ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБУЧАЮЩЕМ ПРОЦЕССЕ IT-СПЕЦИАЛИСТОВ

УДК 510.6

ЗАХАРЧЕНКО Раиса Николаевна
к.т.н., доцент кафедры информационных технологий Херсонского национального технического университета,
Научные интересы: новые информационные технологии.
e-mail:zraissa@mail.ru

КИРЮШАТОВА Татьяна Григорьевна
к.т.н., доцент кафедры информационных технологий Херсонского национального технического университета, **e-**
Научные интересы: новые информационные технологии.
mail:kirtan.63@gmail.com

КИРЮШАТОВА Екатерина Владимировна
ассистент кафедры информационных технологий Херсонского национального технического университета,
Научные интересы: новые информационные технологии.
e-mail:kirtan.63@gmail.com

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач вычислительной линейной алгебры является задача решения систем линейных уравнений (СЛАУ). Решение систем линейных уравнений является элементарной частью алгоритма при решении не линейных задач.

Вычисления, связанные с решением систем линейных алгебраических уравненийприменяются во многих сферах человеческой деятельности. Во многих практических задачах затраты и прибыль линейно зависят от количества приобретенных или утилизированных средств. Например, суммарная стоимость партии товаров линейно зависит от количества закупленных единиц, а оплата за перевозки осуществляется пропорционально весу груза, который перевозится [3]. На практике решения СЛАУ используется для решения проблем связанных с распределением ресурсов, планированием производства, организации работы транспорта, а так же при решении прикладных задач по физике, радиофизике, электронике и других областей науки и техники. [1, 3, 6].

Возможность математического моделирования разных процессов с применением ПК зависит от умения эффективно решать СЛАУ. В связи с этим уделяется особое внимание разработке и исследованию методов решения СЛАУ. Для решения СЛАУ используются прямые и итерационные методы. При прямых методах точное решение получается за конечное количество вычислительных шагов и записывается в виде формул Крамера. Однако из-за большого количества операций этот метод не экономичен и на практике применяются различные варианты исключения переменных. Наиболее известным из прямых методов является метод Гаусса с выбором главного элемента в столбце [1, 2]. При поиске главного элемента по столбцу достигаются две цели:

- ограничивается рост коэффициентов на каждом шаге исключения;
- обеспечивается отсутствие аварийных остановов из-за операции деления на ноль.

На практике при решении СЛАУ работают с разреженными матрицами – это матрицы, в которых число не нулевых элементов на много меньше общего числа элементов матрицы. Разреженные матрицы являются результатом математического моделирования технических устройств. Например, математическое моделирование сложных строительных конструкций и больших электрических цепей.

Ограниченность оперативной памяти ПК одна из причин трудности практического решения систем большой размерности. Данную причину можно устранить, если для хранения матрицы использовать внешнее запоминающее устройство. Однако при этом возрастает сложность алгоритмов и затраты машинного времени. Поэтому, способам компактного размещения матриц в памяти ПК уделяют большое внимание при создании вычислительных алгоритмов решения СЛАУ [2].

Итерационные методы используются для решения СЛАУ большого порядка и для уточнения решения, полученного прямыми методами. Количество неизвестных в задачах, решаемых при помощи вычислительных алгоритмов решения СЛАУ, достигает сотен тысяч. На практике это было бы невозможно без использования разреженных матриц, так как матрица системы, состоящая, из ста тысяч уравнений, заняла бы большое количество памяти ПК [2].

На занятиях по теме решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу студентам предлагается изучить и программно реализовать этот метод на языках высокого уровня, исследовать его точность и эффективность на тестовых задачах.

Можно выделить два этапа в процессе решения СЛАУ методом Гаусса: прямой ход, который включает в себя преобразование исходной системы к системе с треугольной матрицей коэффициентов; обратный ход – предполагает решение системы с треугольной матрицей.

Процесс решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, с выбором ведущего элемента предполагает перестановку строк системы (1). Программно это нетрудно сделать, переставляя соответствующие строки матрицы коэффициентов и соответствующие компоненты вектора свободных членов. Подобную операцию можно и не выполнять, если ввести вспомогательный одномерный массив перестановок [5].

Для проведения вычислений по решению систем уравнений применяется четко сформулированный алгоритм. Непрерывное усложнение задач, решаемых с помощью систем автоматизированного проектирования,требует соответствующейподготовки программистов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью данной статьи - является раскрытие проблем методики и технологий создания программного продукта для автоматизации процесса решения систем линейных уравнений различными методами: метод Гаусса, метод Гаусса с выборомглавного элемента по столбцу, метод Зейделя, методом итераций и др. Данные методы рассматриваются при проведении лекций и лабораторных работ для студентов направления «Программная инженерия». Студенты, владея базовыми навыками построения алгоритмических структур, могут создать алгоритм решения практически любой задачи, провести грамотное тестирование разработанных алгоритмов и оптимизировать их с уменьшением времени решения задачи до минимума.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим решение проблемы поставленной задачи на примере разработки программного продукта решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу [1, 5].

Для решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбу входные данные можно представить в виде системы ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_2 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases}, \qquad (1)$$

где xi - неизвестные элементы, aij – фиксированные действительные числа.

Точность выполнения арифметических операций при преобразовании элементов матрицы определяет точность полученных результатов. С целью уменьшения погрешности при делении на диагональный элемент (вторая формула (5)) следует выполнить такую перестановку уравнений, чтобы поставить на диагональ наибольший элемент по модулю из всех элементов рассматриваемого столбца. Такая процедура называется выбором главного элемента столбца [2].

На первом этапе (прямой ход), так как алгоритм метода состоит из двух этапов, необходимо последовательно выполнить исключение неизвестных из уравнений начиная с x1.

Из первого уравнения системы (1) находим неизвестное:

$$x_1=(1/a_{11})(a_{14}-a_{12}x_2-a_{13}x_3), \qquad (2)$$

что возможно при a11≠0, в противном случае нужно выполнить перестройку уравнений системы.

Согласно формуле (2) необходимо каждый элемент первой строки матрицы СЛАУ поделить на диагональный элемент

$$n_{ij}=a_{ij}/a_{11} \quad (j=2,3,4). \qquad (3)$$

Затем подставить выражение (2) во все остальные уравнения системы, тем самым исключаем x1 из всех уравнений кроме первого. Элементы расширенной матрицы преобразовываются по формуле:

$$a_{ij}=a_{ij}-a_{i1}n_{ij} \, (i=2,\ 3;\ j=2,\ 3,\ 4) \qquad (4)$$

В результате исключения первого неизвестного из всех уравнений, все элементы первого столбца преобразований матрицы будут равны нулю.

Неизвестное x2 выразим из второго уравнения системы и исключим из остальных уравнений и т.д. В результате имеем СЛАУ треугольную матрицу, в которой все элементы ниже главной диагонали равняются нулю. Записывается выражение для неизвестных и преобразование элементов расширенной матрицы системы, которые находятся по формулам (2)-(4):

$$
\begin{aligned}
&n_{2j}=a_{2j}/a_{22} && (j=3,\ 4,\ 5)\\
&a_{ij}=a_{ij}-a_{i2}n_{2j} && (i=3,\ j=3,4)\\
&n_{3j}=a_{3j}/a_{33} && (j=4) \qquad\qquad (5)\\
&x_3=n_{34}\\
&x_2=n_{24}-n_{23}x_3
\end{aligned}
$$

Второй этап решения СЛАУ называется обратным ходом метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу [2, 5] и состоит в последовательном определении неизвестных x1, x2, x3 используя формулу (5), начиная с неизвестного x3 и заканчивая x1.

Данный метод решения СЛАУ рассматривается на лабораторных работах при подготовке студентов по направлению «Программная инженерия». Студентам предлагается написать программный код нахождения решения, на конкретном языке программирования и для образца приведен пример программного кода для решения СЛАУ методом главного элемента по столбцу, написанного на языке программирования Pascal [4].

```
Program EMPI2;

var t: text;
a: array [1..20,0..20] of real;
s,c: string;
r: char;
k: real;
n,i,j,p: integer;
x: array [1..20] of real;

function xi (m: integer): real;
var k: real;
max: integer;
begin
  If m<>n then
begin
// находим максимальный элемент в столбце и меняем строки местами
max:=m;
for i:=m+1 to n do If a[i,m]>a[max,m] then max:=i;
    If max<>m then for i:=m to n do for j:=m to n+1 do
begin
k:=a[max,j];
a[max,j]:=a[i,j];
a[i,j]:=k;
end;
    //преобразуемсистему
for i:=m+1 to n do
begin
k:=-a[i,m]/a[m,m];
for j:=m to n+1 do a[i,j]:=a[m,j]*k+a[i,j];
end;
    //рекурсия
    x[m+1]:=xi(m+1);
end;
k:=a[m,n+1];
for i:=m+1 to n do k:=k-a[m,i]*x[i];
xi:=k/a[m,m];
end;

begin

//считываем систему уравнений из файла
assign(t,'EMPI2.txt');
reset(t);
n:=0;
repeat read(t,s);
inc(n);
c:='';
i:=0;
whilei<length(s) do
begin
inc(i);
r:=s[i];
    If r='X' then
begin
inc(i);
r:=s[i];
val(r,j,p);
val(c,k,p);
a[n,j]:=k;
c:='';
```

```
end
else c:=c+r;
      If r='=' then
begin
c:=copy(s,i+1,length(s)-i);
val(c,k,p);
a[n,0]:=k;
end;
end;
readln(t);
untileof(t);
close(t);
```

//переносим свободный элемент с 0-ого в n+1 столбец масива

```
for i:=1 to n do
begin
a[i,n+1]:=a[i,0];
a[i,0]:=0;
end;
```

//вызываем функцию xi для первого прохода по системе

```
x[1]:=xi(1);

writeln('Answer:');
for i:=1 to n do writeln('x',i,'=',x[i]);

end.
```

Для работы программы рекомендуется предварительно создать файл (EMPI2.txt) содержимое которого представлено на рис. 1 с исходными данными.

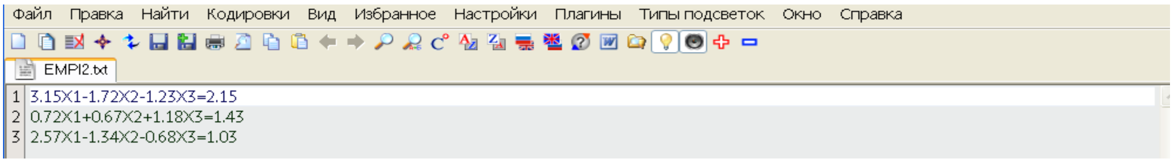

Рисунок 1. Экранная форма содержимого файла исходных данных для решения СЛАУ

Как альтернативу приведем пример выполнения программы написанной студентами на языке программирования Java при выполнении лабораторных работ. Для удобства введения данных и использования их в результате решения они создают формы, образец которых приведен на рис. 2 – 4.

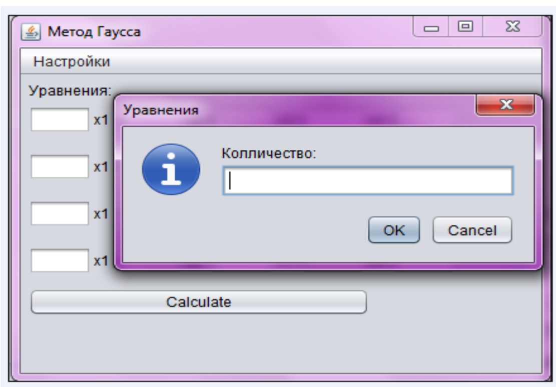

Рисунок 2. Экранная форма программы для введения количества уравнений в системе.

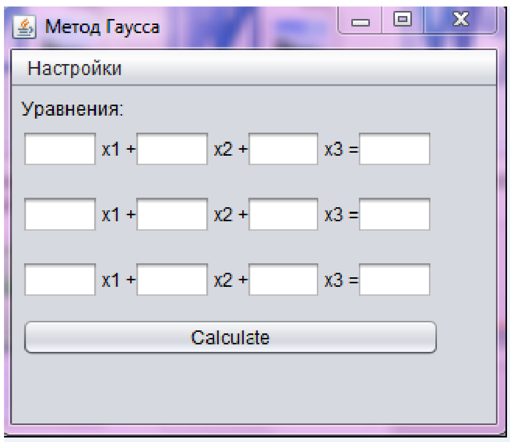

Рисунок 3. Экранная форма программы для введения коэффициентов системы линейных уравнений.

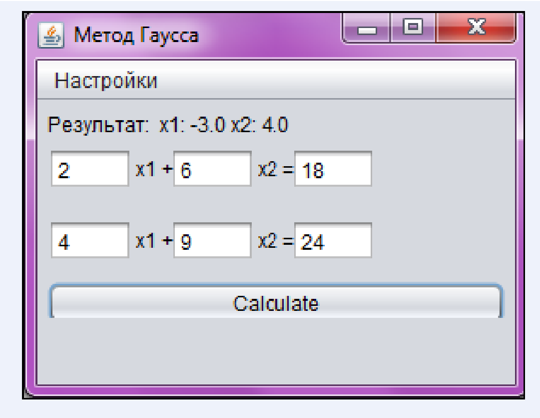

Рисунок 4. Экранная форма программы с примером решения системы линейных уравнений.

ВЫВОДЫ

В связи с тем, что на сегодняшний день актуальна проблема повышения качества вычислений, развитие информационных технологий способствует решению этой проблемы. В частности совершенствуются методы организации информационных процессов и их реализация при помощи конкретных инструментальных средств и языков программирования.

В статье описано применение различных методов для решения СЛАУ и обоснована необходимость создания программных продуктов для их автоматизации в процессе обучения студентов по направлению «Программная инженерия». Программная реализация решения СЛАУ методом Гаусса для студентов может служить органической частью решения более сложных задач.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Bronshtejn I.N. Spravochnik po matematike dlja inzhenerov i uchashhihsja vtuzov / I.N. Bronshtejn, K.A. Semendjaev. - M.: Nauka, 2007. - 708 s.
2. Vasil'ev F.P. Chislennye metody reshenija jekstremal'nyh zadach. / F.P. Vasil'ev - M.: Nauka, 2002. C. 415.
3. Karavanova T.P. Informatika: metodi pobudovi algoritmiv ta ïh analiz. – K.:Geneza, 2009. – 336 s.
4. Marchenko A.I., Marchenko L.A. Programmirovanie v srede Turbo Rascal 7.0. — 6-e izd. stereotip. _Jubilejnoe — K.: VEK++, 2000 — 127s.
5. Metod Gaussa [Jelektronnyj resurs] - Rezhim dostupa: http://www.wikipedia.org/wiki/Metod_Gaussa.
6. Petrenko I.V., Beda E.N. Lekcii i praktikum po linejnoj algebre: Uchebnoe je posobie. — Doneck: IPII «Nauka i osvita»; 2005. — 76s.
7. Akulich I.L. Matematicheskoe programmirovanie v primerah i zadachah: Ucheb. posobie dlja studentov jekonom. spec. vuzov. – M.: Vyssh. shk., 1986. – 319 s.
8. Ammeral L. Principy programmirovanija v mashinnoj grafike: Per. s angl. – M.:Sol Sistem, 1992. – 224 s.
9. Bondarev V.M., Rublineckij V.I., Kachko E.G. Osnovy programmirovanija. – Har'kov: Folil; Rostov N.D.:Feniks, 19997. – 368 s.
10. Ventcel' E.S. Issledovanie operacij: zadachi, principy, metodologija. – 2-e izd., ster. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988. – 208 s.

Рецензент: д.т.н., проф. Ходаков В.Е.,
Херсонский национальный технический университет.