РАСЧЕТ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ

УДК 004.77: 681.5.09

БОРЧИК Євгеній Юрійович
к.ф.-м.н., доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського.
Наукові інтереси:. використання чисельних методів в розрахунку гарантоздатних комп'ютерних систем.
e-mail: borchikeu@gmail.com

ЦИВІЛЬСЬКИЙ Федір Миколайович
к.т.н., доцент кафедри інформаційних технологій Херсонського національного технічного університету.
Наукові інтереси: дослідження гарантоздатності комп'ютеризованих систем.
e-mail: tednick@yandex.ua

ДРОЗДОВА Євгенія Анатоліївна
старший викладач кафедри інформаційних технологій Херсонського національного технічного університету.
Наукові інтереси: технології програмування на С, чисельні методи та їхня програмна реалізація.
e-mail: jennydr@rambler.ru

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Выход из строя компьютерной системы и отдельных ее компонентов может привести к дорогостоящим последствиям в работе любого предприятия. Кроме простоя в производственном или технологическом процессе, необходимо учитывать расходы, связанные с повторным запуском системы, а также восстановлением данных.

Использование отказоустойчивых компонентов в системе управления процессами может минимизировать данные риски. Основным методом обеспечения отказоустойчивости системы является конструкция, использующая резервирование. При возникновении неисправности или выходе из строя одного из компонентов в компьютерной системе исправно работающие компоненты обеспечивают продолжение работы системы.

При расчете надежности работы систем с резервированием применяются методы, основанные на использовании параллельно-последовательных структур и методы графов состояний.

Наиболее эффективным расчетом систем с резервированием является сведение задачи к случайному марковскому процессу с дискретными состояниями. [1, 2] Решение данной задачи обычно сводится к решению системы дифференциальных уравнений, расчет которой является достаточно сложным и громоздким при компьютерной обработке.

АНАЛИЗ ПРЕДЫДУЩИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Рассмотрим задачу по расчету количественных показателей надежности резервированной системы. Необходимо вычислить вероятность безотказной работы p(t) и наработку на отказ T_0 сегмента компьютерной сети, содержащего коммутатор К1. Коммутатор К2 используется в режиме горячего (нагруженного) резерва и может заменить К1 на период его ремонта (рис.1). Сегмент обеспечивает передачу данных между подсетями, если в работоспособном состоянии находится по крайней мере один из коммутаторов. Интенсивности отказов коммутаторов λ_1, λ_2 и параметры потоков восстановлений μ1, μ2 постоянны во времени. Оба коммутатора восстанавливаемые. Потоки отказов и восстановлений будем считать простейшими. Примем, что в момент начала работы коммутаторы исправны.

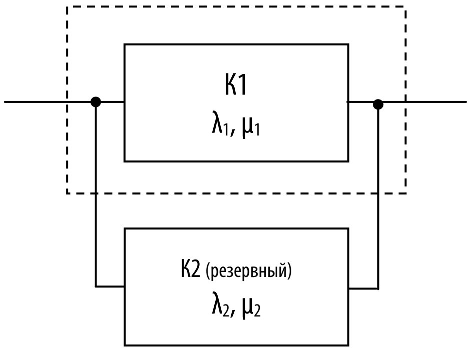

Рисунок 1 – Схема расчетная надежностная

Эта задача подробно решается в [3]. Кратко воспроизведем ее решение.

Вначале строится расчетная надежностная схема, приведенная на рис. 1. Возможность замены первого (основного) коммутатора К1 при его отказе вторым (резервным) коммутатором К2, работающим в нагруженном режиме, отражена параллельным соединением.

Поскольку в расчетной надежностной схеме отдельные элементы могут восстанавливаться, а потоки отказов и восстановлений коммутаторов приняты простейшими, то для расчета требуемых показателей надежности используется теория марковских дискретных случайных процессов. Для этого рассматриваются возможные состояния системы в период ее эксплуатации. Состояния 1, 2 и 3 соответствуют рабочему состоянию системы в целом (работает хотя бы 1 коммутатор), состояние 4 – отказовое состояние, когда не работают оба коммутатора.

Учитывая условия задачи, строится граф состояний (рис. 2). В изображении вершин графа указывается номер состояния устройства и работающие коммутаторы в этом состоянии. Вершина 4 графа состояний, соответствующая отказовому состоянию, заштрихована. Вершина 2 графа состояния, например, соответствует рабочему состоянию устройства, когда работает К2, а отказавший К1 восстанавливается.

С помощью графа (рис.2) по известным правилам [1] записывается система дифференциальных уравнений Колмогорова, связывающая вероятности $p_i(t)$ нахождения устройства в любом из возможных его состояний в произвольный момент времени t:

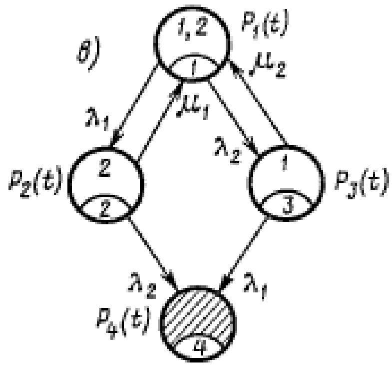

Рис. 2. Граф состояний

$$\left.\begin{aligned} p_1'(t) &= -(\lambda_1+\lambda_2)p_1(t)+\mu_1 p_2(t)+\mu_2 p_3(t);\\ p_2'(t) &= -(\mu_1+\lambda_2)p_2(t)+\lambda_1 p_1(t);\\ p_3'(t) &= -(\mu_2+\lambda_1)p_3(t)+\lambda_2 p_1(t);\\ p_4'(t) &= \lambda_2 p_2(t)+\lambda_1 p_3(t); \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Эта линейная система решается методами операционного исчисления с учетом того, что в момент включения устройства все коммутаторы исправны, т.е. $p_1(0)=1$, а $p_2(0)=p_3(0)=p_4(0)$. Вычисляются функции вероятностей $p_i(t)$ и наработка на отказ T_0. В частности, при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, $\mu_1=\mu_2=\mu$, функция вероятности нахождения системы в состоянии отказа $p_4(t)$ и наработка на отказ T_0 принимают следующий вид:

$$p_4(t)=1+\frac{4\lambda^2}{B(A+B)}\exp[-\frac{(A+B)}{2}t]- \quad (2)$$

$$-\frac{4\lambda^2}{B(A-B)}\exp[-\frac{(A-B)}{2}t]$$

$$T_0=\frac{\mu+3\lambda}{2\lambda^2} \quad (3)$$

где $A=\mu+3\lambda$; $B=\sqrt{\mu^2+3\mu\lambda+\lambda^2}$.

Основным достоинством данного метода является то, что он позволяет находить аналитическое решение. Однако, при увеличении числа состояний системы (при увеличении количества элементов системы) нахождение аналитического решения сильно усложняется или даже становится невозможным.

Целью работы является разработка численного метода расчета параметров надежности системы для нахождения решения рассмотренной выше задачи при любом количестве состояний системы.

ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

Пусть некоторая система в каждый момент времени находится в одном из k состояний. В отдельные моменты времени $n\Delta t$, где Δt=const - шаг по времени, $n=0,1,2,\ldots$, система переходит из одного состояния в другое, например, из состояния i в состояние j. В частности, после испытания система может остаться в том же состоянии ("перейти" из состояния i в состояние i). Пусть в момент времени $t= n\Delta t$ вероятности состояний системы $p_j(t)\ \ (j=\overline{1,k})$. Для того, чтобы найти вероятности состояний системы $p_j(t+\Delta t)\ \ (j=\overline{1,k})$ в момент времени $t+\Delta t$, воспользуемся формулой полной вероятности :

$$p_j(t+\Delta t)=p_1(t)r_{1j}(t)+\ldots+p_k(t)r_{kj}(t)=\sum_{i=1}^{k}p_i(t)r_{ij}(t) \qquad (4)$$

где $r_{ij}(t)$ - вероятность перехода системы из состояния i, которое она принимала в момент времени t, в состояние j, которое она принимает в момент времени $t+\Delta t$. Запишем (1) в векторной форме:

$$\mathbf{p}(t+\Delta t)=\mathbf{p}(t)\mathbf{R}(t) \qquad (5)$$

где $\mathbf{p}(t)=(p_1(t),p_2(t),\ldots,p_k(t))$, $\mathbf{p}(t+\Delta t)=(p_1(t+\Delta t),p_2(t+\Delta t),\ldots,p_k(t+\Delta t))$ - вектор-строки вероятностей состояний системы в моменты времени t и $t+\Delta t$ соответственно, $\mathbf{R}(t)=\left\|r_{ij}(t)\right\|_{i,j=1}^{k}$ - матрица вероятностей перехода, обладающая теми свойствами, что все ее элементы неотрицательны и сумма элементов каждой строки равна 1.

Если задан начальный вектор – строка вероятностей состояний системы $\mathbf{p}(0)=(p_1(0),p_2(0)\ldots p_k(0))$, и известна матрица вероятностей перехода $\mathbf{R}(t)$, то по итерационной формуле (5) легко находятся вероятности состояний системы в любой момент времени.

Если система представляет собой однородную марковскую цепь, в этом случае матрица вероятностей перехода $\mathbf{R}(t)$ не зависит от t, т. е. $\mathbf{R}(t)=\mathbf{R}(0)$ для $t=n\Delta t$ ($n=0,1,2,\ldots$), то согласно теореме о предельных вероятностях [5] итерационный процесс (5) сходится при $n\to\infty$ к предельному распределению вероятностей $\mathbf{p}^*(t)=(p^*_1(t),p^*_2(t),\ldots,p^*_k(t))$, вообще говоря, зависящему от начального состояния системы $\mathbf{p}(0)$.

Для вычисления времени T_i пребывания системы в i-ом состоянии при условии, что с момента начала работы системы прошло время $T= N\Delta t$; N - некоторое натуральное число, будем пользоваться следующим рассуждением. Время пребывания системы в i-ом состоянии в промежутке времени от $t= n\Delta t$ до $t+\Delta t$, очевидно, равно $p_i(t)\Delta t=p_i(n\Delta t)\Delta t$. Тогда

$$T_i=\sum_{n=1}^{N}np_i(n\Delta t)\Delta t \qquad (6)$$

Решим теперь задачу по расчету количественных показателей надежности резервированной системы (рис. 1) численным способом. Матрица вероятностей перехода рассматриваемой системы имеет вид

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}1-r_{12}-r_{13} & r_{12} & r_{13} & 0\\ r_{21} & 1-r_{12}-r_{13} & 0 & r_{24}\\ r_{31} & 0 & 1-r_{12}-r_{13} & r_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

где учтено, что сумма всех элементов в любой строке матрицы $\mathbf{R}$ равна единице, а элементы матрицы $r_{ij}=0$, если система не переходит из состояния i в состояние j. Учитывая, что потоки отказов и восстановлений простейшие, запишем элементы матрицы вероятностей перехода в следующем виде

$$r_{ij}=\alpha_{ij}\Delta t\exp(-\alpha_{ij}\Delta t)$$

где $\alpha_{ij}=\mathrm{const.}$ - интенсивности перехода системы из состояния i в состояние j. Поскольку по условию задачи $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, $\mu_1=\mu_2=\mu$, то $\alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{24}=\alpha_{34}=\lambda$, $\alpha_{21}=\alpha_{31}=\mu$. Тогда $r_{12}=r_{13}=r_{24}=r_{34}=\lambda\Delta t\exp(-\lambda\Delta t)$, $r_{21}=r_{31}=\mu\Delta t\exp(-\mu\Delta t)$. Заметим, что элементы матрицы вероятностей перехода r_{ij} не зависят от времени t. Это означает, что данная система представляет собой однородную марковскую цепь.

Используя математический пакет Mathcad , находим решение рассматриваемой задачи по формулам (5), (6) при значениях $\lambda=\mu=1$.

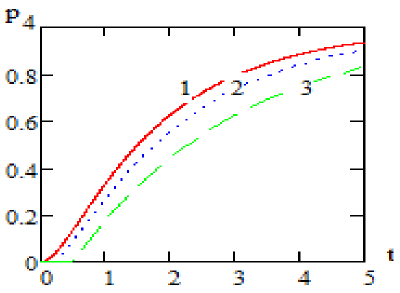

Рис. 3

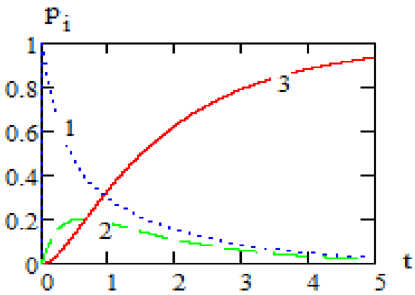

Рис. 4

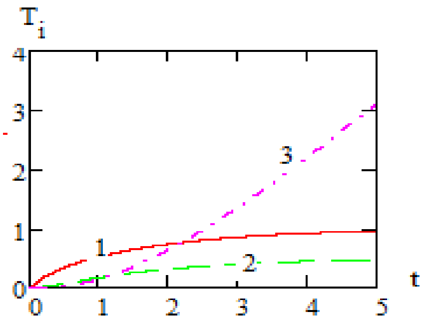

Рис. 5

На рис. 3 представлена зависимость вероятности $p_4(t)$ нахождения системы в состоянии 4 от времени t. Кривая 1 представляет зависимость $p_4(t)$, полученную в [3] и определяемую выражением (2), кривые 2,3 – зависимость $p_4(t)$, полученную в результате численного расчета при значении шага по времени Δt, равного 0.2 и 0.5 безразмерных единиц соответственно. При уменьшении значения Δt численное решение быстро приближается к аналитическому (2). Так расчеты показывают, что абсолютное отклонение численного решения от аналитического при значениях Δt, равных 0.5, 0.2, 0.01, 0.001, не превосходит величин 0.178, 0.067, 0.00318, 0.000317 соответственно.

На рис. 4, 5 представлены результаты расчетов вероятностей p_i и времени T_i пребывания системы в состояниях i $(i = \overline{1,4})$ в зависимости от времени t. Шаг по времени Δt принимался равным 0.001. На рис. 4 кривая 1 представляет зависимость $p_1(t)$, кривая 2 – зависимость $p_2(t)=p_3(t)$, кривая 3 – зависимость $p_4(t)$. Поскольку система представляет собой однородную марковскую цепь, то, как было отмечено выше, численное решение сходится при $n \to \infty$ (т.е. при $t \to \infty$) к предельному распределению вероятностей $\mathbf{p}^*(t)$. В данном случае, как видно из рис. 4, $\mathbf{p}^*(t) = (0,0,0,1)$.

На рис. 5 кривая 1 представляет зависимость $T_1(t)$, кривая 2 – зависимость $T_2(t)=T_3(t)$, кривая 3 – зависимость $T_4(t)$. Из рис. 4,5 видно, что времена T_1 и $T_2=T_3$ стремятся при $t \to \infty$ к предельным значениям T_1^* T_2^* T_3^*.

При численном расчете в качестве предельных значений принимались T_i при t=20. При этом с точностью до 4-го знака $T_1(20)=1.0000$, $T_2(20)=T_3(20)=0.5005$. Тогда наработка на отказ определяется следующим образом $T_1^* + 2T_2^* = 1 + 2 * 0.5005 = 2.001$. Отметим, что наработка на отказ T_0, вычисленная по формуле (3), равна 2. При этом ошибка вычисления составляет всего 0.05%.

ВЫВОДЫ

Представленный численный метод позволяет рассчитывать параметры надежности резервированной компьютерной системы. Он может быть реализован программным путем и применяться для решения задачи расчета отказоустойчивости систем различной сложности с достаточной точностью.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Shklyar V.N. Nadezhnost sistem upravleniya: uchebnoe posobie /V.N. Shklyar. – Tomsk: Izd-tvo Tomskogo politehnicheskogo universiteta, 2009. – 126 s.
2. Belhardi N., Boldak A.A., Chabanenko T.M. Obespechenie nadezhnosti kompyuternyih sistem – K.: VEK, 1998. – 160 s.
3. Mikroprotsessoryi. V 3kn. Kn.2 Sredstva sopryazheniya. Kontroliruyuschie i informatsionno-upravlyayuschie sistemyi: Ucheb. Dlya vuzov /V.D. Verner, N.V. Vorobev, A.V. Goryachev i dr.; pod red. L.N. Presnuhina. – M.: Vyissh. Shk, 1986. – 383 s.
4. Romantsev V.V. Analiticheskie modeli sistem massovogo obsluzhivaniya: Ucheb. Posobie – SPb.: SPbGETU (LETI), 1998. – 67 s.
5. Gnedenko B.V. Kurs teorii veroyatnostey.Uchebnik. Izd 10-e., dop. – M.: Librokom, 2011. – 448 s.

Рецензент: *д.т.н., проф. Шарко А.В., Херсонский национальный технический университет.*