

МНОГОФАКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЗАТРАТ ПРИ КООРДИНАЦИОННОМ УПРАВЛЕНИИ ПРЕДПРИЯТИЕМ

УДК 658.5:681.5.015

КИРИЙЧУК Дмитрий Леонидович

старший преподаватель кафедры Информационных технологий
Херсонского национального технического университета.

Научные интересы: современные информационные технологии координации в больших и сложных системах.

e-mail: kyryuchuk.dmytro@kntu.net.ua

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшей функцией управления предприятием является согласование целей, функций, систем, элементов, т.е. координация [1, 2], под которой понимают правила взаимодействия подсистем, которые направлены на достижение глобальной цели, стоящей перед системой в целом и локальных целей отдельных подсистем [3].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $Z(N)$ – случайные затраты производства на изготовление N единиц товара (сырья, изделий, услуг и т.д.) включающие в себя $Z_0(N)$ – постоянную составляющую (техническую стоимость системы производства) и $Z_1(N)$ – переменную составляющую (затраты на организацию системы производства).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Найдем оптимальные затраты $Z_{opt}(N)$, которые обеспечены таким управлением, при котором отклонения от «шаблонных» оптимальных альтернатив на множестве I будет множественным. В такой постановке реализуется оптимальное технологическое управление производственной системой [3].

Допустим, что удельные веса составляющих $Z_0(N)$ и $Z_1(N)$ равны соответственно q и $1-q$. Величины q и $1-q$ удобно трактовать как вероятно-

сти появления соответствующих затрат в общих затратах:

$$Z(N) = qZ_0(N) + (1-q)Z_1(N) \quad (1)$$

Рассматривая $Z_0(N)$ и $Z_1(N)$ как реализации случайной величины затрат $Z(N)$, которые появляются с вероятностями q и $1-q$, нетрудно определить начальные $m_k, k=1,2,\dots$, и центральные моменты $\mu_k, k=2,3,\dots$ суммарных затрат $Z(N)$:

$$m_k [Z(N)] = Z_0^k(N)q + Z_1^k(N)(1-q), \quad k=1,2,\dots, \quad (2)$$

$$\mu_k [Z(N)] = \{Z_0(N) - m_1 [Z(N)]\}^k q + \{Z_1(N) - m_1 [Z(N)]\}^k (1-q). \quad (3)$$

По этим моментам, используя ортогональное разложение функции распределения в ряд Грамма-Шарлье, нетрудно синтезировать функцию распределения $F[Z(N)]$. Использование этого распределения позволяет решать ряд задач оптимального управления производством, определять условия существования и единственности оптимальных решений.

Выберем в роли критерия оптимальности первый начальный момент суммарных затрат – средние суммарные затраты

$$m_1 [Z(N)] = Z_0(N)q + Z_1(N)(1-q) \quad (4)$$

и определим необходимые условия существования и единственности оптимального решения. Дифференцируя функцию (4) по N и приравнявая результат нулю, получим уравнение оптимизации в виде:

$$+\frac{\partial Z_1(N)}{\partial N} = \frac{q}{1-q} \quad (5)$$

Для того чтобы N_{opt} , полученное из решения уравнения (5), доставляло минимум функции (4), необходимо выполнение условия:

$$\frac{\partial^2 Z_0(N)}{\partial N^2} q > -\frac{\partial^2 Z_1(N)}{\partial N^2} (1-q) \quad (6)$$

Из анализа условия (5) можно сделать вывод о том, что экстремум достигается в точке, где достигается равенство производных $Z'_0(N)$ и $Z'_1(N)$, взятых с весами q и $1-q$. При $q=1-q=\frac{1}{2}$ достигается равенство производных по абсолютному значению. Построим математическую модель многофакторной оптимизации. Для этого выполним простейшую однопараметрическую аппроксимацию составляющих затрат в следующем виде:

$$Z_0(N) = \frac{Z_0}{N}, \quad Z_1(N) = Z_1 N \quad (7)$$

где $Z_0(N)$ – постоянные затраты, а $Z_1(N)$ – переменные затраты.

Уравнение оптимизации (5) принимает вид:

$$\frac{Z_1}{Z_0/N^2} = \frac{q}{1-q} \quad (8)$$

Условие существования минимума средних затрат выполняется в виде:

$$\frac{\partial^2 m_1[Z(N)]}{\partial N^2} = 2q \frac{Z_0}{N^3} > 0 \quad (9)$$

$$x_{opt} = \sqrt{\frac{K_0}{K_1}} = \sqrt{\frac{q}{1-q} \frac{Z_0}{N_{opt}} \frac{1}{Z_1 N_{opt}}} = \frac{1}{N_{opt}} \sqrt{\frac{q}{1-q} \frac{Z_0}{Z_1}} = \frac{N_{opt}}{N_{opt}} = 1 \quad (17)$$

и определим координаты экстремума через эти коэффициенты, получим:

$$m_1[Z_{min}(x_{opt})] = 2\sqrt{K_0 K_1} = 2\sqrt{q \frac{Z_0}{N_{opt}} (1-q) Z_1 N_{opt}} = 2\sqrt{q(1-q) Z_0 Z_1} \quad (18)$$

Выполним нормировку средних затрат по формуле (18), получим:

Из решения (8) получим оптимальное значение объема производства

$$N_{opt} = \sqrt{\frac{q}{1-q} \frac{Z_0}{Z_1}} \quad (10)$$

которое обеспечивает минимум средних затрат

$$m_1[Z_{min}(N_{opt})] = 2\sqrt{q(1-q) Z_0 Z_1} \quad (11)$$

Можно заметить, что минимальное значение (11) достигает максимума при $q=1-q=\frac{1}{2}$, следовательно, максимальное значение

$$\max_q \min_N m_1[Z(N)] = \sqrt{Z_0 Z_1} \quad (12)$$

Таким образом, величина (12) является пессимистической оценкой – оценкой сверху – минимальных средних затрат.

Рассмотрим модель в безразмерных величинах. Выполним нормировку объема производства и средних затрат для определения общих закономерностей в поведении средних затрат. Введем безразмерный нормированный объем: $x = \frac{N}{N_{opt}}$, (13). Тогда $N = x N_{opt}$. (14)

Подставим это значение в выражение (4), получим с учетом (7)

$$m_1[Z(x)] = q \frac{Z_0}{x N_{opt}} + (1-q) Z_1 N_{opt} x \quad (15)$$

Обозначим безразмерные параметры

$$K_0 = q \frac{Z_0}{N_{opt}}, \quad K_1 = (1-q) Z_1 N_{opt} \quad (16)$$

$$\frac{m_1[Z(x)]}{m_1[Z_{min}(x_{opt})]} = \frac{K_0}{2\sqrt{K_0 K_1}} \frac{1}{x} + \frac{K_1}{2\sqrt{K_0 K_1}} x = \frac{1}{2} \left(\frac{x_{opt}}{x} + \frac{x}{x_{opt}} \right) = \frac{x_{opt}^2 + x^2}{2x_{opt} x} = \frac{1+x^2}{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + x \right) \quad (19)$$

Учтем максимальное значение (12) средних затрат, тогда нормированное значение средних затрат -

$$y(x, q) = \frac{I + x^2}{2x} 2\sqrt{q(I - q)} = \frac{I + x^2}{x} \sqrt{q(I - q)} \quad (20)$$

Функция (20) имеет минимум по x при $x = x_{opt} = 1$ и максимум по q при $q = \frac{1}{2}$. На рис. 1 показан график зависимости $y(x, q)$, точка A является точкой максимума. Условно показана траектория движения этой точки при изменении параметра q .

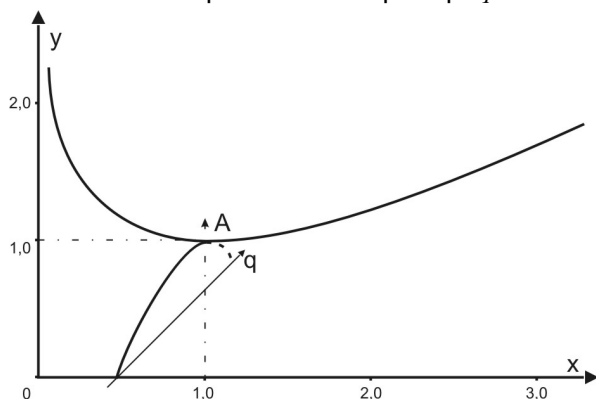


Рисунок 1 – График зависимости $y(x, q)$

Предположим, что $Z_0 = 10^6$ ден.ед./ед.изд., $Z_1 = 10^2$ ден.ед./ед.изд., $q = 1 - q = \frac{1}{2}$. Определим оптимальное значение объема производства и максимальное значение средних затрат.

Используя формулу (10), получим:

$$N_{opt} = \sqrt{\frac{q}{1-q} \frac{Z_0}{Z_1}} = 10^2 \text{ ед.изд.}$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Samochkin V.N. Gibkoe razvitie predpriyatiya: Effektivnost i budzhethirovanie: Monografiya. – М.: Delo, 2000.
2. Zang V.B. Sinergeticheskaya ekonomika. Vremya i peremeny v nelinejnoj ekonomicheskoy teorii: Monografiya. – М.: Mir, 1999.
3. Klebanova T.S., Moldovskaya E.V., Hongven Chang. Modeli i metody koordinatsii v krupnomashtabnykh ekonomicheskikh systemah: Monografiya. – Harkov: Biznes-Inform, 2002.

По формуле (12) получим:

$$\max_q \min_N m_1[Z(N)] = \sqrt{Z_0 Z_1} = 10^4 \text{ ден.ед.}$$

Далее, предположим, что $q = \frac{1}{4}$ и для этих исходных данных определим, как повлияет уменьшение q на оптимальное решение.

$$N_{opt} = \sqrt{\frac{q}{1-q} \frac{Z_0}{Z_1}} = \frac{10^2}{\sqrt{3}} \approx 57.7 \text{ ед.изд.}$$

$$\min_N m_1[Z(N, 1/4)] = 2\sqrt{q(1-q)Z_0 Z_1} = \sqrt{3}/2 \cdot 10^4 \approx 8660 \text{ ден.ед.}$$

Таким образом, уменьшение q в 2 раза приводит к уменьшению в $1/\sqrt{3}$ оптимального объема производства и к уменьшению в $\sqrt{3}/2$ минимальных средних затрат.

ВЫВОДЫ

Такое поведение оптимального решения имеет очевидный логический смысл: уменьшение q приводит к уменьшению постоянной составляющей затрат и одновременно к относительному увеличению переменной составляющей затрат, поэтому точка экстремума смещается в сторону меньших оптимальных значений объема и меньших минимальных значений средних затрат.

Рецензент: д.т.н., проф. Ходаков В.Е.,
Херсонский национальный технический университет, Херсон.