СЕРЕНДИПОВЫ АППРОКСИМАЦИИ: ЗАБАВЫ С НЕУЗЛОВЫМ ПАРАМЕТРОМ

УДК 519.3

ХОМЧЕНКО Анатолий Никифорович
д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и высшей математики
Черноморский государственный университет им. П.Могилы (г. Николаев)
Научные интересы: методы и модели восстановления функций, принцип барицентрического усреднения, теория серендиповых аппроксимаций.
E-mail: khan@chdu.edu.ua

ЛИТВИНЕНКО Елена Ивановна
к.т.н., доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета,
Научные интересы: математическое моделирование и информационные технологии в технических науках, методы и модели восстановления функций, принцип барицентрического усреднения.
E-mail: mmkntu@gmail.com

АСТИОНЕНКО Игорь Александрович
к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики и математического моделирования
Херсонского национального технического университета,
Научные интересы: методы и модели восстановления функций, теория серендиповых аппроксимаций.
E-mail: astia@ukr.net.

ВВЕДЕНИЕ

Слово “забавы” не должно вызывать удивления. Оно взято из названия статьи в американском математическом журнале “Пентагон” [1]. Издавна существует устойчивый тезис: наука – вид игры. Взгляд на науку как проявление игры высказывают многие ученые. Известный английский физиолог Э. Стерлинг, прославивший своё имя введением в научный обиход понятия “гормон”, ещё в 20-е годы XX столетия заявил: “Научное исследование – самая великая игра”. Этой теме посвящена целая глава в книге [2]. Характерно, что игровая сторона науки сильнее звучит в высказываниях представителей точного знания, где эти моменты работы ученого проступают явственнее, в частности, в физике и, особенно, в математике. Эта статья относится к прикладной математике, точнее к методу конечных элементов (МКЭ). Наше внимание сосредоточено на малоизученных моделях – серендиповых элементах. Мы попытаемся объяснить некоторые парадоксы и устранить ошибки. Наши исследования подтверждают важный вывод [2]: игровая природа науки состоит не только в том, чтобы творить, подчиняясь правилам, но и в том (может быть, иногда даже больше в том), чтобы эти правила в необходимые моменты нарушать.

После триумфа “пенициллиновой” славы А. Флеминг признался, что он “игрок в микробы”. А далее ученый продолжил: “Но в этой игре есть, естественно, свои правила. Интересно их нарушать, доказывать, что некоторые из них неправильны, и находить то, о чем ещё никто не подумал...”. Марк Твен в свойственной писателю образной манере так преподносит эту мысль: “Сначала добудьте факты, а затем на досуге можете ими поиграть” [2].

Сегодня в теории серендиповых аппроксимаций накоплено столько интересных фактов, что вполне можно последовать совету Марка Твена.

АНАЛИЗ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ ПУБЛИКАЦИЙ

Тема серендиповых элементов поднимается в книгах [3-6]. Об исключении (конденсации) неузловых параметров можно почитать в [7-12]. Информация о серендиповых элементах ограничена стандартными моделями [10], которые, как выяснилось, физически неадекватны. Речь идет о парадоксе "гравитационного отталкивания" в поузловых распределениях нагрузок элементов высших порядков. По признанию О. Зенкевича, эти распределения лишены "здравого смысла" [3]. Однако Зенкевич и его последователи не увидели возможности избавиться от этого недостатка серендиповых моделей и посоветовали смириться с ним. Мы считаем, что такая возможность существует и связана она с правильным использованием неузловых (скрытых) параметров интерполяции (аппроксимации).

Интересно проанализировать, что пишут о неузловых параметрах специалисты, развивающие и применяющие МКЭ. По мнению одного из авторитетнейших специалистов в МКЭ О. Зенкевича, сохранение неузловых параметров не имеет больших преимуществ, так как это не изменяет функцию формы на границе КЭ [3]. Здесь Зенкевич упускает из виду то обстоятельство, что внутренние параметры способны существенно изменить поведение функции внутри КЭ. При этом изменяются интегральные характеристики модели. Не следует забывать, что интегрирование по конечному носителю – ключевая процедура МКЭ. Описывая особенности серендиповых аппроксимаций, авторы [4] замечают, что на элементах серендипова семейства узлы размещаются (по мере возможности) на границах КЭ, а базисные функции получаются умножением членов степени p по одной переменной на линейные члены по другой переменной. Тогда на границах вид аппроксимации функции совпадает с полученным для лагранжевых КЭ и, таким образом, сохраняется C^0 - гладкость аппроксимации. Нам кажется, что линейчатость серендиповых поверхностей – главная причина чрезмерного усиления жесткости стандартных моделей. Зенкевич и Морган не подумали о том, что C^0 - гладкость поверхности не нарушится, если умножить не на линейные, а на квадратичные члены по другой переменной. Этот прием смягчает модель, устраняя эффект "гравитационного" отталкивания. В книге [7] описан элемент биквадратичной интерполяции, в котором внутренний 9-й узел исключен вместе с соответствующим членом x^2y^2. К сожалению, все стандартные элементы серендипова семейства получены путем совместного устранения внутренних узлов и внутренних параметров. Примечательно, что даже профессиональные математики не усмотрели в такой процедуре конденсации нежелательных последствий. Вот что пишут по этому поводу Стренг и Фикс [8]: "Простая модификация лагранжева элемента в соответствующий серендипов элемент биквадратичной интерполяции состоит в исключении внутреннего узла и уменьшении числа параметров до восьми. Это делается за счет удаления из биквадратичного полинома члена x^2y^2, вклад которого в аппроксимацию незначителен. Важно, что такая модификация избавляет от нежелательного внутреннего узла". Стремление избавиться от нежелательных внутренних узлов понять можно, однако роль "внутренних" мономов недооценить нельзя. Некоторые из наших предшественников хорошо понимали, что задача исключения внутренних узлов имеет множество решений. Например, Галлагер [9] прямо указывает на то, что для исключения внутреннего узла можно выписать набор различных выражений в терминах сокращенной системы степеней свободы. Трудно понять, почему Зенкевич и его последователи остановили свой выбор на стандартных серендиповых базисах, которые так далеки от совершенства.

Ясно, что в МКЭ узловые точки неравноценны. Так, условия в центре тяжести элемента накладывают связи лишь на рассматриваемый элемент, условия в промежуточных узлах на границе КЭ уже захватывают и соседний элемент, а в узлах, расположенных в вершинах КЭ, условия перевязывают все сходящиеся в них элементы. Это еще одна причина для исключения внутренних узлов. При этом важно сохранить внутренний параметр и направить его потенциал на усовершенствование модели.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В математике эксперименты с моделями – интересная и захватывающая игра. Такие эксперименты никогда не прекращались. Среди математиков прошлого наиболее известными экспериментаторами были Л. Эйлер (1707-1783) и К. Гаусс (1777-1855). После появления компьютеров интерес к экспериментированию заметно возрос. В 1968 г. Эргатудис, Айронс и Зенкевич [10] экспериментально подбирали изопараметрическое преобразование криволинейного четырехугольника в квадрат. В результате были открыты серендиповы элементы. Базисные функции, полученные авторами [10], называются стандартными.

Ниже мы покажем одну из возможностей конструирования нестандартных базисов, свободных от "врожденных" недостатков серендипова семейства. Предложенный способ конденсации (редукции) является универсальным. Мы иллюстрируем этот способ на квадратном элементе 2-го порядка (биквадратичная интерполяция).

Хорошо известно, что прообразом серендипова конечного элемента (СКЭ) был лагранжев элемент (ЛКЭ). Поэтому на рис. 1 показаны прообраз (9 узлов) и образ (8 узлов) элементов биквадратичной интерполяции.

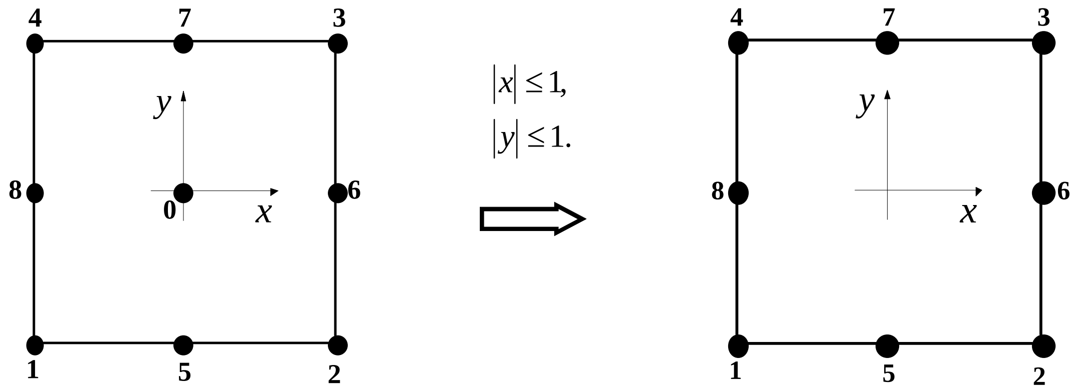

Рис. 1. Элементы 2-го порядка (ЛКЭ-9 и СКЭ-8)

Установлено [13], что единственный базис ЛКЭ является генератором бесчисленного множества базисов СКЭ того же порядка. Из множества базисов всегда можно выбрать математически обоснованные и физически адекватные базисы. Авторы [10] сделали неудачный выбор, хотя с поставленной в [10] задачей стандартный базис справляется. Попытаемся разобраться в стандартных приемах построения базиса СКЭ. Полезно воспользоваться схемой Паскаля (рис.2), которая содержит все мономы, необходимые для билинейного и биквадратичного базисов.

$$\begin{array}{c} 1 \\ x \quad y \\ x^2 \quad xy \quad y^2 \\ \ldots \; x^2y \quad xy^2 \; \ldots \\ \ldots \quad x^2y^2 \quad \ldots \end{array}$$

Рис. 2. Схема Паскаля

В МКЭ до сих пор господствуют правила матричной алгебры, поэтому строго соблюдается соответствие между количеством узлов и количеством мономов в интерполянте. При этом мономы выбираются так, чтобы не нарушалась геометрическая изотропия [5, 11]. Обсудим это на примере биквадратичной интерполяции. Для двух аргументов полный полином 2-й степени содержит 6 мономов (рис. 2). Для СКЭ-8 этого недостаточно. Еще два монома нужно выбрать так, чтобы на границах $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ степень была не выше 2-й. Таким образом, первоначально интерполянт принимается в виде:

$$\begin{aligned} f(x,y) = d_1 + d_2x + d_3y + d_4x^2 + \\ + d_5xy + d_6y^2 + d_7x^2y + d_8xy^2 \end{aligned}, \qquad (1)$$

где d_i - неопределенные коэффициенты, которые определяются методом обратной матрицы. Для этого нужно составить и решить СЛАУ 8×8. Задача обращения матрицы является непростой, особенно для многочленов высоких степеней и функций нескольких переменных. В то же время в МКЭ [3, 5, 7, 12] используется интерполяционная формула, где в явном виде выделена зависимость функции $f(x,y)$ от ее узловых значений. Это удобно, поскольку при рассмотрении всей совокупности КЭ удается сразу приравнять узловые значения функции $f(x,y)$ для смежных элементов и тем самым заранее обеспечить требуемую гладкость функции во всей области. Таким образом, задача интерполяции сводится к определению коэффициентов Лагранжа $\{N_i(x,y)\}$ в полиноме

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{8} N_i(x,y)\ f_i\ , \tag{2}$$

где f_i - узловые значения функции $f(x,y)$.

Предполагается, что многочлен (2) определенной степени содержит все более низкие степени переменных. Это обстоятельство связано со сходимостью МКЭ и аппроксимацией геометрически возможных перемещений при неограниченном уменьшении размеров КЭ. Поведение интерполяционного полинома на границе КЭ регламентируется условиями интерполяционной гипотезы Лагранжа:

$$N_i(x_k,y_k)=\begin{cases}1, \text{ если } i=k,\\ 0, \text{ если } i\neq k,\end{cases}\quad \sum_{i=1}^{8} N_i(x,y)=1\,, \tag{3}$$

где $N_i(x,y)$ - базисная функция; i - номер функции; k - номер узла.

Вместо составления и решения СЛАУ 8×8 мы редуцируем ЛКЭ-9 в СКЭ-8 путем распределения “информации”, сконцентрированной в центральном узле, между граничными узлами. Иными словами, базисные функции СКЭ-8 мы выражаем через базисные функции ЛКЭ-9, которые определяются простым перемножением одномерных базисных функций Лагранжа от x и y. Чтобы получить полный базис ЛКЭ-9, достаточно построить только три функции: $L_0(x,y)$, $L_1(x,y)$ и $L_5(x,y)$. Эти функции имеют вид:

$$\begin{gathered} L_0(x,y)=\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right),\\ L_1(x,y)=(1-x)(1-y)x\,y\,,\\ L_5(x,y)=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)(1-y)\,. \end{gathered} \tag{4}$$

В качестве меры сконцентрированной в узлах “информации” возьмем узловые нагрузки от единичной массовой силы. Узловые нагрузки определяются по формуле интегрального среднего

$$\gamma_i=\frac{1}{S}\int_D \varphi_i(x,y)\,dx\,dy\,, \tag{5}$$

где $\varphi_i(x,y)$ - базисная функция соответствующей модели; D - область интегрирования; S - площадь области D.

Набор $\{\gamma_i\}$ назовем спектром узловых нагрузок ЛКЭ-9:

$$\gamma_i=\frac{1}{36}\,,\quad i=\overline{1,4}\,;\quad \gamma_i=\frac{4}{36}\,,\quad i=\overline{5,8}\,;\quad \gamma_0=\frac{16}{36}\,.$$

Как распределить $\gamma_0=\dfrac{16}{36}$ между граничными узлами КЭ? Понятно, что способов множество, однако не все способы дают физически адекватное распределение нагрузок. Чтобы составить представление о базисе СКЭ-8, достаточно построить лишь две функции: “угловую”, например, $N_1(x,y)$ и “промежуточную”, например, $N_5(x,y)$. Формулы преобразования лагранжевых полиномов в серендиповы имеют вид [13]:

$$\begin{gathered} N_1(x,y)=L_1(x,y)+\alpha\ L_0(x,y)\,,\\ N_5(x,y)=L_5(x,y)+\beta\ L_0(x,y)\,, \end{gathered} \tag{6}$$

где $4\alpha+4\beta=1$.

Чтобы получить стандартный базис СКЭ-8 [10], Джордан [7] использовал “рецепт”:

$\alpha=-\dfrac{1}{4}$; $\beta=\dfrac{1}{2}$. При этом базисные функции имеют вид:

$$\begin{gathered} N_1(x,y)=\frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-1-x-y)\,,\\ N_5(x,y)=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)(1-y)\,. \end{gathered} \tag{7}$$

Формула (5) дает: $\gamma_1=-\dfrac{1}{12}$; $\gamma_5=\dfrac{1}{3}$.

Обращает на себя внимание линейчатый характер “промежуточной” поверхности $N_5(x,y)$. Избыточная жесткость “промежуточных” поверхностей стандартной модели – главная причина возникновения аномального спектра. С геометрической точки зрения α - аппликата "угловой" поверхности $N_i(x,y)$, β - аппликата "промежуточной" поверхности в центре (0,0) после модификации КЭ.

В примерах, приведенных ниже, рассматриваются конкретные спектры нагрузок и соответствующие базисные функции $N_1(x,y)$ и $N_5(x,y)$.

Для $\gamma_1 = -\frac{1}{12}$; $\gamma_5 = \frac{1}{3}$ (стандартная модель Эргатудиса, Айронса и Зенкевича) базисные функции имеют вид (7).

Для $\gamma_1 = 0$; $\gamma_5 = \frac{1}{4}$ имеем:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{16}(1-x)(1-y)(-1-x-y+3xy),$$
$$N_5(x,y) = \frac{1}{16}\left(1-x^2\right)\left(5-8y+3y^2\right). \tag{8}$$

В этом случае загружены только "промежуточные" узлы.

Для $\gamma_1 = \frac{1}{18}$; $\gamma_5 = \frac{7}{36}$ имеем:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{16}(1-x)(1-y)(1+x+y+5xy),$$
$$N_5(x,y) = \frac{1}{16}\left(1-x^2\right)\left(3-8y+5y^2\right). \tag{9}$$

Для $\gamma_1 = \frac{1}{12}$; $\gamma_5 = \frac{1}{6}$ имеем:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{8}(1-x)(1-y)(1+x+y+3xy),$$
$$N_5(x,y) = \frac{1}{8}\left(1-x^2\right)\left(1-4y+3y^2\right). \tag{10}$$

Это модель 4-х сочлененных стержней.

Для $\gamma_1 = \frac{1}{9}$; $\gamma_5 = \frac{5}{36}$ имеем:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{16}(1-x)(1-y)(3+3x+3y+7xy),$$
$$N_5(x,y) = \frac{1}{16}\left(1-x^2\right)\left(1-8y+7y^2\right). \tag{11}$$

Для $\gamma_1 = \frac{1}{4}$; $\gamma_5 = 0$ имеем:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(2+2x+2y+3xy),$$
$$N_5(x,y) = \frac{1}{4}\left(1-x^2\right)\left(-1-2y+3y^2\right). \tag{12}$$

В этом случае загружены только угловые узлы.

Отметим, что в альтернативных (нестандартных) моделях появился 9-й параметр x^2y^2, с которым можно "поиграть". Важно, что "забавы" с 9-м параметром не влияют на поведение базиса на границе КЭ. На рис. 3 показаны графики "угловой" и "промежуточной" функций на границе $y=-1$.

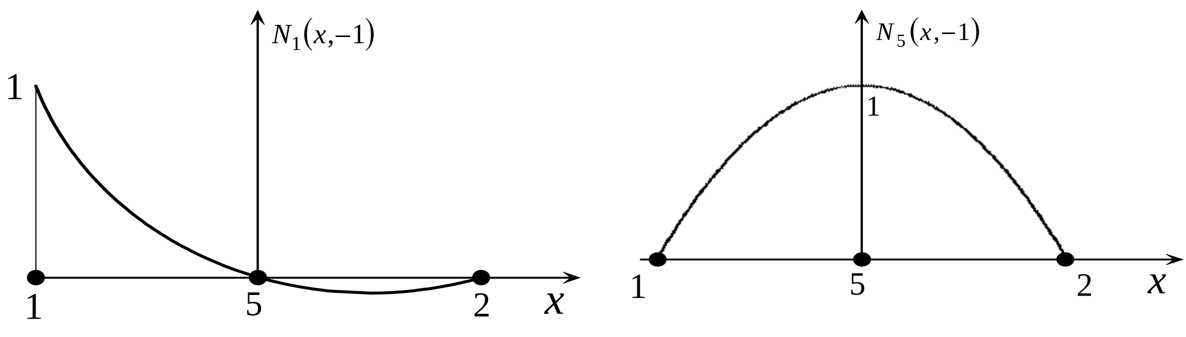

Рис. 3. Графики $N_1 = \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right)$ ***и*** $N_5 = (1-x)$.

Среди всех "промежуточных" поверхностей $N_5(x,y)$ только одна (стандартная) является линейчатой. Это пример "жесткой" модели. Гибкость "промежуточных" поверхностей в альтернативных моделях достигается за счет применения прогнутых параболических профилей (рис. 4).

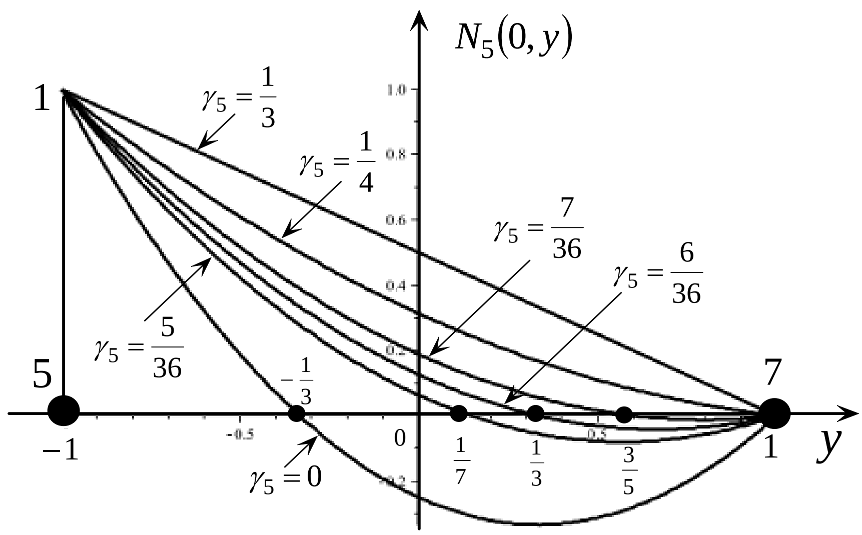

Рис. 4. Графики $N_5(0, y)$.

Понятно, что $\gamma_5 = 0$ - физически обоснованный предел. Дальнейшее увеличение прогиба поверхности $N_5(x, y)$ приведет к появлению отрицательных нагрузок в промежуточных узлах. Такие модели интересны чисто академически, как предостережение. Чрезмерное смягчение "жесткой" модели может вернуть абсурдные результаты, по крайней мере, в задаче поузловой локализации равномерной массовой силы.

ВЫВОДЫ

Неузловой параметр чрезвычайно полезен в конструировании физически адекватных серендиповых элементов. Вызывает интерес распространение предложенной схемы редукции ЛКЭ в СКЭ на элементы третьего и четвертого порядков, в которых появляются соответственно 4 и 9 неузловых параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bressoud T.C. Fun with splines / T.C. Bressoud // The Pentagon. — V. XL (42). — Spring, 1983. — № 2. — P. 85-98.
2. Suhotin A.K. Prevratnosti nauchnyh idej. / A.K. Suhotin. — M.: Mol. gvardija, 1981. — 271 s.
3. Zenkevich O. Metod konechnyh jelementov v tehnike / O. Zenkevich. — M.: Mir, 1975. — 541 s.
4. Zenkevich O. Konechnye jelementy i approksimacija / O. Zenkevich, K. Morgan. — M.: Mir, 1986. — 318 s.
5. Norri D. Vvedenie v metod konechnyh jelementov /D. Norri, Zh. de Friz. — M.: Mir, 1981. — 304 s.
6. Nemchinov Ju.I. Raschet prostranstvennyh konstrukcij (metod konechnyh jelementov) / Ju.I. Nemchinov. — K.: Budivel'nik, 1980. — 232 s.
7. Mitchell Je. Metod konechnyh jelementov dlja uravnenij s chastnymi proizvodnymi / Je. Mitchell, R. Ujejt. — M.: Mir, 1981.— 216 s.
8. Streng G. Teorija metoda konechnyh jelementov / G.Streng, Dzh.Fiks. — M: Mir, 1977. — 349 s.
9. Gallager R. Metod konechnyh jelementov. Osnovy / R. Gallager. — M.: Mir, 1984. — 428 s.
10. Ergatoudis I. Curved isoperimetric "quadrilateral" elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz // Internat. J. Solids Struct., —№ 4. —1968. — P. 31-42.
11. Konnor Dzh. Metod konechnyh jelementov v mehanike zhidkosti /Dzh. Konnor, K.Brebbia. — L.: Sudostroenie, 1979. — 264 s.
12. Rozin L.A. Metod konechnyh jelementov v primenenii k uprugim sistemam /L.A. Rozin. — M.: Strojizdat, 1977. — 132 s.
13. Homchenko A.N. Pro "m'jake" modeljuvannja bikvadratichnogo SSE / A.N. Homchenko, K.V. Rim // Komp'juterni tehnologiï. – Vip. 201. – T. 213. – Mikolaïv: ChDU im. P.Mogili, 2013. – S. 106-108.