ИССЛЕДОВАНИЕ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

УДК 62-50

ДЫМОВА А.О.

Старший преподаватель кафедры Технической кибернетики

Научные интересы: оптимизация и идентификация динамических систем.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается возможность оценки чувствительности параметров моделей линейных динамических систем, получаемых проекционными методами [2, 7, 9]. Оценка чувствительности системы определяет дополнительное движение системы (возмущения) и границы ее чувствительности.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Решение задач оптимизации управления сложными динамическими системами и их идентификации при частично наблюдаемых выходных сигналах значительно усложняются и могут быть решены при определенных допущениях относительно структуры матриц модели системы.

Первая группа задач нами решена на основе работ [1, 2, 3, 7, 8] проекционными методами (проекцией множества параметров пространства состояний динамической системы на множество выходных частично наблюдаемых сигналов и нахождения оптимальных управляющих воздействий в виде линейных комбинаций проекций векторов состояний системы [2, 6, 7, 8, 9]). Получена модель динамической системы и определена граница устойчивости.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

При исследовании возможности оптимального управления исходим из того, что система описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением [2, 6]

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\vec{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}(t)\vec{\mathbf{m}}(t) + \vec{\mathbf{n}}(t)\,, \qquad (1)$$

где $\vec{\mathbf{x}}(t)$ - *n*-мерный вектор, представляющий переменные состояния;

$\vec{\mathbf{m}}(t)$ - *r*-мерный вектор, представляющий управляющие воздействия;

$\vec{\mathbf{n}}(t)$ - *s*-мерный вектор, представляющий внешние случайные воздействия;

$\mathbf{A}(t)$ - матрица коэффициентов процессов;

$\mathbf{D}(t)$ - матрица управления.

Решение уравнения (1) имеет вид [2]

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{\Phi}(t,t_0)\vec{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\varphi(t,\tau)\mathbf{D}(\tau)\vec{\mathbf{m}}(\tau) + \vec{\mathbf{n}}(\tau)\right]d\tau\,, \qquad (2)$$

где $\mathbf{\Phi}$ (t, t_0) – матрица перехода, удовлетворяющая однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\mathbf{\Phi}(t,t_0)}{dt} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{\Phi}(t,t_0) \qquad (3)$$

и соотношению

$$\mathbf{\Phi}(t_0,t_0) = \mathbf{I}\,, \qquad (4)$$

где **I** – единичная матрица.

В дискретных динамических системах с цифровым управлением решение дается уравнением переходных состояний [1, 2]

$$\vec{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}(k)\vec{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}(k)\vec{\mathbf{m}}(k) + \vec{\mathbf{u}}(k)\,, \qquad (5)$$

где

$$\mathbf{\Phi}(k) = \mathbf{\Phi}((\overline{k+1})T, kT)\,; \tag{6}$$

$$\mathbf{G}(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \mathbf{\Phi}((\overline{k+1})T, \tau)\mathbf{D}(\tau)d\tau\,; \tag{7}$$

$$\mathbf{u}(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \mathbf{\Phi}((\overline{k+1})T, \tau)\mathbf{n}(\tau)d\tau\,. \tag{8}$$

Принцип построения оптимального управления динамической системой определяется показателями качества, в требованиях которого учитываются ограничения, при выполнении которых гарантируется физическая реализуемость оптимального управления динамической системой.

При реализации цифровых систем управления показатель качества определяется квадратичной формой

$$J_N = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \left[\vec{\mathbf{x}}^{\,d}(k) - \vec{\mathbf{x}}(k)\right]' \mathbf{Q}(k)\left[\vec{\mathbf{x}}^{\,d}(k) - \vec{\mathbf{x}}(k)\right] + \lambda\, \mathbf{r} \right. \tag{9}$$

,

где $\vec{\mathbf{x}}^{\,d}(k)$ – вектор желаемого состояния;

Q, **H** – положительно определенные симметрические матрицы;

λ – постоянный множитель.

Аналогично, путем выбора элементов матрицы **H** можно наложить желаемые ограничения на энергию управляющих воздействий. Оптимальное управление заключается в определении последовательности векторов управления $\vec{\mathbf{m}}(0), \vec{\mathbf{m}}(1), \ldots, \vec{\mathbf{m}}(N-1)$, минимизирующих ожидаемое среднее значение показателя качества [1, 2, 3].

Для линейных систем, характеризуемых уравнением переходных состояний (5), вектор реализуемого управления, минимизирующего ожидаемое среднее значение показателя качества дается формулой [1, 2]:

$$\hat{\mathbf{m}}^{0}(k/k) = \mathbf{B}(N-k)\,\vec{\hat{\mathbf{x}}}(k/k)\,, \tag{10}$$

где **B**(*N* – *k*) – матрица обратной связи, элементами которой являются коэффициенты обратной связи. Она изменяется во времени, т.к. вычисляется на каждом шаге.

$\vec{\hat{\mathbf{x}}}(k/j)$ – оценка вектора состояния $\vec{\mathbf{x}}(k)$, использующая измеренные значения $\vec{\mathbf{y}}(j), \vec{\mathbf{y}}(j-1), \ldots, \vec{\mathbf{y}}(0)$ вектора выхода, оптимальная в том смысле, что ожидаемое среднее значение

$$E\left\{\left[\vec{\mathbf{x}}(k) - \vec{\hat{\mathbf{x}}}(k/j)\right]'\left[\vec{\mathbf{x}}(k) - \vec{\hat{\mathbf{x}}}(k/j)\right]\right\} \tag{11}$$

минимально, $\vec{\hat{\mathbf{x}}}(k/j)$ – это ортогональная проекция вектора состояния на подпространство выходных сигналов **Y**(*j*) [7, 9].

Поэтому

$$\vec{\mathbf{x}}(k) = \vec{\hat{\mathbf{x}}}(k/k) + \vec{\tilde{\mathbf{x}}}(k/k)\,. \tag{12}$$

Y(*j*) является подпространством пространства $\vec{\mathbf{X}}(k)$ – пространства векторов состояния динамической системы [2, 6, 7].

Вектор оптимального управления $\vec{\mathbf{m}}^{0}(k/k)$ можно записать в виде суммы его ортогональной проекции $\vec{\hat{\mathbf{m}}}^{0}(k/k)$ на пространство **Y**(*j*) и его нормальной компоненты $\vec{\tilde{\mathbf{m}}}^{0}(k/k)$ [7, 9].

Первое слагаемое в (9) дает отклонение от заданного процесса в любой момент времени *kT*, второе слагаемое учитывает ограничение энергии управляющего воздействия [1, 2, 6]. При соответствующем выборе матрицы **Q** любую координату состояния процесса можно сделать более важной и эффективной для оценки качества системы по сравнению с другой переменной.

По аналогии можно записать

$$\vec{\hat{\mathbf{m}}}^{0}(k/k) + \vec{\tilde{\mathbf{m}}}^{0}(k/k) = \mathbf{B}(N-k)\,\vec{\hat{\mathbf{x}}}(k/k) + \mathbf{B}(N-k)\,\vec{\tilde{\mathbf{x}}}(k/k)$$

.

Используя основные свойства ортогональной проекции [1], находим

$$\begin{aligned} \vec{\hat{\mathbf{m}}}^{0}(k/k) &= \mathbf{B}(N-k)\,\vec{\hat{\mathbf{x}}}(k/k)\,, \\ \vec{\tilde{\mathbf{m}}}^{0}(k/k) &= \mathbf{B}(N-k)\,\vec{\tilde{\mathbf{x}}}(k/k)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Ортогональная проекция $\vec{\hat{\mathbf{m}}}^{0}(k/k)$, которая является наилучшей оценкой для $\vec{\mathbf{m}}^{0}(k)$, связана линейно с наилучшей оценкой для $\vec{\mathbf{x}}(k)$. Нормальная компонента вектора $\tilde{\vec{\mathbf{m}}}^0(k)$ представляет собой ошибку оценки [2, 7]. Оценка $\vec{\mathbf{m}}^0(k)$ физически не реализуема, так как является функцией оценки $\hat{\vec{\mathbf{x}}}(k/k)$, которая может быть определена по измерениям выходных сигналов.

Покажем теперь, что используя принцип оптимальности и когда вместо вектора оптимального управления $\vec{\mathbf{m}}^0(k)$ используется его наилучшая оценка (10) и качество системы определяется по минимуму среднего значения J_N. Решение находится на основе динамического программирования. Выражение (9) описывает оптимальный закон управления [3]. При доказательстве этого используется симметричность матриц **Q** и **H** [4, 5]. Обозначим минимум ожидаемого среднего значения J_N через

$$f_N[\vec{\mathbf{x}}(0)] = \min_{\vec{\mathbf{m}}(j)} EJ_N, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{14}$$

Очевидно, что когда $\vec{\mathbf{m}}(j) = \vec{\mathbf{m}}^0(j)$, то $EJ_N = f_N$ и $EJ_N - f_N = 0$. Однако, когда $\vec{\mathbf{m}}(k) \neq \vec{\mathbf{m}}^0(k)$, то $EJ_N - f_N > 0$, т.е. вводится ошибка, так как по определению f_N является минимумом для EJ_N. Следовательно, задача состоит в определении для $\vec{\mathbf{m}}^0(k)$ оценки, минимизирующей ошибку $EJ_N - f_N$, обусловленную нереализуемостью $\vec{\mathbf{m}}^0(k)$. Эта оценка называется наилучшей оценкой и она дается ортогональной проекцией $\hat{\vec{\mathbf{m}}}(k/k)$ и поэтому уравнение $\hat{\vec{\mathbf{m}}}^0(k/k) = \mathbf{B}(N-k)\hat{\vec{\mathbf{x}}}(k/k)$ описывает оптимальный закон управления для процессов с координатами, недоступными для измерения. И задача сводится к нахождению оценок для многошагового процесса, в результате которого последовательно находятся оценки для всех шагов и в каждом последующем шаге используются найденные оптимальные решения на предыдущем шаге, т.е. реализуется принцип динамического программирования.

Применяя принцип оптимальности, минимальное значение $f_N[\vec{\mathbf{x}}(0)]$ для N – шагового процесса управления с $N > 1$ можно записать в виде

$$f_N[\vec{\mathbf{x}}(0)] = \min_{\vec{\mathbf{m}}(0)} E\left\{\vec{\mathbf{x}}'(1)\mathbf{Q}(1)\vec{\mathbf{x}}(1) + \lambda\vec{\mathbf{m}}'(0)\mathbf{H}(0)\vec{\mathbf{m}}(0) + f_{N-1}[\vec{\mathbf{x}}(1)]\right\}, \tag{15}$$

где связь между $\vec{\mathbf{x}}(1)$ и $\vec{\mathbf{m}}(0)$ дается уравнением

$$\vec{\mathbf{x}}(k+1) + \varphi(k)\vec{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}(k)\vec{\mathbf{m}}(k) + \vec{\mathbf{u}}(k). \tag{16}$$

Для $N = 1$ минимум равен [2]

$$f_1[\vec{\mathbf{x}}(0)] = \min_{\vec{\mathbf{m}}(0)} E\left\{\vec{\mathbf{x}}'(1)\mathbf{Q}(1)\vec{\mathbf{x}}(1) + \lambda\vec{\mathbf{m}}'(0)\mathbf{H}(0)\vec{\mathbf{m}}(0)\right\} \tag{17}$$

Здесь, как было сказано ранее, принята симметричность матриц **Q** и **H**.

В уравнении (1) **A** – основная матрица системы, так как ее структура определяет характер переходной матрицы состояния (3) и поэтому чувствительность корней характеристического уравнения матрицы **A** определяет чувствительность системы к возмущениям. Ранее в [10] нами найдена методом факторизации корреляционных функций множества выходных параметров идентифицируемой динамической системы оценка матрицы **A** (формула (1)). Простейшим методом анализа чувствительности является численное исследование параметрической модели системы во всем диапазоне изменения определяющей совокупности параметров. Основным методом исследования в теории чувствительности является использование функций чувствительности.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – множество собственных значений характеристического полинома матрицы **A**. При этом переменные состояния $\vec{\mathbf{x}}_i, i = \overline{1, n}$ и показатели качества $J_1, J_2, \ldots, J_s$ являются однозначными функциями параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, т.е.

$$\vec{\mathbf{x}}_i(t, \lambda) = \vec{\mathbf{x}}(t, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \; i = \overline{1, n} \tag{18}$$

и

$$J_i(\lambda) = J_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \; i = \overline{1, s}. \tag{19}$$

Частные производные $\frac{\partial \vec{\mathbf{x}}_i(t, \lambda)}{\partial \lambda_k}$, $\frac{\partial J_i(\lambda)}{\partial \lambda_k}$ называются функциями чувствительности первого порядка величин $\vec{\mathbf{x}}_i$, J_i по соответствующим параметрам. Частные производные k-го порядка от величин $\vec{\mathbf{x}}_i$, J_i по аргументам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$

$$\frac{\partial^k \vec{\mathbf{x}}_i}{\partial\lambda_1^{k_1}\partial\lambda_2^{k_2}\ldots\partial\lambda_m^{k_m}}, \frac{\partial^k J_i}{\partial\lambda_1^{k_1}\partial\lambda_2^{k_2}\ldots\partial\lambda_m^{k_m}}, k_1+k_2+\ldots+k_m=k \quad (20)$$

называются функциями чувствительности k-го порядка по соответствующим комбинациям параметров. Очевидно, что функции чувствительности переменных состояния $\vec{\mathbf{x}}(t,\lambda)$ зависят от t и параметров λ, а функции чувствительности показателей качества только от параметров, λ_2, …, λ_m. Функции чувствительности различных порядков являются решениями уравнений модели системы. Эти уравнения являются уравнениями чувствительности. Совокупность исходной математической модели (1) и критериев качества (9), определяющих функции чувствительности являются моделью чувствительности изучаемой системы.

Рассмотрим два случая. Первый – $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ – фиксированное (расчетное) значение параметров; $(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m) = \vec{\lambda}$ – базисная совокупность; $\bar{\lambda}$ соответствует совокупности переменных состояния [3, 5]. $\bar{\vec{\mathbf{x}}}_i = \vec{\mathbf{x}}_i(t, \bar{\lambda})$ будем называть основным базовым движением системы. Базовому движению соответствует базовое значение показателей качества $\bar{J}_i = J_i(\bar{\lambda})$. При изменении параметров $\lambda_i = \bar{\lambda}_i + \mu$ получим новое движение $\vec{\mathbf{x}}_i = \vec{\mathbf{x}}_i(t, \bar{\lambda}_1 + \mu_1, \ldots, \bar{\lambda}_m + \mu_m) = \vec{\mathbf{x}}_i(t, \bar{\lambda} + \vec{\mu})$, которому соответствуют новые значения показателей качества $\bar{J}_i = J_i(\bar{\lambda}_1 + \mu_1, \ldots, \bar{\lambda}_m + \mu_m) = J_i(\bar{\lambda} + \vec{\mu}))$. Вектор $\Delta\vec{\mathbf{x}}_i = \vec{\mathbf{x}}_i(t, \bar{\bar{\lambda}} + \vec{\mu}) - \vec{\mathbf{x}}_i(t, \bar{\bar{\mu}})$ называется дополнительным движением, вызван изменением собственных значений матрицы **A**. при этом могут быть два исхода:

1) действительная часть одного или нескольких собственных значений характеристического полинома матрицы **A** окажется положительной и система будет неустойчивой;

2) суммарное изменение λ_i дает изменение показателя качества не соответствующему проектному заданию.

Анализ задач 1) и 2) будет произведено методами теории возмущений на основании теорем Гершгорина [4, 8].

Пусть, полученная в [10] матрица $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$, постоянная квадратная матрица с вещественными элементами. Матрица $\|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\|$, где λ - скалярная независимая переменная, будет характеристической матрицей идентифицируемой системы, а ее определитель

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \quad (21)$$

- характеристическим полиномом матрицы **A**.

Рассмотрим случай, когда все собственные значения (корни полинома (21)) различны, и зависят непрерывно от всех элементов матрицы **A** [4, 8]. Зададим возмущение матрицы **A** в виде

$$\mathbf{A}(\Delta_\lambda) = \mathbf{A} + \Delta_\lambda\mathbf{B}, \quad (22)$$

где **B** – произвольная вещественная квадратная матрица такого же порядка как и матрица **A**.

Величина Δ_λ задается исходя из уровня шумов на выходе идентифицируемой системы. Из теории возмущений линейных операторов и матриц [3, 4, 8] следует, что $\lambda_i(\Delta_\lambda)$ - собственные значения матрицы $\mathbf{A} + \Delta_\lambda\mathbf{B}$ и собственные векторы $\mathbf{x}_i(\Delta_\lambda)$ являются непрерывными и дифференцируемыми функциями параметра Δ_λ [3, 4, 8]:

$$\lambda_i(\Delta_\lambda) = \lambda_i + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial^j\lambda_i(\Delta_\lambda)}{\partial\Delta_\lambda^j}\right)\Bigg|_{\Delta_\lambda=0}\Delta_\lambda^j, \quad (23)$$

$$\mathbf{x}_i(\Delta_\lambda) = \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial^j\mathbf{x}_i(\Delta_\lambda)}{\partial\Delta_\lambda^j}\right)\Bigg|_{\Delta_\lambda=0}\Delta_\lambda^j. \quad (24)$$

В формулах (23) и (24) $\beta_{ij} = \left.\frac{\partial^j\lambda_i(\Delta_\lambda)}{\partial\Delta_\lambda^j}\right|_{\Delta_\lambda=0}$ - коэффициент чувствительности j-го порядка,

$\gamma_{ij} = \left. \frac{\partial^j \mathbf{x}_i(\Delta_\lambda)}{\partial \Delta_\lambda^j} \right|_{\Delta_\lambda = 0}$ - вектор чувствительности j-го порядка.

Согласно теоремы Гершгорина [4, 8] любое собственное значение матрицы **A** лежит по крайней мере в одном из кругов с центром в a_{ii} с радиусом $\rho = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Если сумма

$$a_{ii} + \rho > 0 , \qquad (25)$$

то модель системы для одного i-го значения (или нескольких собственных значений) неустойчива. Это возможно даже при отрицательных a_{ii}. При условии $|a_{ij}| < \rho$, что выполняется согласно формул (23) и (25) при $\lambda_i(\Delta_\lambda) > 0$, что необходимо проверять для всех $i = \overline{1,n}$ ($n \times n$ – порядок полученной оценки матрицы модели динамической системы) [10], и в этом случае надо найти допустимые дополнительные движения системы и снова проверить устойчивость матрицы **A** динамической модели. Решение этой задачи сводится к фильтрации измеряемых выходных n^* параметров ($n^* < n$)

В общем случае собственные значения матрицы **A** являются комплексными числами и, при положительном значении действительной части комплексного числа собственного значения хотя бы для одного λ_i, полученная оценка матрицы **A** модели динамической системы будет неустойчивой.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Проекционные методы исследования динамических систем позволяют при определенном подборе матриц **Q** и **H** решать задачу нахождения квазиоптимального управления с определяемой точностью при неполном наблюдении выходных сигналов системы.
2. Исследование получаемых моделей динамических систем на чувствительность позволяют определить критические изменения собственных значений оператора системы и прогнозировать неустойчивые режимы работы системы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Sejdzh Je.P. Optimal'noe upravlenie sistemami. - T.III. / Sejdzh Je.P., Uajt Ch.S. – M.: Radio i svjaz', 1982. – 392 s.
2. Tu Ju. Sovremennaja teorija upravlenija / Julius Tu – M.: Mashinostroenie, 1971. – 472 s.
3. Rozenvasser E.N. Chuvstvitel'nost' sistem upravlenija / Rozenvasser E.N., Jusupov R.M. – M.: Nauka, 1981. – 464 s.
4. Uilkinson Dzh.H. Algebraicheskaja problema sobstvennyh znachenij / Dzh.H. Uilkinson – M.: Nauka, 1972. – 565 s.
5. Rajnshke K. Modeli nadezhnosti i chuvstvitel'nosti sistem / Kurt Rajnshke ; per. s nem. B.A.Kozlova – M.: Mir, 1979. – 454 s.
6. Derusso P. Prostranstvo sostojanij v teorii upravlenija / Derusso P., Roj R., Klouz Ch. ; per. s angl. R. T. Janushevskogo – M.: Nauka, 1970.– 620 s.
7. Gantmaher F.R. Teorija matric / Feliks Ruvimovich Grantmaher – M.: Nauka, 1988. – 552 s.
8. Lankaster P. Teorija matric / Piter Lankaster – M.: Nauka, 1978. – 280 s.
9. Marasanov V.V. Issledovanie na chuvstvitel'nost' modelej dinamicheskih sistem, poluchennyh proekcionnym metodom / V.V. Marasanov, A.O. Dymova, V.S.Dymov // Problemi informacijnih tehnologij.- 2016.-№1(019).- S. 169-173 (Data publikacії – traven' 2016r.)
10. Marasanov V.V. Prognozirovanie struktury dinamicheskih sistem / V.V. Marasanov, O.I. Zabytovskaja, A.O. Dymova – Vestnik HNTU №1 (44) - 2012, S. 292-302.

Рецензент: *д.т.н., доц. Марасанов В.В.,*
Херсонский национальный технический университет