



# АЛГОРИТМ СИНТЕЗА АДАПТИВНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ ПО ПРИНЦИПУ МИНИМУМА ОБОБЩЕННОЙ РАБОТЫ

УДК 681.515: 519.7

## КОРНИЕНКО Валерий Иванович

д.т.н., профессор кафедры «Безопасности информации и телекоммуникаций» ГВУЗ «Национальный горный университет».

**Научные интересы:** информационные технологии в системах автоматического управления, автоматизированные системы управления в горной промышленности.

**e-mail:** vikor7@ukr.net

## МАЦЮК Сергей Михайлович

аспирант кафедры «Программного обеспечения компьютерных систем» ГВУЗ «Национальный горный университет».

**Научные интересы:** информационные технологии в системах автоматического управления, автоматизированные системы управления в горной промышленности.

**e-mail:** matsuk\_sergei@mail.ru

## УДОВИК Ирина Михайловна

к.т.н., доцент кафедры «Программного обеспечения компьютерных систем» ГВУЗ «Национальный горный университет».

**Научные интересы:** информационные технологии в системах автоматического управления, методы обработки изображений.

**e-mail:** afs\_matsuk@mail.ru

## ВВЕДЕНИЕ

Сложные объекты управления (ОУ) характеризуются нестационарными параметрами, нелинейными зависимостями и стохастическими переменными, а также имеют значительные транспортные запаздывания, что обуславливает их существенную неопределенность. Это вызывает необходимость использования в информационных системах управления (ИСУ) этими процессами алгоритмов адаптации моделей и законов управления к реальным условиям функционирования.

К сложным ОУ относятся, например, движущиеся объекты, телекоммуникационные системы и сети, а также технологические процессы рудоподготовки, металлургии и др.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для сложных ОУ актуальным является обоснование и разработка соответствующих методов и алгоритмов

управления, которые учитывают стохастичность его переменных и используют адаптацию прогнозирующих моделей для компенсации запаздываний, нестационарности параметров и возмущений в реальном масштабе времени. В целом это позволит строить системы управления сложными ОУ повышенного качества.

Реализация адаптивных регуляторов такими ОУ определяется принципом внутренней модели, который позволяет за счет использования математических моделей не только на стадии проектирования, но и в процессе функционирования систем, реализовать управление сложными технологическими процессами [1].

Одним из наиболее эффективных путей разработки регулятора, наилучшего в некотором смысле, является использование теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) Летова-Калмана [2].

В АКОР используются аналитические процедуры синтеза закона управления ОУ с целью обеспечения качества ИСУ в динамических режимах в соответствии с минимумом некоторого избранного оптимизируемого функционала (критерия качества). Получаемое при этом уравнение оптимального регулятора представляет собой совокупность обратных связей по соответствующим координатам ОУ.

Для обеспечения устойчивости получаемых решений при разработке регуляторов используется концепция Ляпунова возмущенного движения (используются положительно определенные функции Ляпунова). Получаемое уравнение регулятора (закон управления) зависит как от вида ОУ, так и принимаемого критерия оптимальности.

Функционал (целевая функция, критерий) управления при оптимальном управлении выражает не только цель, но и ограничения, накладываемые на реализацию управления.

Метод АКОР Летова-Калмана широко используется для разработки ИСУ линейными ОУ. Однако, разработка ИСУ нелинейными ОУ в отличие от линейных значительно сложнее.

Для нелинейных моделей ОУ не выполняется принцип суперпозиции, что значительно затрудняет анализ и синтез нелинейных ИСУ. Так для нелинейных ОУ структура законов оптимального управления неизвестна и потому их поиск с помощью теории АКОР является структурно-параметрическим методом синтеза нелинейных систем.

Синтез оптимального управления требует решения нелинейного уравнения в частных производных Гамильтона-Якоби. Однако, для нелинейных ОУ решение этого уравнения вызывает значительные трудности, связанные с очень высокой размерностью при численном решении таких уравнений. Аналитическое же построение точных решений существует лишь для линейных ОУ и квадратичных функционалов.

То есть, непосредственное применение метода АКОР Летова-Калмана для синтеза оптимальных регуляторов нелинейными ОУ затруднено.

Академиком А.А. Красовским была развита теория АКОР Летова-Калмана и предложен принцип минимума обобщенной работы, согласно которому оптимизация управления осуществляется по функционалу обобщен-

ной работы (ФОР) [1-3]. Этот функционал полуопределен за счет введения дополнительного члена, который зависит собственно от оптимального управления.

Метод АКОР по ФОР имеет определенные преимущества, заключающиеся в том, что его функциональное уравнение, в отличие от функционального уравнения по АКОР Летова-Калмана, представляет собой линейное дифференциальное уравнение в частных производных, которое имеет принципиально более простые решения. Кроме того, метод оптимизации нелинейных динамических систем по ФОР обеспечивает реализацию объединенного синтеза законов управления, то есть формализованного определения управлений в процессе движения ОУ (с текущей идентификацией математической модели ОУ). Наиболее эффективен этот метод при использовании прогнозирующей модели ОУ [3].

Системы управления, реализующие данный метод, получили название универсальных – в них используются адаптивные оптимальные алгоритмы, основанные на автоматической идентификации ОУ (идентификации посредством адаптивной прогнозирующей модели) [1].

Таким образом, нерешенной задачей является создания оптимальных по принципу минимума обобщенной работы адаптивных ИСУ сложными нелинейными ОУ.

**Цель статьи** – разработка алгоритма синтеза адаптивного оптимального управления сложными нелинейными ОУ с запаздыванием по принципу минимума обобщенной работы.

### **СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ФОР В ПРОЦЕССЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИСУ**

По способу реализации процесса оптимизации управления различают решение задания при проектировании ИСУ, когда на период функционирования системы возлагается лишь реализация полученного закона, а также объединенный синтез, когда все оптимизационные задания формируются и решаются в процессе функционирования ИСУ.

Использование законов оптимального управления, полученных на этапе проектирования ИСУ, оправданно, когда сложные ОУ имеют постоянные режимы работы и вариации возмущений несущественны.

В реальных условиях режимы функционирования и вариации возмущений сложных ОУ, как правило, суще-

ственно изменяются. В этом случае эффективными являются универсальные алгоритмы синтеза оптимального управления, основанные на текущей идентификации ОУ (обработке текущей информации в реальном масштабе времени) по прогнозирующим моделям [3] и контроле возмущений.

Рассмотрим решение задачи оптимального управления в процессе функционирования непрерывным ОУ с обобщенной моделью вида [4]:

$$x[k+1] = F\{x[k], u[k], w[k], \zeta[k], a[k], \kappa\}, \quad (1)$$

$$\kappa = \bar{\kappa}_j, \bar{\kappa}_{j+1} - 1, \dots, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $F$  – обобщенная функция (алгоритм) преобразования;  $x[k], u[k], w[k], \zeta[k], a[k]$  – соответственно, координаты состояния процесса, его управления, возмущения, шума и параметров к текущему времени  $\kappa$  с соответствующими глубинами памяти.

Для реализации оптимального управления необходимо соответствующее информационное обеспечение – априорная (адекватные прогнозирующие модели) и апостериорная  $z[k]$  (текущие измерения и результаты обработки) информации:

$$z[k] = \{x[k], u[k], w[k]\} \quad (2)$$

Для преобразования обобщенной модели (1) к виду с линейно входящим управлением выполним расширение пространства управляющих воздействий [1]. Для этого в качестве управления будем использовать не координату, а ее скорость (изменение значения управляющей координаты на текущий такт):

$$u^*[k] = u[k] - u[k-1] \quad (3)$$

Тогда модель (1) с учетом (3) приобретает расширенный вид с линейно входящим управлением  $u^*[k]$ :

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ u[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ u[k-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u^*[k] \quad (4)$$

или более компактно

$$\bar{x}[k+1] = \bar{A} + \bar{B} \cdot u^*[k] \quad (5)$$

где  $\bar{x}[k+1] = \{x[k+1], u[k]\}$ ;  $\bar{A} = \{F, u[k-1]\}$ ;  $\bar{B} = \{0, 1\}$ .

Учитывая, что ОУ является стохастическим, то рассмотрим синтез оптимального управления по стохастическому ФОР с аддитивными функциями затрат на управление и дискретным временем [1]:

$$J_1 = E\{V_3(\bar{x}[\kappa_{j+1}]) + \sum_{\kappa=\kappa_j}^{\kappa_{j+1}-1} Q_3(\bar{x}[\kappa], x^{zad}[\kappa], \kappa) + \sum_{\kappa=\kappa_j}^{\kappa_{j+1}-1} U_3(u^*[\kappa], \kappa) + \sum_{\kappa=\kappa_j}^{\kappa_{j+1}-1} U_3^*(u_{opt}^*[\kappa], \kappa)\} \quad (6)$$

где  $V_3$  – терминальная (определенная во времени) функция конечного состояния этапа управления (целевая функция);  $Q_3, U_3$  – положительно определенные функции Ляпунова (функции затрат на качество управления и само управление);  $\kappa_j, \kappa_{j+1}$  – начальные такты последовательных интервалов (этапов) управления (оптимизации);  $K$  – заданный положительный коэффициент;  $U_3^*$  – положительно определенная функция Ляпунова, которая принимает минимальное значение при  $u = u_{opt}$ ;  $u_{opt}$  – искомое оптимальное управление, которое доставляет минимум функционала (наличие четвертого слагаемого в (6) отличает ФОР от классического функционала Летова-Калмана);  $E$  – математическое ожидание;  $x^{zad}$  – заданное значение состояния процесса.

В соответствии с принципом разделения, оптимальное в смысле ФОР (6) управление стохастическим процессом (1) в условиях некоррелированности целевой функции и ошибок измерения ( $\langle V_3 \cdot \zeta[k] \rangle \approx 0$ ) может быть приблизительно получено [1, 3, 5, 6], как оптимальное управление детерминированным процессом с точным измерением вектора состояния  $z[k]$  путем замены его действительного значения на оценку по его условному математическому ожиданию  $\hat{z}[k] = E_y\{z[k]\}$ . Полученные таким путем приближенные решения задачи синтеза закона управления стохастическим процессом тем точнее, чем выше точность оценивания, то есть чем меньше ошибка  $\|z[k] - \hat{z}[k]\|$ .

Дискретное уравнение Беллмана с учетом (5) записывается в виде

$$V_i(\bar{x}[i]) = E \left\{ Q_3(\bar{x}[i], X^{zad}[i]) + V_{i+1}(\vec{A} + \vec{B} \cdot u_{opt}^*[i]) - \frac{\partial V_{i+1}}{\partial \bar{X}[i+1]} \cdot \vec{B} \cdot u_{opt}^*[i] \right\} \quad (7)$$

где  $i = \kappa_{j+1} - 1, \kappa_{j+1} - 2, \dots, \kappa_j$ .

При предельном условии  $V_{\kappa_{j+1}}(\bar{X}[\kappa_{j+1}]) = V_3(\bar{X}[\kappa_{j+1}])$  решение рекуррентного уравнения (7) определяется в соответствии с равенством

$$\frac{\partial}{\partial u_{opt}^*} U_3(u_{opt}^*[i]) = - \frac{\partial V_{i+1}}{\partial \bar{X}[i+1]} \cdot \vec{B} \quad (8)$$

и при квадратичной функции затрат на управление с учетом (4) равно:

$$u_{opt}^*[i] = - \frac{\partial V_{i+1}}{\partial u[i+1]} \quad (9)$$

В целом, использование в ФОР (6) части, которая зависит от собственно оптимального управления (четвертое слагаемое), упрощает решение и приводит его к отысканию минимума функционала на скользящем цикле управления с привлечением в реальном масштабе времени информации о состоянии ОУ к новому циклу управления (2) и его будущего состояния по прогнозирующей модели ОУ (1). При этом используются естественные собственные движения ОУ (при  $u^* = 0$ ) на прогнозируемый цикл управления  $[\kappa_j, \kappa_{j+1} - 1]$ .

Таким образом, алгоритм синтеза оптимального управления по ФОР с прогнозирующей моделью в процессе функционирования ИСУ включает:

- 1) оценку текущего состояния ОУ в моменты начала очередного цикла управления  $(\kappa_j)$  согласно (2);
- 2) прогнозирование свободного движения ОУ по модели (1) на заданном интервале  $[\kappa_j, \kappa_{j+1} - 1]$  оптимизации управления;
- 3) вычисление градиента целевой функции  $V_{i+1}$  для текущего состояния ОУ;
- 4) формирование сигнала оптимального управления (9).

Синтез и реализация оптимального управления на новый цикл должны осуществляться с опережением (глубиной прогноза) на время, большее суммы времени чистого запаздывания в системе, а также времени

поиска и реализации оптимального управления. Тогда выходом модели ОУ (1) должна быть оценка прогноза состояния процесса  $x[\kappa + 1] \Rightarrow \bar{x}[\kappa + n]$  глубиной  $n$ .

### АЛГОРИТМ СИНТЕЗА АДАПТИВНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для обеспечения высокого качества управления нестационарными, стохастическими ОУ (информация о которых или о влияниях на которые недостаточно известно) используются адаптивные СУ. При этом свойство адаптации достигается с помощью формирования в явном или неявном виде математической модели ОУ.

Адаптивные ИСУ основаны на сочетании оценивания состояния (наблюдения) и параметров модели (идентификации) ОУ с синтезом управления на основе прогнозирующих моделей, которые воспроизводят в ускоренном времени неуправляемое (свободное) движение ОУ [1]. Использование прогнозирующих моделей обусловлено необходимостью компенсации запаздываний в ОУ и управляющей системе.

Структура адаптивной оптимальной (АО) ИСУ (рис. 1) определяется принципом разделения (теоремой стохастической аппроксимации) [6].

ОУ в условиях влияния возмущений  $w$  контролируется (наблюдается) с помощью датчиков с ошибками измерений  $\zeta$ . Сигналы наблюдения поступают в подсистему оценивания и идентификации, на выходе которой формируется оценка вектора состояния  $\hat{x}$  и оценка вектора параметров  $\hat{a}$  (параметрическая идентификация), а, в общем случае, и оценка функции  $\hat{F}$  (структурная идентификация) математической модели ОУ.

Подсистема оптимального управления на основе модели ОУ, текущей оценки его состояния и критерия оптимизации  $J$  (функционала) формирует ОУ.

АО ИСУ реализует адаптацию на основе текущего оценивания состояния и идентификации ОУ, а также формирование по их результатам оптимального управления в процессе функционирования ОУ. Согласно классификации – это объединенный синтез оптимального управления, который реализуется

универсальными ИСУ [3,5]. У них свойство универсальности обеспечивается адаптацией оптимальных алгоритмов, основанной на текущих

автоматических оценивании и идентификации ОУ, а также произвольным (в пределах заданной структуры) содержанием ФОР.

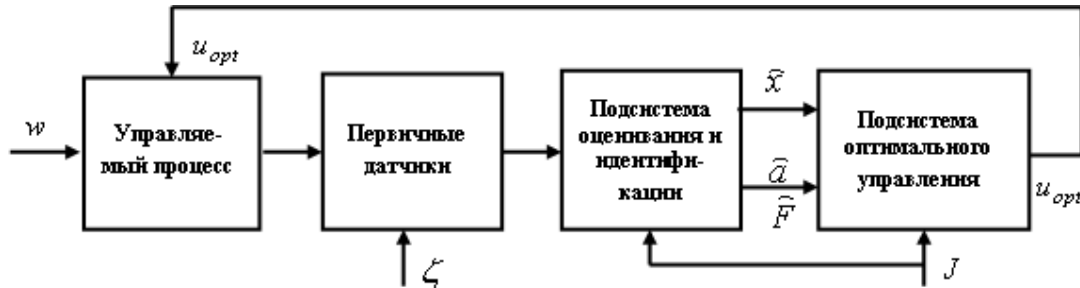


Рисунок 1 – Обобщенная структура АО ИСУ

Такие ИСУ близки по эффективности к системам дuality управления (которые состоят из фильтра Калмана-Бьюси и оптимального регулятора), выигрывая у них в вопросах реализуемости (нет необходимости искать решения уравнения Риккати) [1].

Рассмотрим синтез оптимального управления с прогнозирующей моделью ОУ по стохастическому ФОР с аддитивными функциями затрат на управление и дискретным временем:

$$J_2 = E \left\{ V_3(\hat{X}[k_{j+1}]) + \sum_{k=k_j+n}^{k_{j+1}-1} Q_3(\hat{X}[k], X[k], k) + K^{-1} \cdot \left\{ \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-n-1} U_3(u[k], k) + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-n-1} U_3^*(u_{opt}[k], k) \right\} \right\} \quad (10)$$

где  $n$  – глубина прогноза;  $x, \hat{x}$  – состояние ОУ и его оценка.

Следует отметить, что в функционале (10) качество процесса (второе слагаемое) оценивается на интервале  $[k_j + n, k_{j+1} - 1]$ , а затраты на управление (третье и четвертое слагаемые) – на интервале  $[k_j, k_{j+1} - n - 1]$ , что, на наш взгляд, отвечает физическому содержанию задачи синтеза оптимального управления по прогнозирующим моделям.

Как отмечалось выше, управление должно осуществляться с опережением (с глубиной прогноза  $n$ ) на время, большее суммы времени чистого запаздывания в системе, а также времени поиска и реализации оптимального управления. Тогда уравнение модели ОУ с учетом (1) примет вид:

$$\hat{x}[k+n] = F_{\hat{x}} \{ X[k], u[k], w[k], \zeta[k], a_{\hat{x}}[k], k \} \quad (11)$$

где  $F_{\hat{x}}$  – оценка обобщенной функции (алгоритма) преобразования;  $a_{\hat{x}}[k]$  – оценка параметров модели ОУ.

В подсистеме оценивания и идентификации выполняется определение характеристик состояния ОУ и его структурно-параметрическая идентификация. Первая процедура позволяет определить режимы функционирования ОУ и размерности его координат, по которым формируется вектор оценки состояния  $z[k]$  ОУ. А процедура структурно-параметрической идентификации позволяет определить структуру функции  $F_{\hat{x}}$  и значения параметров  $a_{\hat{x}}$ .

Задача синтеза адаптивного оптимального управления для ОУ с глубиной прогноза  $n$  по принципу минимума обобщенной работы решается следующим образом.

Предположим, что прогнозирующая модель ОУ (11) преобразована к виду с линейно входящим управлением (например, согласно (3)-(4)):

$$\hat{x}[k+n] = A(X[k], \zeta[k], a_A[k], k) + B(X[k], \zeta[k], a_B[k], k) \cdot u[k] \quad (12)$$

где в соответствии с (11)  $\{a_A, a_B\} \subset a_{\hat{x}}$ ,  $\{A, B\} \subset F_{\hat{x}}$ .

Тогда дискретное уравнение Беллмана записывается в виде

$$V_i(\hat{X}[i+n]) = E\{Q_3(\hat{X}[i+n], X[i+n]) + V_{i+1}\{A(X[i]) + B(X[i]) \cdot u_{opt}[i]\} - \frac{\partial V_{i+1}}{\partial \hat{X}[i+n+1]} \cdot B(X[i]) \cdot B(X[i]) \cdot u_{opt}[i] \quad (13)$$

где  $i = k_{j+1} - n - 1, k_{j+1} - n - 2, \dots, k_j$ .

При предельном условии  $V_{k_{j+1}}(\hat{X}[k_{j+1}]) = V_3(\hat{X}[k_{j+1}])$  решение рекуррентного уравнения (13) определяется в соответствии с равенством

$$K^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial u_{opt}} U_3(u_{opt}[i]) = - \frac{\partial V_{i+1}}{\partial \hat{X}[i+n+1]} \cdot B(x[i]) \quad (14)$$

и при квадратичных затратах на управление равно

$$u_{opt}[i] = -K \cdot \frac{\partial V_{i+1}}{\partial \hat{X}[i+n+1]} \cdot B(X[i]) \quad (15)$$

Таким образом, использование синтеза оптимального управления по ФОР (10) упрощает решение и приводит его к отысканию минимума функционала на скользящем интервале управления с привлечением в реальном масштабе времени информации о состоянии ОУ к новому интервалу управления и его будущего состояния по прогнозирующей модели ОУ (11). При этом используются естественные собственные движения ОУ (при  $u = 0$ ).

Алгоритмическая структура АО ИСУ приведена на рис. 2, а алгоритм синтеза адаптивного оптимального управления состоит из следующих процедур (рис. 3):

- 1) оценка текущего состояния ОУ в моменты начала очередного интервала управления ( $k_j$ ) согласно (2);
- 2) идентификация структуры  $F_{\hat{x}}$  и параметров  $a_{\hat{x}}$  модели ОУ (11);
- 3) прогнозирование свободного движения ОУ по модели (11) на заданном интервале  $[k_j + n, k_{j+1} - 1]$  оптимизации управления;
- 4) вычисление градиента целевой функции  $V_{i+1}(\hat{X}[i+n+1])$  для текущего состояния ОК и формирование сигнала оптимального управления согласно (14).

При этом, в соответствии с принципом разделения, в АО ИСУ на каждом цикле управления последовательно решаются оптимизационные задачи:

- 1) определение оптимальных (в смысле избранного функционала оценки и идентификации) параметров  $a_{\hat{x}}$  и структуры  $F_{\hat{x}}$  модели (11);
- 2) синтез оптимального управления (в смысле избранного функционала управления) по адаптированной в п.1 модели.



Рисунок 2 – Алгоритм АО ИСУ по ФОР с прогнозирующей моделью

Адаптация является разновидностью управления и заключается в целенаправленном изменении управляющих факторов системы для поддержки экстремума заданного функционала. В нашем случае к множеству

управляющих факторов относятся: при параметрической адаптации –  $\{a_{\bar{x}}, u_{opt}\}$ , а при структурно-параметрической адаптации –  $\{a_{\bar{x}}, F_{\bar{x}}, u_{opt}\}$ .

**Выводы.** Метод АКОР по ФОР имеет преимущества, заключающиеся в том, что его функциональное уравнение, в отличие от функционального уравнения по АКОР Летова-Калмана, представляет собой линейное дифференциальное уравнение в частных производных, которое имеет принципиально более простые решения. Кроме того, метод оптимизации нелинейных динамических систем по ФОР обеспечивает реализацию объединенного синтеза законов управления в процессе движения ОУ (с текущей идентификацией прогнозирующей математической модели ОУ).

Для обеспечения высокого качества управления нестационарными стохастическими ОУ, информация о которых недостаточно известна, используются адаптивные ИСУ. При этом свойство адаптации достигается с помощью формирования в явном или неявном виде математической модели ОУ.

Структура АО ИСУ определяется принципом разделения и состоит из оптимальной подсистемы оценивания и идентификации, а также подсистемы оптимального управления, построенной для условий точного измерения вектора состояния и вектора параметров, но использующей оценки этих величин.

Дальнейшие исследования должны быть направлены на разработку информационной технологии структурно-параметрической идентификации сложных ОУ.

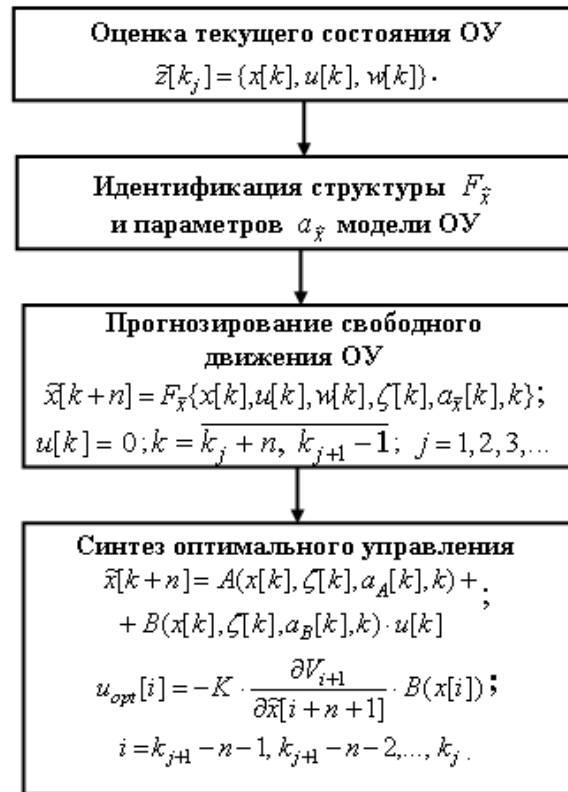


Рисунок 3 – Процедуры алгоритма синтеза адаптивного оптимального управления по ФОР с прогнозирующей моделью

**ЛИТЕРАТУРА:**

1. Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravlenija /Pod red. A.A. Krasovskogo. – М.: Nauka, 1987. – 712 s.
2. Boltjanskij V.G. Matematicheskie metody optimal'nogo upravlenija /V.G. Boltjanskij. – М.: Nauka, 1969. – 451 s.
3. Krasovskij A.A. Universal'nye algoritmy optimal'nogo upravlenija nepreryvnymi processami /A.A. Krasovskij, V.N. Bukov, V.S. Shendrik. – М.: Nauka, 1977. – 272 s.
4. Kornienko V.I. Metodologija pobudovi intelektual'nih prognozujuchih sistem optimal'nogo keruvannja nelineijnimi tehnologichnimi procesami /V.I. Kornienko, I.G. Gulina //Girnicha elektromehanika ta avtomatika. – 2010. – Vip. 85. – S.75-82.
5. Bukov V.N. Adaptivnye prognozirujushhie sistemy upravlenija poletom. – М.: Nauka, 1987. – 288 s.
6. Ostrem K. Vvedenie v stohasticheskiju teoriju upravlenija /K. Ostrem. – М.: Mir, 1973. – 248 s.

**Рецензент:** д.т.н., проф. Алексеев М.А., ГВУЗ «Национальный горный университет».