РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В СТРОКАХ ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ И ЕГО ГАУССОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

УДК 519.14

АБРАМОВ Геннадий Серафимович
к. ф.-м., доцент кафедры высшей математики и математического моделирования ХНТУ
Научные интересы: математическое моделирование диффузионных процессов в многокомпонентных системах, процессы внутреннего окисления, моделирование сложных физических и технических систем.

АБРАМОВ Илья Михайлович
Студент факультета компьютерных наук
Харьковского Национального университета им. В. Н. Каразина.
Научные интересы: распределение чисел в строках треугольника Паскаля и его нормальное приближение.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Известно, что треугольник Паскаля составляют так называемые биномиальные коэффициенты. Биномиальные и триномиальные коэффициенты часто встречаются при решении комбинаторных, математических и физических задач, а также в различных технических приложениях. Так, во многих задачах физической и химической кинетики, при исследовании вероятностных процессов, а также в задачах теории информации часто возникает необходимость вычислять различные конфигурации на множествах, в частности числа сочетаний C_n^m, то есть биномиальные коэффициенты. Чаще всего в этих случаях для вычисления факториалов используют известную приближённую формулу Стирлинга, которая даёт достаточно грубое приближение. Поэтому задача отыскания более точного приближения является актуальной.

Известно также, что асимптотикой биномиального распределения является нормальное (гауссовское) распределение. Однако оно реализуется с хорошей точностью лишь для достаточно больших номеров строк, в пределе при $n \to \infty$. Конкретные же сведения о «кинетике» этого приближения; о том, каким образом изменяются числовые характеристики аппроксимирующего нормального распределения при увеличении номера строки, отсутствуют.

АНАЛИЗ ПУБЛИКАЦИЙ

Треугольнику Паскаля посвящена довольно обширная литература [3-10], в которой выделяются две фундаментальные монографии [3, 4], где биномиальным коэффициентам посвящены отдельные главы. В книге Р. Грэхема, Д. Кнута и О. Паташника «Конкретная математика. Основание информатики» [3] в главе «Биномиальные коэффициенты» рассматриваются доказательства многочисленных тождеств (часто совершенно удивительных[1]) и оригинальные способы вычисления различных частных сумм. В монографии В. Феллера «Введение в теорию вероятностей и её приложения» [4] рассматривается нормальное приближение для биномиального распределения, однако погрешность результатов (1-2%) нельзя признать удовлетворительной.

ФОРМУЛИРОВКА ЦЕЛЕЙ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целями данной работы, являющейся продолжением исследований, начатых в работах [1,2], было рассмотрение асимптотики приближения распределения чисел в строках треугольника Паскаля к нормальному; вычисление нормированных моментов чётных порядков и изучение асимптотики их изменения при увеличении номера строки; получение высокоточных приближений для центральных элементов строк треугольника Паскаля и их использование для вычисления триномиальных (мультиномиальных) коэффициентов; рассмотрение отклонений плотности паскалевского распределения от гауссовского в окрестности центральных элементов

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В предыдущей работе авторов [1], целью которой было установление связи распределения чисел в строках треугольника Паскаля с нормальным (гауссовским) распределением, были решены следующие задачи: определены числовые характеристики нормального приближения для распределения чисел в строках треугольника Паскаля; выявлены зависимости этих параметров от номера строки; выполнено сравнение распределения чисел в строках треугольника Паскаля с нормальным приближением и рассмотрена асимптотика приближения паскалевского распределения к нормальному при увеличении номера строки.

Математическое ожидание ($\bar{x}$) и дисперсию (S^2) распределения чисел в строках треугольника Паскаля вычисляли следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i;$$

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \bar{x}^2$$

,

где x_i – номер позиции (элемента) в строке треугольника Паскаля;

n_i – значение элемента на i-ой позиции в строке треугольника Паскаля;

$k = n+1$ – количество элементов в n-ой строке треугольника Паскаля;

N – сумма всех элементов в данной строке треугольника Паскаля: $N=2^n$

Математическое ожидание $\bar{x}$, дисперсия S^2 и среднеквадратичное отклонение S от номера строки треугольника Паскаля зависит следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{n+2}{2}; \qquad S^2 = \frac{n}{4}; \qquad S = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

Для соответствующих значений матожидания и среднеквадратичного отклонения построены гауссовские распределения и выполнено сравнение полученных гауссовских кривых с фактическим частотным распределением в соответствующих строка треугольника Паскаля. Для этого были вычислены относительные частоты распределения чисел в строках треугольника Паскаля (значение данного элемента строки делилось на сумму всех чисел в строке – 2^n).

[1]Обращает на себя внимание замечательное свойство произведений центральных элементов чётных строк треугольника Паскаля: $\sum_k C_{2k}^{k} \cdot C_{2(n-k)}^{n-k} = 4^n \qquad (n \ge 0)$

На рис. 1 приведены соответствующие эмпирические распределения (основанные на вычисленных частотах) в сравнении с теоретическими распределениями (гауссовские кривые). Видно, что с увеличением номера строки распределение чисел в строках треугольника Паскаля приближается к нормальному распределению. Это даёт основание считать, что нормальное приближение является хорошей аппроксимацией распределения в n-той строке треугольника Паскаля (очевидно, тем лучшей, чем больше номер строки n):

$$x_n \in \mathrm{N}(\frac{n+2}{2}; \frac{\sqrt{n}}{2})$$

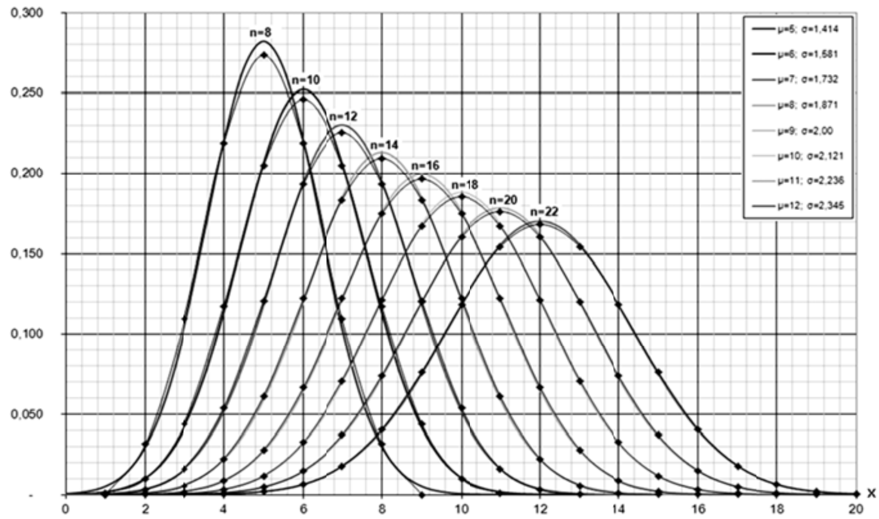

Рис.1 Сравнение теоретических гауссовских кривых и эмпирических распределений в строках треугольника Паскаля (с 8-ой по 22-ю).

На рис. 1 видны различия между распределением в строке треугольника Паскаля и нормальным распределением (которое тем заметней, чем меньше номер строки): максимальное значение распределений в строках треугольника Паскаля чуть меньше максимума на соответствующих гауссовских кривых.

Известно, что искажения нормального распределения связаны с моментами третьего и четвёртого порядков (соответствующие коэффициенты называются асимметрией и эксцессом). Асимметрия, описывающая искажения гауссовской кривой вдоль оси абсцисс, в нашем случае отсутствует, в силу симметричности чисел в строках треугольника Паскаля. (Отсюда следует, что все моменты нечётных порядков для строк треугольника Паскаля равны нулю). Следовательно, для описания наблюдаемых различий паскалевского распределения от гауссовского приближения, необходимо вычислять значения эксцесса (связанного с моментом четвёртого порядка), и, вообще говоря, моменты чётных порядков (4-го, 6-го, 8-го и т. д.). Очевидно, что вычисляемые значения эксцесса должны быть отрицательными (т. к. «уплощение» гауссовской кривой характеризуется отрицательным значением эксцесса), при этом, с возрастанием номера строки значение эксцесса должно асимптотически приближаться к нулю.

Эксцесс (E_x) вычисляли с помощью центрального момента 4-го порядка - μ^4:

$$\mu^4 = \frac{\sum_{i=1}^{n+1}(x_i - \overline{x})^4 n_i}{\sum_{i=1}^{n+1} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1}(x_i - \overline{x})^4 n_i}{2^n} \qquad E_x = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3$$

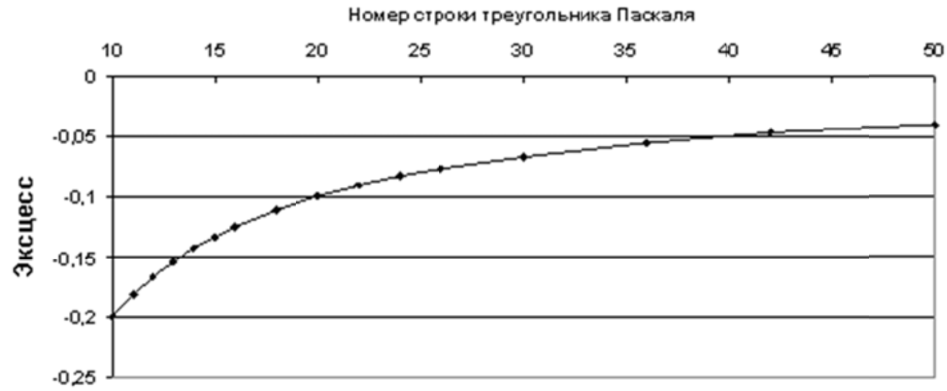

Рис. 2 Значение эксцесса для распределений в строках треугольника Паскаля

На рис. 2 видно, что значения эксцесса отрицательны и с увеличением номера строки асимптотически приближаются к нулю, что свидетельствует о приближении распределения в строках с большим номером к гауссовскому.

В работе рассматривались также моменты 6-го и 8-го порядков распределения в строках треугольника Паскаля.

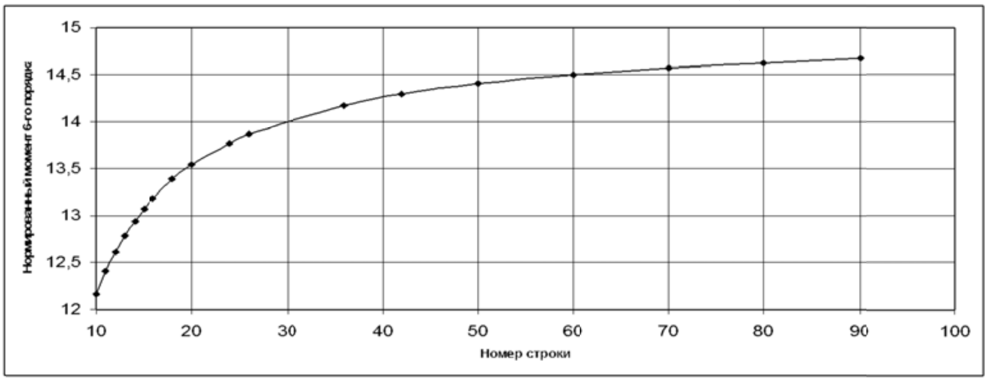

Рис. 3 График зависимости нормированного момента 6-го порядка от номера строки

На рис. 3 представлена зависимость нормированного момента 6-го порядка $\frac{\mu^6}{\sigma^6}$ от номера строки, а на рис. 4 представлена зависимость нормированного момента 8-го порядка $\frac{\mu^8}{\sigma^8}$ от номера строки. Для нормального распределения значение нормированного момента 6-го порядка равно 15, а 8-го порядка равно 105. Видно, что при увеличении номера строки значения нормированного момента 6-го порядка асимптотически приближаются к 15, а 8-го порядка к 105, со стороны меньших значений, то есть распределение в строках треугольника Паскаля нормализуется и с точки зрения моментов 6-го и 8-го порядков (по-видимому, это будет справедливо и для последующих чётных моментов).

На рис. 3 представлена зависимость нормированного момента 6-го порядка

$\frac{\mu^6}{\sigma^6}$ от номера строки, а на рис. 4 представлена зависимость нормированного момента 8-го порядка $\frac{\mu^8}{\sigma^8}$ от номера строки. Для нормального распределения значение нормированного момента 6-го порядка равно 15, а 8-го порядка равно 105. Видно, что при увеличении номера строки значения нормированного момента 6-го порядка асимптотически приближаются к 15, а 8-го порядка к 105, со стороны меньших значений, то есть распределение в строках треугольника Паскаля нормализуется и с точки зрения моментов 6-го и 8-го порядков (по-видимому, это будет справедливо и для последующих чётных моментов).

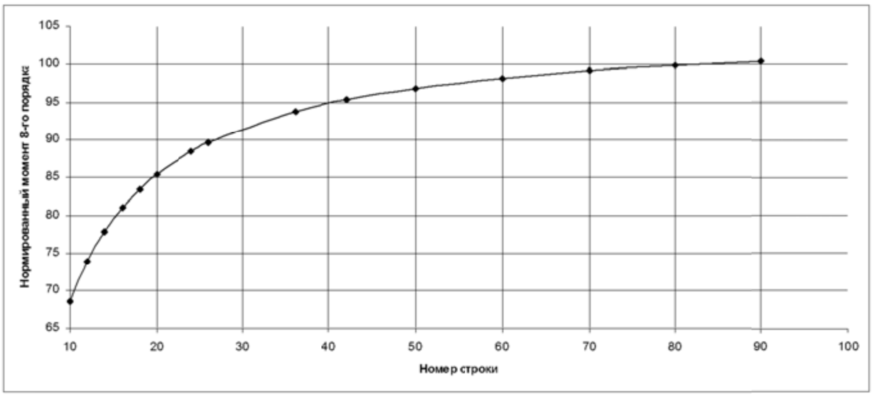

Рис. 4 График зависимости нормированного момента 8-го порядка от номера строки

Таким образом, гауссовское распределение является весьма хорошей аппроксимацией для паскалевского распределения в строках треугольника. Плотность аппроксимирующего гауссовского распределения в *n*-ой строке треугольника имеет следующий вид:

$$f_n(x) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} exp(-\frac{(x-\frac{n+2}{2})^2}{\frac{2n}{4}}) = \qquad (1)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi n}} exp(-\frac{2(x-\frac{n+2}{2})^2}{n})$$

В работе [1] с использованием формулы (1) проведены приближённые вычисления элементов строк треугольника Паскаля. Число сочетаний $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{m}$ в нашем случае является (m+1)-м элементом n-ой строки треугольника (т. к. отсчёт величины *x* мы начали не с нуля а с единицы). Тогда число сочетаний можно вычислить по следующей приближённой формуле:

$$C_n^m \approx 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}} exp(-\frac{(2m-n)^2}{2n}) \qquad (2)$$

Проще всего с помощью этой формулы вычисляется значение центральных элементов чётных строк треугольника, когда *m=n/2*:

$$C_n^{m=\frac{n}{2}} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi m}} \text{ или } C_{2n}^n \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \qquad (3)$$

Можно показать, что приближение (3) соответствует вычислению числа сочетаний, если факториалы вычислять по формуле Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \qquad (4)$$

В работе [1] проведено сравнение точных значений центральных элементов чётных строк треугольника и их приближённых значений, вычисленных с помощью гауссовской аппроксимации (табл. 1):

Таблица 1

Сравнение точных значений и гауссовской оценки центральных элементов чётных строк

Номер строки n	Точное значение $C_n^{m=\frac{n}{2}} = \frac{n!}{(m!)^2}$	Приближённое значение $C_n^{m=\frac{n}{2}} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi m}}$	Относительная ошибка ε, %
30	$1{,}551175 \cdot 10^{8}$	$1{,}564153 \cdot 10^{8}$	0,84
50	$1{,}264106 \cdot 10^{14}$	$1{,}270442 \cdot 10^{14}$	0,50
60	$1{,}182646 \cdot 10^{17}$	$1{,}187583 \cdot 10^{17}$	0,42
100	$1{,}008913 \cdot 10^{29}$	$1{,}011439 \cdot 10^{29}$	0,25
200	$9{,}054851 \cdot 10^{58}$	$9{,}066177 \cdot 10^{58}$	0,125
400	$1{,}029525 \cdot 10^{119}$	$1{,}030169 \cdot 10^{119}$	0,0625
800	$1{,}88042442 \cdot 10^{239}$	$1{,}88101214 \cdot 10^{239}$	0,03125

Из данных табл. 1 следует, что относительная ошибка (разность между приближённым и точным значением, отнесенная к точному значению) убывает с возрастанием номера строки по обратно пропорциональной зависимости, что позволяет записать выражение для относительной ошибки:

$$\frac{\frac{2^n}{\sqrt{\pi m}} - C_n^{m=n/2}}{C_n^{m=n/2}} = \frac{0,25}{n}, \qquad (5)$$

откуда следует более точное приближение:

$$C_n^{m=n/2} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi m}} \cdot \frac{n}{n+0,25} \qquad (6)$$

Сравним точное значение с приближением (6) (табл. 2):

Таблица 2

Сравнение точных значений и приближения (6) для центральных элементов чётных строк треугольника Паскаля

Номер строки *n*	Точное значение $C_n^{m=\frac{n}{2}} = \frac{n!}{(m!)^2}$	Приближённое значение (6) $C_n^{m=n/2} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi m}} \cdot \frac{n}{n+0,25}$	Относительная ошибка ε_1, %
30	$1{,}551175 \cdot 10^{8}$	$1{,}551226 \cdot 10^{8}$	0,0033
50	$1{,}264106 \cdot 10^{14}$	$1{,}264121 \cdot 10^{14}$	0,0012
60	$1{,}182646 \cdot 10^{17}$	$1{,}182655 \cdot 10^{17}$	0,0008
100	$1{,}0089134 \cdot 10^{29}$	$1{,}0089166 \cdot 10^{29}$	0,0003
200	$9{,}0548515 \cdot 10^{58}$	$9{,}0548578 \cdot 10^{58}$	0,00007
400	$1{,}029525 \cdot 10^{119}$	$1{,}029525 \cdot 10^{119}$	$\varepsilon_1 = \frac{3}{n^2}\%$
800	$1{,}88042442 \cdot 10^{239}$	$1{,}88042442 \cdot 10^{239}$	

Видно, что относительная ошибка этого приближения ε_1 обратно пропорциональна квадрату номера строки, что даёт возможность сформулировать ещё более точное приближение:

$$C_n^{m=n/2} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi m}} \cdot \frac{n}{n+0,25} \cdot \frac{n^2}{n^2+0,03} \qquad (7)$$

или

$$C_{2n}^{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{n}{n+0,125} \cdot \frac{n^2}{n^2+0,0075} \qquad (8)$$

Точность этого приближения настолько высока, что даже для небольших *n* она даёт очень хорошую оценку. Так, число сочетаний C_{20}^{10}=184756 , а формулы (7-8) дают результат 184755,5; т. е. относительная ошибка составляет 0,00027%.

Формула (8) может быть записана в виде:

$$C_{2n}^{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{0,125}{n}+\frac{0,0075}{n^2}+\frac{0,0009375}{n^3}} \right) \qquad (9)$$

Имея достаточно точные значения центрального элемента чётной строки треугольника Паскаля можно легко вычислить и остальные элементы строки:

$$C_{2n}^{n\pm k} = C_{2n}^{n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1-k}{n+k}, \qquad (10)$$

или, в более компактной форме,

$$C_{2n}^{n\pm k} = C_{2n}^{n} \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{n+i} \qquad (11)$$

Выражение (8) позволяет предложить следующую рекуррентную формулу для вычисления факториалов:

$$(2n)! = \frac{4^n (n!)^2}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{n}{n+0,125} \cdot \frac{n^2}{n^2+0,0075} \qquad (12)$$

или

$$(2n)! = \frac{4^n (n!)^2}{\sqrt{\pi n}} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{0,125}{n}+\frac{0,0075}{n^2}+\frac{0,0009375}{n^3}} \right) \qquad (13)$$

Следуя [3], покажем, что с помощью биномиальных коэффициентов можно вычислить триномиальные коэффициенты, а именно: триномиальные коэффициенты могут быть выражены через произведение биномиальных коэффициентов.

$$C_n^m C_m^k = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} \qquad (14)$$

Переобозначив переменные, получим:

$$C_n^m C_m^k = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}, \qquad (15)$$

где *n= a+b+c;*
k=a;
b=m-k;
c=n-m;

Таким образом, произведение биномиальных коэффициентов $C_n^m C_m^k$ есть не что иное, как триномиальный коэффициент, который появляется в триномиальной теореме:

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0 \le a,b,c \le n \\ a+b+c=n}} \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} x^a y^b z^c = \sum_{\substack{0 \le a,b,c \le n \\ a+b+c=n}} C_n^{b+a} C_{b+a}^{a} x^a y^b z^c \qquad (16)$$

Учитывая следующее равенство для произведений биномиальных коэффициентов

$$C_n^m C_m^k = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = C_n^k C_{n-k}^{m-k} \qquad (17)$$

триномиальные коэффициенты можно представить в другой форме, несколько более удобной для суммирования:

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0\le a,b,c\le n\\ a+b+c=n}} \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} x^a y^b z^c = \sum_{\substack{0\le a,b,c\le n\\ a+b+c=n}} C_n^a C_{b+c}^b x^a y^b z^c \qquad (18)$$

Обобщением биномиальных и триномиальных коэффициентов служат мультиномиальные коэффициенты, которые также могут быть представлены в виде произведения соответствующего количества биномиальных коэффициентов:

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_m)!}{a_1!\,a_2!\ldots a_m!} = C_{a_1+a_2+\ldots+a_m}^{a_2+a_3+\ldots+a_m} \cdot \ldots \cdot C_{a_{m-1}+a_m}^{a_m} \qquad (19)$$

Таким образом, имея достаточно точное выражение для биномиальных коэффициентов можно вычислять и триномиальные коэффициенты и, в общем случае, мультиномиальные коэффициенты.

Используя предлагаемое нами более точное приближение для биномиальных коэффициентов можно значительно повысить точность получаемых результатов, там, где раньше вынуждены были ограничиваться весьма приближёнными, как при использовании формулы Стирлинга, которая, как мы показали, даёт достаточно грубое приближение.

Рассмотрим более детально отклонения распределения чисел в строках треугольника Паскаля от аппроксимирующего гауссовского распределения в окрестности центральных элементов.

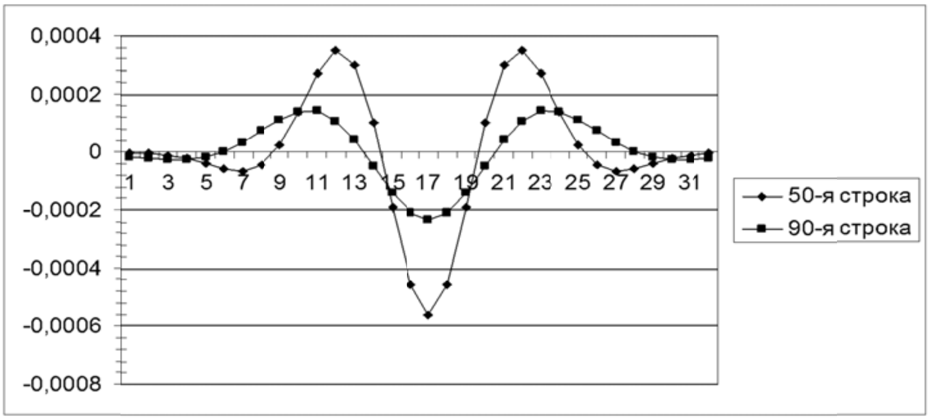

Рис. 5 Графики отклонений значений плотности распределений в строках треугольника Паскаля от нормального распределения в окрестности центральных элементов для 50-ой и 90-ой строк

На рис. 5 представлены графики отклонений значений плотности распределений в строках треугольника Паскаля от нормального распределения в окрестности центральных элементов для 50-ой и 90-ой строк.

Видно, что если для центральных элементов строк эта разность отрицательна (паскалевское распределение «приплюснуто» относительно гауссовского), то в ближайшей окрестности наблюдается обратная ситуация – плотность паскалевского распределения больше, чем плотность гауссовского распределения. Дальше, с удалением от центральных элементов снова наблюдается отрицательная разность, однако этот «волнообразный» процесс быстро затухает и разность асимптотически приближается к нулю.

Видно также, что для строки с более высоким номером амплитуда колебаний меньше по сравнению с распределением в строке с меньшим номером, то есть с возрастанием номера строки идёт сглаживание (затухание) колебаний плотности паскалевского распределения относительно гауссовского и с точки зрения их амплитуды.

На рис. 6-7 представлены графики отклонений плотности распределений в строках треугольника Паскаля для n от 10-ти до 40-ка включительно.

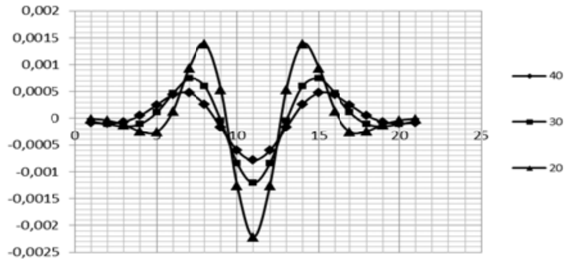

Рис. 6 Графики отклонений значений плотности распределений в строках треугольника Паскаля от нормального распределения в окрестности центральных элементов для 20-й, 30-й и 40-й строк.

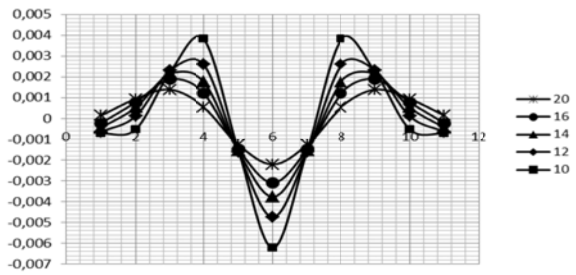

Рис. 7 Графики отклонений значений плотности распределений в строках треугольника Паскаля от нормального распределения в окрестности центральных элементов для строк от 10-й до 20-ой.

В работе выполнено численное интегрирование (методом Симпсона) плотности распределения в строках треугольника Паскаля. Для строк с номерами n=50 и n=90 получены значения, которые с высокой точностью можно считать единицей (0,9999998), следовательно распределение в этих строках треугольника Паскаля удовлетворяет условию нормировки на единицу, которое предъявляется к плотности распределения ($\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$). В связи с этим можно предложить **следующую гипотезу**: возможно, в некоторых тонких физических или физико-химических вероятностных процессах работает именно распределение Паскаля, но поскольку различие между паскалевским и его аппроксимирующим гауссовским распределением в абсолютном значении очень мало (от 0,0001 до 0,01), то это различие (волнообразное отклонение в окрестностях центральных элементов), в соответствующих экспериментах может быть незаметным. Очевидно, в реальных экспериментах значения плотности распределения определяются со значительно большей погрешностью, чем 0,0001, и даже 0,001. Однако, отклонения порядка 0,01 уже могут быть замечены: если бы усовершенствование техники и методического обеспечения эксперимента позволили бы иметь погрешность на уровне указанной, то, возможно, в некоторых тонких вероятностных экспериментах удалось бы заметить отклонение от гауссовской кривой и показать, что, имеет место именно распределение Паскаля там, где традиционно считается, что работает нормальное распределение.

Из рис. 7 видно, что волнообразный процесс в окрестности центральных элементов для строк с небольшим номером характеризуется большей амплитудой: если на рис. 5 это различие в четвертом знаке после запятой, то на рис. 7 - различие в сто раз больше, что соответственно увеличивает шансы его экспериментального выявления. Именно на этой основе можно осуществлять поиск отклонений от гауссовского распределения на выборках с относительно небольшой статистикой, где наблюдаются отрицательные значения эксцесса (а также других моментов чётных порядков).

ВЫВОДЫ

Проведены вычисления числовых характеристик распределения чисел в строках треугольника Паскаля; осуществлено сравнение гауссовской аппроксимации и эмпирических распределений; приведена формула для плотности распределения в n-ой строке треугольника Паскаля; исследована асимптотика зависимости нормированных центральных моментов чётных порядков (от 4-го до 8-го) и показано, что они асимптотически приближаются к значениям, присущим нормальному распределению.

На основе гауссовской аппроксимации получены высокоточные приближения для вычисления значений центральных элементов чётных строк треугольника Паскаля. Достаточно точные значения биномиальных коэффициентов позволяют вычислять триномиальные коэффициенты (с помощью произведения пар биномиальных коэффициентов) и, в общем случае, мультиномиальные коэффициенты (как произведения соответствующего числа биномиальных коэффициентов).

Исследованы отклонения значений плотности распределений в строках треугольника Паскаля от нормального распределения в окрестности центральных элементов. Показан их волнообразный характер и процесс асимптотического сглаживания колебаний плотности при увеличении номера строки треугольника Паскаля, который свидетельствует о приближении к гауссовскому распределению.

Проведено численное интегрирование (методом Симпсона) плотности распределения в 50-ой и 90-ой строках треугольника Паскаля. Получены значения, которые с высокой точностью можно считать единицей (0.9999998), что свидетельствует о соблюдении эмпирической плотностью распределения в строках треугольника Паскаля условия нормировки на единицу.

Выдвинута **гипотеза**, согласно которой, возможно, в некоторых физических или физико-химических процессах работает именно распределение Паскаля, но в связи с незначительным отклонением данного распределения от нормального, его очень непросто заметить. Возможно также, что при усовершенствовании техники и методического обеспечения эксперимента, это различие окажется заметно там, где традиционно считается, что имеет место нормальное распределение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abramov G. S. Normalnoe priblizhenie dlya raspredeleniya chisel v strokah treugolnika Paskalya/ G. S. Abramov, I. M. Abramov // Vestnik HNTU. – Herson: HNTU, 2014. – Vyip. 3 (50), – p. 185-191.
2. Abramov G. S. Gaussovskaya approksimatsiya dlya raspredeleniya chisel v strokah treugolnika Paskalya/ G.S. Abramov, I. M. Abramov // Vestnik HNTU. – Herson: HNTU, 2015. – Vyip. 3 (54), – p. 319-325.
3. Grehem R. O. Konkretnaya matematika. Osnovanie informatiki: Per. s angl./R. Grehem, D. Knut, O. Patashnik. – M.: Mir, 1998.-703 p.
4. Feller V. Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i eyo prilozheniya: Per. s angl./V. Feller. – M.: Mir, 1984. – 528 p.
5. Bondarenko B. A. Obobschyonnyie treugolniki i piramidyi Paskalya, ih fraktalyi, grafyi i prilozheniya/ B. A. Bondarenko. – Tashkent, 1990. – 192 p.
6. Kuzmin O. V. Nekotoryie kombinatornyie chisla v obobschYonnoy piramide Paskalya/ O. V. Kuzmin //Asimptoticheskie i perechislitelnyie zadachi kombinatornogo analiza. – Irkutsk: Izdatelstvo Irkutskogo universiteta, 1998. – p. 90-100.
7. Kuzmin O. V. Obobschennyie piramidyi Paskalya i ih prilozheniya / O. V. Kuzmin – Novosibirsk, 2000 – 64 p.
8. Uspenskiy V. A. Treugolnik Paskalya / V. A. Uspenskiy V. A. - M.: Nauka, 1979 - 48p.
9. Enzenzberger H. M. Duh chisla / H. M. Enzenzberger - Harkov: Knizhnyiy klub «Klub simeynogo dozvillya», 2002 – 272 p.
10. Gardner M. / Matematicheskie novellyi. - M.: Mir, 1974 – 456p.

Рецензент: д.т.н., проф. Ходаков В.Є.,
Херсонский национальный технический университет.