



## ФОРМОУТВОРЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ПОВЕРХОНЬ В АРХІТЕКТУРІ ТА ДИЗАЙН-ПРОЕКТУВАННІ

УДК 515.2

**БОТВІНОВСЬКА Світлана Іванівна**

к.т.н., доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки  
Київського національного університету будівництва та архітектури (КНУБА).

### ВВЕДЕННЯ

Задачі архітектурного формоутворення тісно пов'язані із питаннями геометричного моделювання форми об'єкта, знаходженням оптимальних форм поверхонь з урахуванням економічних, естетичних, композиційних, геометричних, статичних та інших критеріїв. Сучасна архітектура поверхонь або оболонь, що задовольняє заданим наперед умовам формоутворення, дозволяє широко використовувати методи дискретної геометрії та за їх допомогою отримувати економічно вигідні проектні рішення. Архітектура сьогодення прагне максимально наблизитись по формі до біологічних об'єктів, використовувати прості природні форми. Сучасні технології дозволяють у дизайн-проектах або у процесі архітектурного проектування достатньо просто моделювати, розраховувати, а потім і втілювати у життя об'єкти будь-якої складності найфантастичніших форм. Саме тому виникає задача перенесення характерних рис різноманітних природніх форм, наприклад, таких як округлість, хвилястість, змінність кривини і т. інш. на поверхню, що моделюється.

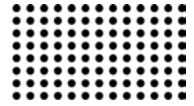
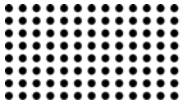
У статті наведено приклади моделювання хвилястої поверхні та поверхні обертавання (аналогів тентових конструкцій) у вигляді дискретних сіток з постійним і до-

вільним кроком, у випадках, коли неможливо отримати аналітичного рівняння цих поверхонь. Використано дві основні властивості геометричної форми (округлість та хвилястість), які за допомогою приведеного методу можуть переноситись на будь-яку поверхню. В цілому, використання геометричних властивостей форми при моделюванні різноманітних об'єктів дозволить отримувати їх найоптимальніші форми, також, з точки зору їх подальшої експлуатації.

**Мета статті.** Метою даної роботи є розробка способу формоутворення дискретних каркасів поверхонь обертавання та перенесення із заданими властивостями на довільно-заданих опорних контурах, коли неможливо записати аналітичне рівняння цих поверхонь.

### АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Практика сучасного проектування показує, що на етапі розрахунку конструктивних елементів поверхонь або оболонь, методи дискретного моделювання дозволяють отримувати результати, найбільш наближені до цифрових моделей. Такі моделі дозволяють охоплювати максимальну кількість різноманітних параметрів і широко використовуються для



комп'ютерного моделювання та візуалізації образів.

Геометрична форма будь-якого дизайн-об'єкта або архітектурної поверхні, яка повинна відповідати не тільки утилітарним, а й естетичним вимогам є основою для отримання найсучасніших архітектурних композицій. Прикладам вдалого використання не лише зовнішньої форми живої природи, а й властивостей та характеристик, які є відображенням функцій того чи іншого живого організму присвячена робота Стесселя С.А. [1]. Автором проаналізовано використання закономірностей формоутворення природних об'єктів, та поєднання їх із геометричною формою архітектурних конструкцій на прикладі навісу на площі Плаза-де-ла-Енкарансьон у Севільї (*Plaza de la Encarnación, J. Mayer H. Und Partner, Architects*).

У практиці будівництва, для перекриття великих прольотів знайшли широке використання мінімальні поверхні (мильні плівки) [2], які залишаються одними з найсучасніших будівельних конструкцій. Мембранні структури покладені в основу тентових споруд, в яких вдало поєднані тенденції розвитку живої природи до збереження енергії, будівельних матеріалів та витрат часу для їх монтажу. Основним конструктивним елементом таких конструкцій виступають механічно розтягнуті м'які оболонки, які забезпечують багате різноманіття форм, останні обумовлюються геометрією опорного контуру. Саме тому, тентова архітектура і подальше залишається актуальною завдяки можливостям створення оригінальних просторів [3].

Крім того, архітектура сьогодні – це питання енергоефективності проектних рішень. Якщо звернутись до об'єктів живої природи, то і тут вони мають тенденції до гармонії, доцільності, раціональності, конструктивно-композиційного групуван-

ня елементів, збереження ритму. Все це призводить до загальної гармонії та краси.

Прикладами поєднання складної геометричної форм з економічністю та енергоефективністю будівлі є перенесення властивостей, наприклад, сферичної поверхні на поверхню, що моделюється у більшості своїй на круглих в плані будівлях. З давніх часів відомо, що куполоподібні форми позитивно впливають на людину [5]. «Округлости — это тоже своего рода магия архитектуры, потому что число «Пи» является уникальным и обладает колоссальным количеством свойств, которые до сих пор слабо изучены человеком, а любая округлость может быть описана математически очень точно с помощью числа «Пи», — пояснює кандидат медичних наук Д.Ковпак [6]. Архітектурні споруди та дизайнські об'єкти округлої форми мають більш природний вигляд. Поверхня сфери приблизно на чверть менше, ніж поверхня куба такого самого об'єму. За цим і ховаються основні економічні характеристики подібних конструкцій:

- для побудови сферичних об'єктів архітектури або дизайну знадобиться менше на чверть матеріалів, ніж для об'єктів кубічної форми;
- із-за мінімізації площі таких поверхонь, опалення таких об'єктів також буде на чверть дешевше ніж кубічних;
- із-за відсутності кутів, в об'єктах сферичної форми не може відбуватись застій повітря, такі приміщення легше провітрювати.

Ще одним прикладом використання вдалих геометричних форм в архітектурі можуть слугувати просторові конструкції з хвилястою геометрією [4]. Хвилясті контури тендових конструкцій унікальним чином прикрашають приміщення, створюють відчуття розширеного простору і по-

зитивно впливають на нервову систему людини. Хвилі на поверхні імітуючи морські хвилі створюють комфорт, додають естетичну виразність та привабливість архітектурній споруді. Сама споруда має високу конструктивну міцність.

**ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ**

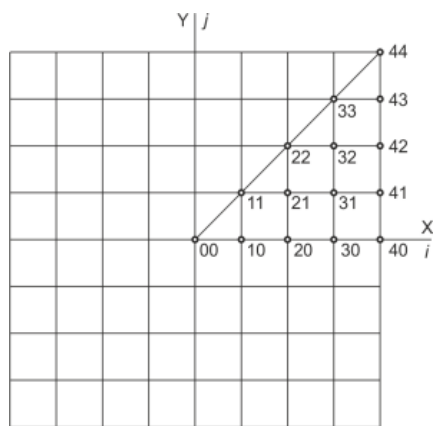
Дана публікація – це лише демонстрація прикладу дискретного моделювання поверхні з накладеними на неї властивостями заданої поверхні-прототипу та демонстрація розширення можливостей використання статико-геометричного методу (СГМ). Стаття не є закінченим дослідженням, а лише демонструє окремі випадки моделювання поверхонь, на які будемо

переносити властивості поверхні обертання та поверхні перенесення.

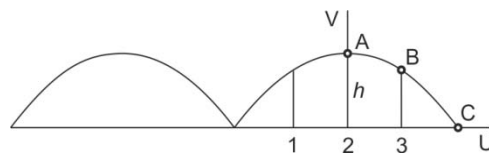
**ОСНОВНА ЧАСТИНА**

Розглянемо приклади побудови моделей поверхонь з різними топологіями планів, які є аналогами тентових конструкцій і для яких неможливо отримати аналітичного рівняння, оскільки вони формуються на довільно заданих опорних контурах.

*Приклад 1.* На правильній чотирикутній сітці у плані з одиничним кроком (рис. 1, а), задано опорний контур із однієї компоненти у вигляді восьми парабол, які утворюють крайовий контур поверхні (рис. 1, б).



а)



б)

Рис. 1 а) топологічна схема сітки у плані;  
б) зовнішній вигляд частини компоненти в площині  $X=4h$ , або  $Y=4h$

Поверхня, яку будемо моделювати має дві вертикальні площини дзеркальної симетрії:

$$X = 0; Y = 0; \tag{1}$$

Задано аплікати вузлів  $A (z_A=2)$ ,  $B (z_B=1,5)$  та  $C (z_C=1,5)$  (рис. 1, б), які мають номери згідно топологічної схеми відповідно:  $A_{42}$ ,  $B'_{41}$ ,  $B_{43}$ ,  $C_{44}$ . Задаємо аплікату центрального вузла, точки  $O (z_O=4)$ . Необхідно визначити координати вузлів дискретного каркасу

поверхні із заданим опорним контуром, що зберігає особливості (властивості) поверхні перенесення верзєри по верзєрі.

Рівняння поверхні перенесення верзєри по верзєрі в декартовій системі координат має вигляд:

$$z' = \frac{\dot{a}^3}{x^2 + a^2} + \frac{\dot{a}^3}{y^2 + a^2} \tag{2}$$

Рівняння дискретної поверхні, що моделюється, матиме вигляд:

$$Z'_{i,j} = \frac{\dot{a}^3}{i^2 h^2 + a^2} + \frac{\dot{a}^3}{j^2 h^2 + a^2} \quad (3)$$

де  $h$  – крок дискретизації сітки в плані вздовж осей  $OX$  та  $OY$ ;

$i, j$  – номери вузлів сітки у заданій системі відліку, показаній на рис.1, б.

Компонента складена із парабол, зовнішній виклад яких представлений на (рис.1, б). Рівняння кожної із парабол має вигляд:

$$V = a_1 + a_2 u^2 \quad (4)$$

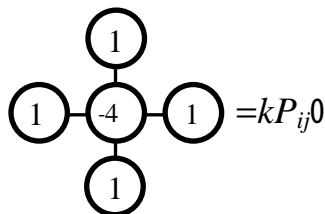
де  $a_1, a_2$  – параметри параболи.

Якщо вважати, що точки  $A, B$  і  $C$  лежать на параболі (4), то параметри  $a_1, a_2$  згідно вихідних даних будуть дорівнювати відповідно:  $a_1=2, a_2=-0,5$ .

Після підстановки параметрів параболи у рівняння (3) і закріпивши крок дискретизації  $h=1$  отримаємо рівняння поверхні (3) у вигляді:

$$Z'_{i,j} = \frac{8}{i^2 + 4} + \frac{8}{j^2 + 4} \quad (5)$$

У відповідності із статико геометричним методом розрахункова зірка поверхні на заданій чотирикутній сітці у плані має вигляд:



Для забезпечення рівноваги вузлів дискретної поверхні запишемо систему рівнянь рівноваги вузлів за статико-геометричним методом:

$$\begin{aligned} X_{i-1,j} + X_{i+1,j} - 4X_{i,j} + X_{i,j-1} + X_{i,j+1} &= kP_{ij}; \\ Y_{i-1,j} + Y_{i+1,j} - 4Y_{i,j} + Y_{i,j-1} + Y_{i,j+1} &= kP_{ij}; \\ Z_{i-1,j} + Z_{i+1,j} - 4Z_{i,j} + Z_{i,j-1} + Z_{i,j+1} &= kP_{ij} \end{aligned} \quad (6)$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності зовнішнього зусилля до довжини ланок клітин сітки;

$P_{i,j}$  – зовнішнє зусилля, прикладене до вузла  $i, j$ .

Приймаємо, що поверхня перенесення формується на правильній сітці з чотирикутними клітинами (рис.1, а). Тоді, абсциси і ординат вузлів поверхні у плані відомі, і складати систему рівноваги вузлів із перших двох рівнянь (6) не потрібно. Зовнішні зусилля на вузли поверхні приймаємо вертикальними.

Тоді, підставивши значення аплікати всіх вузлів поверхні (2) в останнє рівняння системи (6), і склавши систему рівноваги вузлів для 1/4 частини поверхні (3), за рекурентними формулами у відповідності із статико-геометричним методом, визначаємо величини зовнішніх зусиль  $kP_{ij}$ , які будуть формувати точковий каркас поверхні (3) аналогічно поверхні-прообразу.

Таким чином, моделювання дискретного каркасу шуканої поверхню, відбувається за допомогою прикладання знайдених зовнішніх зусиль  $kP_{ij}$  до однойменних вузлів поверхні (5). За допомогою рекурентних формул визначаємо аплікати всіх вузлів, що належать поверхні (5) за формулою:

$$Z_{i-1,j} + Z_{i+1,j} - 4 \cdot Z_{i,j} + Z_{i,j-1} + Z_{i,j+1} - k \cdot (Z'_{i+1,j} + Z'_{i-1,j} - 4 \cdot Z'_{i,j} + Z'_{i,j-1} + Z'_{i,j+1}) = 0 \quad (7)$$

Розраховуємо аплікати вузлів дискретного каркасу поверхні перенесення із заданим опорним контуром у вигляді восьми парабол. Результати розв'язання системи рівнянь (7) наведено в табл. 1

Таблиця 1

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$j=0$	4,0000	3,4891	2,5961	1,4718	0,0000
$j=1$		3,0414	2,3384	1,7929	1,500
$j=2$			1,9427	1,8220	2,000
$j=3$				1,7929	1,5000
$j=4$				2,000	0,0000
$k$					1,2773

За значеннями таблиці 1, і з урахуванням симетрії, на рис.2 побудований дискретний каркас шуканої поверхні. На цьому

прикладі видно поєднання зон позитивної гаусової кривини із зонами негативної гаусової кривини та збереження такої властивості поверхні-прототипу, як хвилястість.

Приклад 2. За аналогічним алгоритмом пропонуємо побудувати дискретний каркас поверхні обертання на восьмикутному плані (рис.3, а), що зберігає властивості сферичної поверхні, а саме – округлість форми.

Маємо сітку з шестикутними клітинами в плані, топологія сітки та порядок позначення вузлів сітки в межах однієї клітини представлено на рис. 3, б. В якості опорного контуру на краю поверхні обрані дуги кіл.

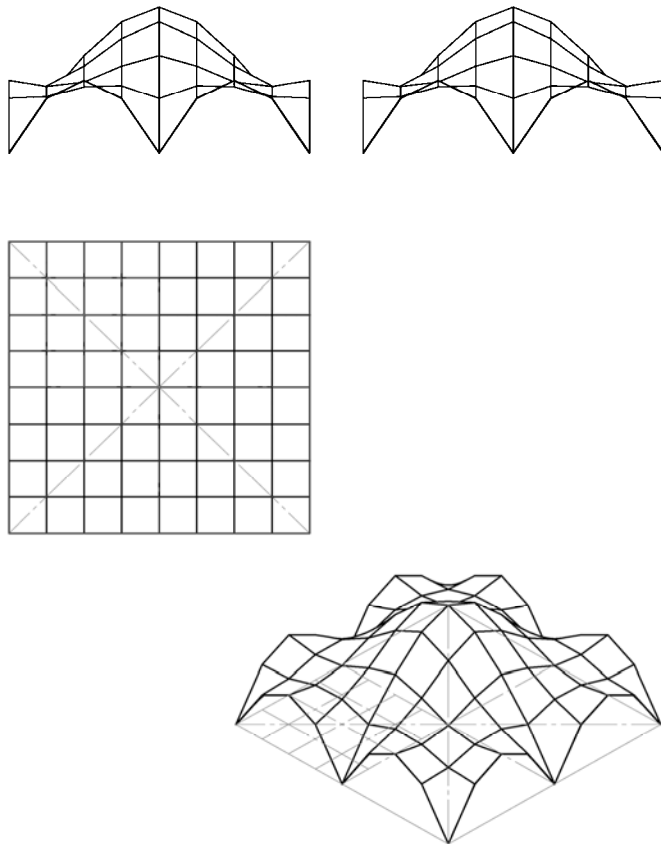


Рис. 2 Проекції та зовнішній вигляд дискретної поверхні з властивостями поверхні перенесення

Задано аплікати контурних вузлів  $A_{42}$  (рис. 3, а). Апліката центрального вузла ( $z_A=3.8269$ ),  $B_{41}$  ( $z_B=3.3139$ ) та  $C_{40}$  ( $z_C=0.000$ ) взята з поверхні-прототипу – поверхні

сфери радіусом  $R=10$  (для вузла  $O_{04}$  матиме три площини симетрії, тому розрахунок будемо проводити для  $1/16$  частини. ( $z_0=10.000$ )). Поверхня, що моделюється

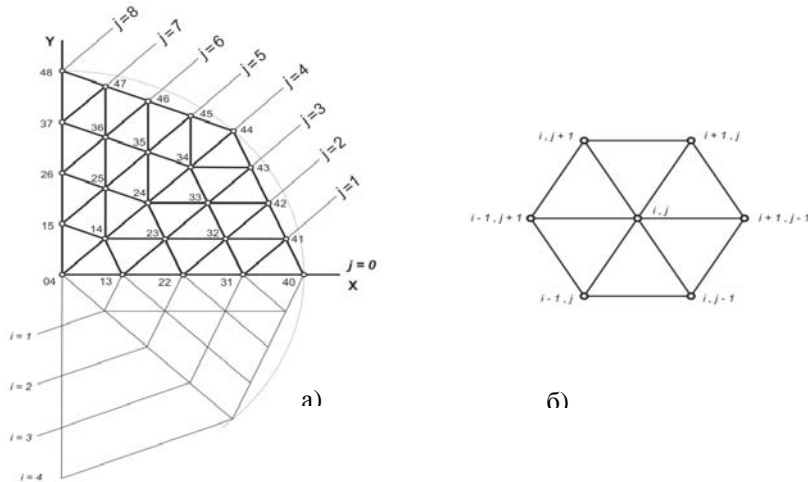


Рис.3 а) топологічна схема плану з шестикутними клітинами; б) схема позначень вузлів однієї клітини;

На відміну від першого прикладу для даної задачі крок вздовж осі  $OX$  не буде залишатись постійним, тому абсциси вузлів поверхні, що моделюється будемо розраховувати за допомогою розв'язання системи рівноваги вузлів згідно статико-геометричного методу:

$$X_{i-1,j+1} + X_{i-1,j} - 6 \cdot X_{i,j} + X_{i,j+1} + X_{i+1,j} + X_{i+1,j+1} - k \cdot P_{ij} = 0 \quad (8)$$

Забезпечуємо рівновагу вузлів в плані. Для цього всі зовнішні зусилля прикладаємо вертикально. Всі ординати розраховуємо за (8) враховуючи симетрію. Результати розрахунків аплікат виконуємо за аналогічними рівняннями рівноваги вузлів (8). Всі розрахунки наведено в табл. 2.

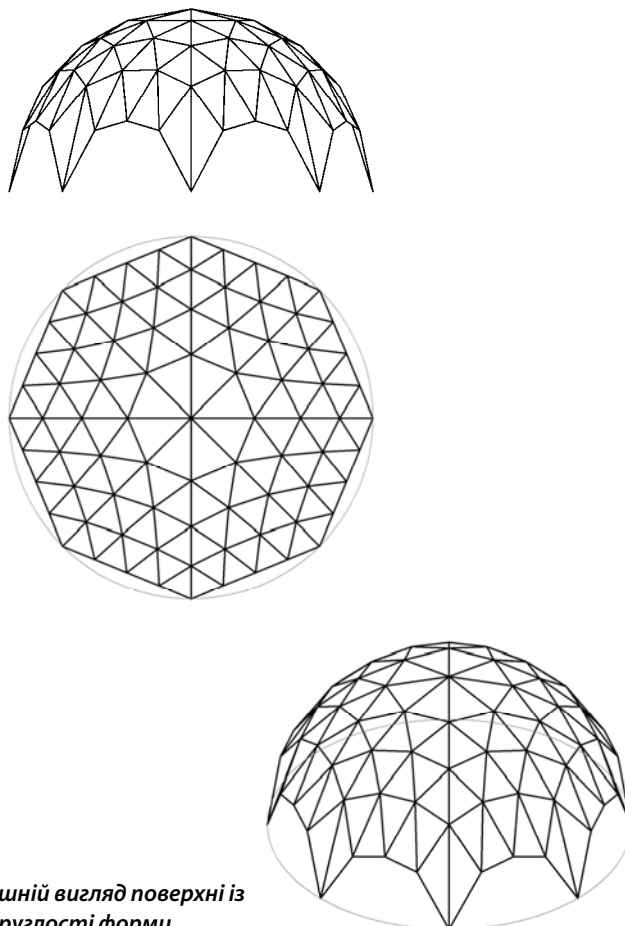
Таблиця 2

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=0$
$j=0$				$X=9.2678, Y=1.7680$ $Z=3.3139$	
$j=1$			$X=8.1685, Y=0.000$ $Z=5.7685, P=6.6893$	$X=8.5355, Y=3.5355$ $Z=5.7685, P=6.6893$	
$j=2$		$X=3.4819, Y=0.000$ $Z=9.3742, P=2.6569$	$X=7.2318, Y=1.8605$ $Z=6.6513, P=3.9315$	$X=7.2318, Y=1.8605$ $Z=3.8269$	
$j=3$	$X=3.4819, Y=0.000$ $Z=9.3742, P=2.6569$	$X=4.9779, Y=2.0619$ $Z=8.4243, P=2.5122$	$X=6.4292, Y=3.7980$ $Z=6.6514, P=3.9321$	$X=7.8033, Y=5.3033$ $Z=3.3141$	
$j=4$	$X=2.4621, Y=2.4621$ $Z=9.3742, P=2.6570$	$X=4.2509, Y=4.2509$ $Z=7.9912, P=2.6531$	$X=5.7760, Y=5.7760$ $Z=5.7685, P=6.6888$	$X=7.0711, Y=7.0711$ $Z=0.000$	$X=0.000, Y=0.000$ $Z=10.000, P=5.0064$
$j=5$	$X=0.000, Y=3.4819$ $Z=9.3742$	$X=2.0619, Y=4.9779$ $Z=8.4243$	$X=3.7980, Y=6.4292$ $Z=6.6514$	$X=5.3033, Y=7.8033$ $Z=3.3141$	
$j=6$			$X=1.8605, Y=7.2318$ $Z=6.6513$	$X=3.5355, Y=8.5355$ $Z=3.8269$	
$j=7$			$X=0.00, Y=8.1685$ $Z=5.7685$	$X=1.7678, Y=9.2678$ $Z=3.3139$	
$j=8$				$X=0.000, Y=10.000$ $Z=0.000$	



За значеннями таблиці 2 на рис. 4 побудований дискретний каркас поверхні обе-

ртання із властивостями сферичної поверхні і збереженням округлості форми.



*Рис.4 Проекції та зовнішній вигляд поверхні із збереженням округлості форми*

### **ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ**

У процесах дизайн-проекування часто виникає задача перенесення характерних рис відомої поверхні-прообразу на поверхню, що моделюється (округлість форми, зони сплюснення, композиційне поєднання зон позитивної гаусової кривин із зонами негативної гаусової кривини схожість форм ліній контуру і т. інш.). Приклади наведені у статті показують, що запропоно-

ваний спосіб дозволяє моделювати дискретні каркаси поверхонь із заданими параметрами, зберігаючи композиційні властивості заданої поверхні-прообразу.

Такий підхід дозволить архітектору або дизайнеру формально отримувати дискретні каркаси поверхонь, що формуються на довільно заданих контурах і відповідають різноманітним вимогам.

### **ЛІТЕРАТУРА**

1. Stessel, S.A. Zaimstvovanie prirodnyh printsipov formoobrazovaniya v parametricheskoy arhitekture [Tekst] / S. Stessel// Vektor nauki. – Tolyatti: TGU, 2015. – # 2 (32-1). – S. 52-57.

2. Abdyushev, A.A. Proektirovanie nepologih obolochek minimalnoy poverhnosti [Tekst] / A. Abdyushev, I. Miftahutdinov, P. Osipov // Stroitelnyie konstruksii zdaniya i sooruzheniya: Izvestiya KazGASU. – Kazan: KazGASU, 2009. – # 2 (12). – S. 86-92. [Elektronniy resurs] – Rezhim dostupu: \www/ URL: [http://izvestija.kgasu.ru/files/2\\_2009/Abdyushev\\_86\\_92.pdf](http://izvestija.kgasu.ru/files/2_2009/Abdyushev_86_92.pdf).
3. Samchuk, V.P. Formoutvorennaya diskretnih modeley hvilyastih poverhon pokrittya v arhitekturi: Monografiya. – Lutsk: SPD Gadyak Zhanna Volodimirivna, drukarni «Volinpollgraf»TM, 2013. – 188 s.
4. Ponomarov, V.A. Arhitekturnoe proektirovanie [Tekst] / V. Ponomarev// – M: Arhitektura-S, 2008. – 736 s.
5. Tabunschikov, Yu.A., Energoeffektivnyie zdaniya [Tekst] / Yu.A. Tabunschikov, M.M. Brodach, N.V. Shilkin, – M.: AVOK-PRESS, 2003. – 200s.
6. <http://esotericnews.ru/arhitekturnaya-forma-zdaniya-vozdejstvuet-na-psixiku-dnk-i-genom-cheloveka.html>

**Рецензент:** д.т.н., проф. Ванін В.В.  
НТУУ «Київський політехнічний інститут»