau < \omega_i \tau_i$ Невыполнение этого условия в соответствующем направлении происходит неограниченное нарастание очереди.

Для определения условия оптимума находим производные функций

Зададим значение $\lambda_1 = 11$; $\lambda_2 = 15$; $\omega_1 = 23$; $\omega_2 = 30$; $\tau = 110c$; $k = 6c$.

Условие оптимума:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{B_1}{B_2}\tau_2 + (B_1 - B_2)k \\ \tau_2 &= \frac{B_2}{B_1}\tau_1 + (B_2 - B_1)k \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Из 1-ого уравнения при $B_1 > B_2$ ограничений на неотрицательность τ_1 нет, τ_2>0. При $B_2 > B_1$,возможно при $\frac{B_1}{B_2}\tau_2 > (B_1 - B_2)k$; $\tau_2 = \tau - (\tau_1 + k)$.

Из 2-ого уравнения при $B_2 > B_1$ ограничений на неотрицательность τ_2 нет. При $B_1 > B_2$ возможно при $\frac{B_2}{B_1}\tau_1 > (B_2 - B_1)k$; $\tau_1 = \tau - (\tau_2 + k)$.

Найдем $B_i = \frac{\lambda_i}{2}\left\{1 + \lambda_i(\omega_i - \lambda_i)^{-1}\right\};$ $B_1 = 10{,}54$; $B_2 = 15$;

Следует, что $(B_1 - B_2)k = -A$; $(B_2 - B_1)k = A$; $\tau_1 = \frac{B_1}{B_2}\tau_2 - A$; $\tau - k - \tau_2 = \frac{B_1}{B_2}\tau_2 - A$;

$$\tau_2 = \frac{\tau - k + A}{\frac{B_1}{B_2} + 1} = 77c.;$$

$$\tau_1 = \tau - (\tau_2 + k) = 27c.$$

Подставив значения, все условия оптимума выполняются. Следует, что найдено оптимальное время нахождения в очереди машин перед перекрестком.

$$\frac{\partial f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} = \frac{2B_2(\tau_1 + k)(\tau_1 + \tau_2 + k) - \left[B_1(\tau_2 + k)^2 + B_2(\tau_1 + k)^2\right]}{(\tau_1 + \tau_2 + k)^2};$$

$$\frac{\partial f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} = \frac{2B_1(\tau_2 + k)(\tau_1 + \tau_2 + k) - \left[B_1(\tau_2 + k)^2 + B_2(\tau_1 + k)^2\right]}{(\tau_1 + \tau_2 + k)^2}.$$

Следует, что $\tau_1 + \tau_2 + c \neq 0$. Определяем вторую производную функций

$$\frac{\partial^2 f(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_1{}^2}=\left(\frac{2\mathrm{B}_2(\tau_1+k)(\tau_1+\tau_2+k)-\left[B_1(\tau_2+k)^2+B_2(\tau_1+k)^2\right]}{(\tau_1+\tau_2+k)^2}\right)'=$$
$$=\frac{2\mathrm{B}_2(\tau_1+\tau_2+k)^2-4\mathrm{B}_2(\tau_1+k)(\tau_1+\tau_2+k)+2B_1(\tau_2+k)^2+2\mathrm{B}_2(\tau_1+k)^2}{(\tau_1+\tau_2+k)^3};$$

$$\frac{\partial^2 f(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_2{}^2}=\left(\frac{2\mathrm{B}_1(\tau_2+k)(\tau_1+\tau_2+k)-\left[B_1(\tau_2+k)^2+B_2(\tau_1+k)^2\right]}{(\tau_1+\tau_2+k)^2}\right)'=$$
$$=\frac{2\mathrm{B}_1(\tau_1+\tau_2+k)^2-4\mathrm{B}_1(\tau_2+k)(\tau_1+\tau_2+k)+2B_1(\tau_2+k)^2+2\mathrm{B}_2(\tau_1+k)^2}{(\tau_1+\tau_2+k)^3};$$

$$\frac{\partial^2 f(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}=\frac{(\tau_1+\tau_2+k)^2\{2\mathrm{B}_2(\tau_1+k)+2\mathrm{B}_1(\tau_2+k)\}}{(\tau_1+\tau_2+k)^4}-$$
$$-\frac{2(\tau_1+\tau_2+k)\left[2\mathrm{B}_2(\tau_1+k)(\tau_1+\tau_2+k)-\left[B_1(\tau_2+k)^2+B_2(\tau_1+k)^2\right]\right]}{(\tau_1+\tau_2+k)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f(\tau_1,\tau_2)}{\partial \tau_2 \partial \tau_1}=\frac{(\tau_1+\tau_2+k)^2\{2\mathrm{B}_1(\tau_2+k)+2\mathrm{B}_1(\tau_1+k)\}}{(\tau_1+\tau_2+k)^4}-$$
$$\frac{2(\tau_1+\tau_2+k)\left[2\mathrm{B}_1(\tau_2+k)(\tau_1+\tau_2+k)-\left[B_1(\tau_2+k)^2+B_2(\tau_1+k)^2\right]\right]}{(\tau_1+\tau_2+k)^4}$$

ВЫВОДЫ

В работе рассмотрена простейшая математическая модель с двумя конфликтными транспортными потоками, которая легко обобщается на произвольное число потоков. Определена минимальность среднего времени ожидания машин перед перекрестком.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Y.I. Neymark Dinamicheskie sistemy i uprawlyayshie process. – M.: Nauka, 1978.
2. Matveew V.F. Sistemy massovogo obslygyvaniya. – M.: MGU,1991.
3. Muchin V.I. Sb. Dinamika system, 1980.

Рецензент: *д.т.н., проф. Соколова Н.А., Херсонский национальный технический университет, Херсон.*