ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ЧАСТИЧНО НАБЛЮДАЕМЫХ ВЫХОДНЫХ КООРДИНАТАХ

УДК 62-50

МАРАСАНОВ Владимир Васильевич
д.т.н., профессор кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: методы исследования сложных динамических систем

ДЫМОВА Анна Олеговна
Старший преподаватель кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: методы исследования сложных динамических систем, принятие решений в условиях неопределенности

ДЫМОВ Владимир Степанович
к.т.н., доцент кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: методы исследования сложных динамических систем, оптимизация в телекоммуникационных системах

ВВЕДЕНИЕ

Задача нахождения оценок состояний динамических систем является довольно распространенной при проектировании оптимальных непрерывных и дискретных систем управления при их стохастическом и детерминированном рассмотрении. Решение задачи в стохастическом смысле нами рассмотрена в [1]. Она была основана на методах факторизации корреляционных матриц полностью наблюдаемых множеств выходных сигналов динамических систем и требует значительного числа допущений о свойствах матриц системы. Рассматриваем возможности решить отдельные задачи нахождения оценок и оптимальных управлений методом проектирования многомерных пространств на собственные подпространства. Предлагается рассмотреть их в порядке возрастающих сложностей решаемых задач. При исследовании динамических систем в отдельных случаях все выходные координаты системы допускают непосредственное измерение и наблюдение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для линейных систем, обладающих такими свойствами, формирование оптимального закона управления как функции координат состояния может производиться даже при наличии шумов измерения. Однако в инженерной практике очень часто не все координаты состояния допускают наблюдение и измерение (например скорость реакции в химических производствах) [2, 3]. В этих случаях оптимальный закон управления определяется как функция части наилучших оценок координат состояния, определяемых по измерениям выходных сигналов системы. Следовательно, проблема оптимального управления в более общей постановке включает в себя как проблему нахождения оптимальной оценки состояний системы, так и проблему оптимального управления.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для современной теории управления при описании системы характерно использование переменных состояния и применение методов проектирования, оптимизирующих ее движение управлений в пространстве возможных состояний.

Наиболее часто при проектировании систем управления используются следующие математические методы:

- вариационное исчисление;
- принцип максимума;
- динамическое программирование.

Во всех случаях конечной целью проектирования является определение оптимального закона управления или управляющей последовательности, доставляющей максимум или минимум заданному функционалу, характеризующему качество системы [2].

Общим указанных трех методов является использование вариационного исчисления: первый метод имеет непосредственное отношение к уравнениям Эйлера-Лагранжа, второй – к принципу Гамильтона, третий – к уравнениям Гамильтона-Якоби.

Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{dq_i}\right)-\frac{dL}{dq_i}=0\,, \tag{1}$$

где

$$L=L(\dot{q}_i,q_i)=T(\dot{q}_i,q_i)-V(q_i)\,; \tag{2}$$

L – лагранжиан;

q_i – обобщенные координаты.

Уравнение Лагранжа выводится из вариационного принципа Гамильтона: любая динамическая система будет двигаться под действием консервативных сил из любого начального состояния таким образом, чтобы минимизировать среднюю по времени разность между кинетической $T(\dot{q}_i,q_i)$ и потенциальной $V(q_i)$ энергиями. Функцию, выражающую полную энергию системы через обобщенные координаты q и импульсы p, называют функцией Гамильтона

$$H(\vec{p},\vec{q})=T_p+V\,; \tag{3}$$

и

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial q_i};\quad \frac{\partial q_i}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\,; \tag{4}$$

каноническое уравнение Гамильтона.

Рассмотрим в обобщенном подходе решение этих задач на основе метода проектирования пространств на подпространства и оценим трудности и преимущества этого подхода [4].

Пусть в унитарном или эвклидовом пространстве R дан произвольный вектор $\vec{x}$ и некоторое подпространство S с базисом $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_m$. Вектор $\vec{x}$ можно представить (и притом единственным способом) в виде суммы

$$\vec{x}=\vec{x}_S+\vec{x}_N\,,\quad \vec{x}_S\in S,\quad \vec{x}_N\perp S \tag{5}$$

где $\vec{x}_S$ - ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на подпространство S.

Под ортогональностью $\perp$ к подпространству S понимается ортогональность ко всем векторам из этого подпространства. Поясним это рисунком 1.

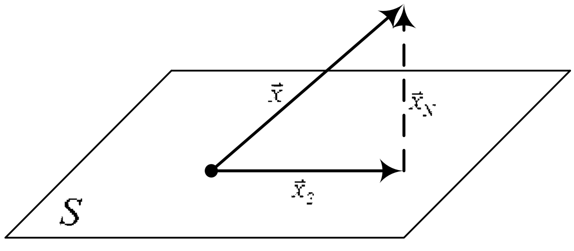

Рис. 1 – Проектирование $\vec{x}$ на подпространство S [4]

Для установления разложения (5) представим $\vec{x}_S$ в виде

$$\vec{x}_S = C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2 + \ldots + C_m\vec{x}_m, \quad (6)$$

где C_1, C_2, …, C_m – некоторые комплексные или действительные (для эвклидова пространства) числа. Для рис.1 $m = 2$.

Для определения этих чисел исходим из соотношений

$$(\vec{x} - \vec{x}_S, \vec{x}_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m \quad (7)$$

Подставим в (7) вместо $\vec{x}_S$ его выражение из (6)

$$\begin{cases} (\vec{x}_1\,\vec{x}_1)C_1 + \ldots + (\vec{x}_m\,\vec{x}_1)C_m + (\vec{x}\,\vec{x}_1)\,(-1) = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ (\vec{x}_1\,\vec{x}_m)C_1 + \ldots + (\vec{x}_m\,\vec{x}_m)C_m + (\vec{x}\,\vec{x}_m)(-1) = 0 \\ \vec{x}_1C_1 + \ldots + \vec{x}_mC_m + \vec{x}_S\,(-1) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим эту систему равенств как систему линейных однородных уравнений, имеющих ненулевое решение C_1, C_2, …, C_m, -1, приравняем ее определитель нулю (предварительно транспонировав его относительно главной диагонали)

$$\begin{vmatrix} (\vec{x}_1\,\vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x}_1\,\vec{x}_m) & \vec{x}_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\vec{x}_m\,\vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x}_m\,\vec{x}_m) & \vec{x}_m \\ (\vec{x}\,\vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x}\,\vec{x}_m) & \vec{x}_S \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Выделяя из этого определителя член, содержащий $\vec{x}_S$, получим

$$\vec{x}_S = \frac{\begin{vmatrix} & & \vec{x}_1 \\ & \Gamma & \cdots \\ & & \vec{x}_m \\ (\vec{x}\,\vec{x}_1) & \cdots \; (\vec{x}\,\vec{x}_m) & 0 \end{vmatrix}}{\Gamma} \quad (10)$$

где $\Gamma = \Gamma(\vec{x}_1\,\vec{x}_2 \ldots \vec{x}_m)$ - определитель Грама для векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ (в силу независимости этих векторов $\Gamma \neq 0$).

Из (5)

$$\vec{x}_N = \vec{x} - \vec{x}_S = \frac{\begin{vmatrix} & & \vec{x}_1 \\ & \Gamma & \cdots \\ & & \vec{x}_m \\ (\vec{x}\,\vec{x}_1) & \cdots \; (\vec{x}\,\vec{x}_m) & 0 \end{vmatrix}}{\Gamma} \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) выражают проекцию $\vec{x}_S$ вектора $\vec{x}$ на подпространство S, наблюдаемых на выходе (измеримых на выходе векторов параметров протекающего в системе процесса), по линейным комбинациям которых будем находить (восстанавливать) оценки векторов пространства состояний системы. [4].

Обозначим $\vec{y}$ - произвольный вектор множества векторов в S, а $\vec{x}$ - произвольный вектор в R. Если векторы построить из начала координат, то $|\vec{x} - \vec{y}|$ и $|\vec{x} - \vec{x}_S|$ будут соответственно равны величинам наклонной и высоты, проведенной из конца вектора $\vec{x}$ к поверхности S (рис.1). Поэтому, записывая, что высота короче наклонной, будем иметь $h = |\vec{x} - \vec{x}_S| \le |\vec{x} - \vec{y}|$ (знак равенства будет лишь при $\vec{y} = \vec{x}_S$). Таким образом, среди всех векторов $\vec{y} \in S$ вектор $\vec{x}_S$ наименее уклоняется от заданного вектора $\vec{x} \in R$. Величина $h = \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}_S)(\vec{x} - \vec{x}_S)}$ заданного вектора $\vec{x} \in R$ является квадратичной погрешностью при приближении $\vec{x} \approx \vec{x}_S$.

Применим этот подход к решению задачи управления многомерной системой с координатами недоступными для наблюдения. В этих случаях только выходные сигналы могут быть измерены непосредственно.

Измеряемые координаты относят к выходным переменным и обозначают через $y_1, y_2, \ldots, y_p$, считая их компонентами вектора $\vec{y}$.

При решении задачи будем считать, что выходные переменные являются линейными функциями координат состояния $\vec{x}(k)$ и связаны с последними линейным преобразованием

$$\vec{y}(k) = \mathbf{M}\vec{x}(k), \qquad (12)$$

где $\vec{x}$ - *n*-мерный вектор;

$\vec{y}$ - *p*-мерный вектор;

M – матрица размера $p \times n$ с $p \le n$.

В том случае, когда размерность вектора выхода меньше вектора состояния, матрица **M** является прямоугольной и не имеет обратной матрицы. По смыслу эта матрица является матрицей выхода (матрицей измеряемых переменных) [2, 3].

При исследовании возможности оптимального управления будем исходить из того, что система описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением [1, 2, 3].

$$\vec{x} = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \mathbf{D}(t)\vec{m}(t) + \vec{n}(t), \qquad (13)$$

где $\vec{x}(t)$ - *n*-мерный вектор, представляющий переменные состояния;

$\vec{m}(t)$ - *k*-мерный вектор, представляющий управляющие воздействия;

$\vec{n}(t)$ - *s*-мерный вектор, представляющий внешние случайные воздействия;

$\mathbf{A}(t)$ - матрица коэффициентов процессов, протекающих в системе;

$\mathbf{D}(t)$ - матрица управления.

Решение уравнения (13) имеет вид

$$\vec{x}(t) = \varphi(t,t_0)\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[\varphi(t,\tau)\mathbf{D}(\tau)\vec{m}(\tau) + \vec{n}(\tau)\right] d\tau, \qquad (14)$$

где $\varphi(t, t_0)$ – матрица перехода, удовлетворяющая однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi(t,t_0)}{dt} = \mathbf{A}(t)\varphi(t,t_0) \qquad (15)$$

и соотношению

$$\varphi(t_0,t_0) = \mathbf{I}, \qquad (16)$$

где **I** – единичная матрица.

В дискретных динамических системах с цифровым управлением $m(\tau) = m(kT)$ для $kT \le \tau \le (k+1)\,T$ решение в дискретной форме дается уравнением переходных состояний

$$\vec{x}(k+1) = \varphi(k)\vec{x}(k) + G(k)\vec{m}(k) + \vec{u}(k), \qquad (17)$$

где

$$\varphi(k) = \varphi((\overline{k+1})T, kT), \qquad (18)$$

$$G(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \varphi((\overline{k+1})T, \tau)\mathbf{D}(\tau)d\tau, \qquad (19)$$

$$\vec{u}(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \varphi((k+1)T, \tau)n(\tau)d\tau, \qquad (20)$$

Принцип построения оптимальных управлений динамической системы определяется также показателем качества, в требованиях которого учитываются ограничения, при соблюдении которых гарантируется физическая реализуемость оптимального управления динамической системой. При реализации цифровых систем управления исходят из показателя качества, определяемого квадратичной формой. [2, 3].

$$J_N = \sum_{k=1}^{N} \left\{ [\vec{x}^d(k) - \vec{x}(k)]'\mathbf{Q}(k)[\vec{x}^d(k) - \vec{x}(k)] + \lambda\vec{m}'(k-1)\mathbf{H}(k-1)\vec{m}(k-1) \right\}, \qquad (21)$$

где $\vec{x}^d(k)$ - вектор желаемого состояния;

Q, **H** – положительно определенные симметрические матрицы.

Первое слагаемое в (21) дает отклонение процесса от заданного в любой момент времени *kT*, второе слагаемое учитывает ограничение энергии управляющего воздействия.

При соответствующем выборе элементов матрицы **Q** любую координату состояния процесса можно сделать более важной и эффективной для оценки качества системы по сравнению с другой переменной. Аналогично, путем выбора элементов матрицы **H** можно наложить желаемые ограничения на энергию управляющих воздействий. Оптимальное управление заключается в определении последовательности векторов управления $\vec{m}'(0),\vec{m}'(1),\ldots,\vec{m}'(N-1)$, минимизирующих ожидаемое среднее значение показателя качества [2].

Для линейных систем, характеризуемых уравнением переходных состояний (17), вектор реализуемого управления, минимизирующего ожидаемое среднее значение показателя качества дается формулой [2, 3]:

$$\hat{m}^\circ(k/k) = \mathbf{B}(N-k)\hat{\vec{x}}(k/k) \quad (22)$$

где **B**(*N-k*) – матрица обратной связи, элементами которой являются коэффициенты обратной связи;

$\hat{\vec{x}}(k/j)$ – оценка вектора состояния $\vec{x}(k)$, использующая измеренные значения

$$\vec{y}(j),\vec{y}(j-1),\ldots,\vec{y}(0) \quad (23)$$

вектора выхода, оптимальная в том смысле, что ожидаемое среднее значение

$$E\left\{[\vec{x}(k)-\hat{\vec{x}}(k/j)]'[\vec{x}(k)-\hat{\vec{x}}(k/j)]\right\} \quad (24)$$

минимально, где согласно формулы (5) и рис. 1 $\hat{\vec{x}}(k/k)$ это ортогональная проекция вектора состояния на подпространство *Y*(*j*). Поэтому

$$\vec{x}(k) = \hat{\vec{x}}(k/k) + \tilde{\vec{x}}(k/k), \quad (25)$$

Y(*j*) является подпространством пространства $\vec{X}(k)$ - пространства векторов состояния динамической системы.

Согласно (25) вектор оптимального управления $\hat{m}^\circ(k/k)$ можно записать в виде суммы его ортогональной проекции $\hat{m}^\circ(k/k)$ на подпространство *Y*(*j*) и его нормальной компоненты $\overrightarrow{\tilde{m}^\circ}(k/k)$. С учетом формулы (5) и рис. 1 по аналогии можно записать

$$\overrightarrow{\hat{m}^\circ}(k/k)+\overrightarrow{\tilde{m}^\circ} = \mathbf{B}(N-k)\hat{\vec{x}}(k/k)+\mathbf{B}(N-k)\tilde{\vec{x}}(k/k). \quad (26)$$

Используя основные свойства ортогональной проекции [4], находим

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\hat{m}^\circ}(k/k) &= \mathbf{B}(N-k)\hat{\vec{x}}(k/k)\\ \overrightarrow{\tilde{m}^\circ}(k/k) &= \mathbf{B}(N-k)\tilde{\vec{x}}(k/k)\end{aligned} \quad (22)^{/}$$

Ортогональная проекция $\overrightarrow{\hat{m}^\circ}(k/k)$, которая является наилучшей оценкой для $\vec{m}^\circ(k)$, связана линейно с наилучшей оценкой для $\vec{x}(k)$. Нормальная компонента вектора $\overrightarrow{\tilde{m}^\circ}(k)$ представляет собой ошибку оценки. Оценка $\vec{m}^\circ(k)$ физически реализуема, так как является функцией оценки $\hat{\vec{x}}(k/k)$, которая может быть определена по измерениям выходных сигналов.

Покажем теперь, что используя принцип оптимальности и когда вместо вектора оптимального управления $\vec{m}^\circ(k)$ используется его наилучшая оценка и качество системы определяется по минимуму среднего значения J_N выражение (22) описывает оптимальный закон управления [5]. При доказательстве этого используется симметричность матриц **Q** и **H** [4, 5]. Обозначим минимум ожидаемого среднего значения J_N через

$$f_N[\vec{x}(0)] = \min_{\vec{m}(j)} EI_N, \quad j = 1,2,\ldots,N \qquad (27)$$

Очевидно, что когда $\vec{m}(j) = \vec{m}^\circ(j)$, то $EI_N = f_N$ и $EI_N - f_N = 0$. Однако, когда $\vec{m}(k) = \vec{m}^\circ(k)$, то $EI_N - f_N > 0$, т.е. вводится ошибка, так как по определению f_N является минимумом для EI_N. Следовательно, задача состоит в определении для $\vec{m}^\circ(k)$ оценки, минимизирующей ошибку $EI_N - f_N$, обусловленную нереализуемостью $\vec{m}^\circ(k)$. Эта оценка называется наилучшей оценкой и она дается ортогональной проекцией $\vec{\hat{m}}(k/k)$ и поэтому уравнение (22) определяет оптимальный закон управления для процессов с координатами, недоступными для измерения.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Задача сводится к нахождению оценок для многошагового процесса, в результате которого последовательно находятся оценки для всех шагов и в каждом последующем шаге используются найденные оптимальные решения на предыдущем шаге, т.е. реализуется принцип динамического программирования [5].

Проекционные методы исследования позволяют одновременно и независимо решать задачу оценивания векторов состояния динамической системы и нахождения оптимальных управляющих последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Marasanov V.V., Zabytovskaja O.I., Dymova A.O. Prognozirovanie struktury dinamicheskikh sistem. Vestnik KHNTU № 1 (44), s. 292-302.
2. Sejdzh EH.P., Uajt CH.S. Optimal`noe upravlenie sistemami. T.III. - M.: Radio i svjaz`, 1982.
3. JUlius Tu. Sovremennaja teorija upravlenija. - M.: «Mashinostroenie», 1971.
4. Gantmakher F.R. Teorija matric. - M.: Nauka, 1988
5. Bellman R. Dinamicheskoe programmirovanie. - M.: IL, 1960.

Рецензент: д.т.н., проф. Рудакова А.В.
Херсонский национальный технический университет