



МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТА АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІНДУКОВАНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ В ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ

УДК 004.9

РЯБЕНЬКИЙ Володимир Михайлович

д.т.н., професор, кафедра теоретичної електротехніки та електронних систем
Національний Університет Кораблебудування ім. адмірала Макарова
Україна, м. Миколаїв
e-mail: optron2@gmail.com

ЧУДАЙКІН Ігор Іванович

канд. техн. наук, доцент, igorlu3141509@rambler.ru
Таргунакова Юлія Дмитрівна, магістр, аспірант
e-mail: golubkajulya@gmail.com

ВСТУП

У ряді важливих практичних застосувань потрібна інформація про розподіл магнітного поля в околиці феромагнітних тонкостінних конструкцій складної просторової конфігурації, які знаходяться в зовнішньому постійному магнітному полі (наприклад, в геомагнітному полі — ГМП). До таких додатків відносяться, зокрема, визначення магнітного поля морських суден, виявлення підводних човнів і мін, виявлення підводних копалин, процес неруйнівного контролю виробів магнітним методом та інше. Для отримання більш достовірної інформації про магнітні параметри подібних тіл є ефективним використання чисельних методів розрахунку.

Пашковський А.В. в своїй роботі [1] привів класифікацію методів розв'язку польових задач. Ця класифікація, котра була розширена і доповнена, зображена на рис. 1.

Найбільш популярним обчислювальним методом є метод скінченних елементів (МСЕ). Понад 90% сучасних інженерних програм розрахунку ґрунтується на цьому методі. Однак у метода існує ще цілий ряд істотних недоліків — штучне обмеження області розрахунку,

дискретизація навколишнього простору, виконання нової дискретизації при зміні положення елементів і ін. Це призвело до пошуків альтернативних методів, з яких найбільш перспективним є метод граничних елементів (МГЕ).

Кацикаделіс Дж.Т. в своїй книзі [2] описав переваги і недоліки МГЕ. Переваги МГЕ: 1. Дискретизації підлягає тільки межа тіла, що полегшує чисельне моделювання за допомогою МГЕ і на порядок зменшує число невідомих. Таким чином, спрощується і зміна моделі, пов'язана з урахуванням змін проекту. 2. МГЕ дозволяє обчислювати розв'язок та його похідні в будь-якій точці розглянутої області та в будь-який момент часу. Це можливо тому, що метод використовує інтегральне представлення розв'язку отриманого аналітичного виразу, яке можна диференціювати і використовувати як аналітичну формулу. Це неможливо при використанні МСЕ, так як розв'язок можна отримати тільки в вузлових точках. 3. Метод дуже ефективний для обчислень похідних польових функцій. Можна з легкістю оперувати зосередженими силами і моментами як в області, так і на її межі. На поточній стадії розвитку МГЕ можна виділити наступні недоліки методу: 1. Чисельна

реалізація МГЕ призводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), у яких матриці коефіцієнтів повністю заповнені і несиметричні. При використанні МСЕ отримані матриці мають стрічкову структуру. Хоча, зазначений недолік МГЕ компенсується значно меншою розмірністю матриць. 2. Застосування МГЕ вимагає наявності фундаментальної матриці розв'язків. Для побудови граничних елементів треба мати функцію Гріна для відповідної області. Такі функції знайдені не

для всіх можливих областей. Цей метод не може використовуватися для задач, фундаментальний розв'язок яких не відомий чи не визначений. 3. Розроблені програми та підпрограми на базі МГЕ носять локальний характер і були створені лише для розв'язку конкретних задач в досліджуваній області, без особливих засобів візуалізації та повної автоматизації, що свідчить про необхідність розробки нової САПР, яка відповідає всім сучасним вимогам.

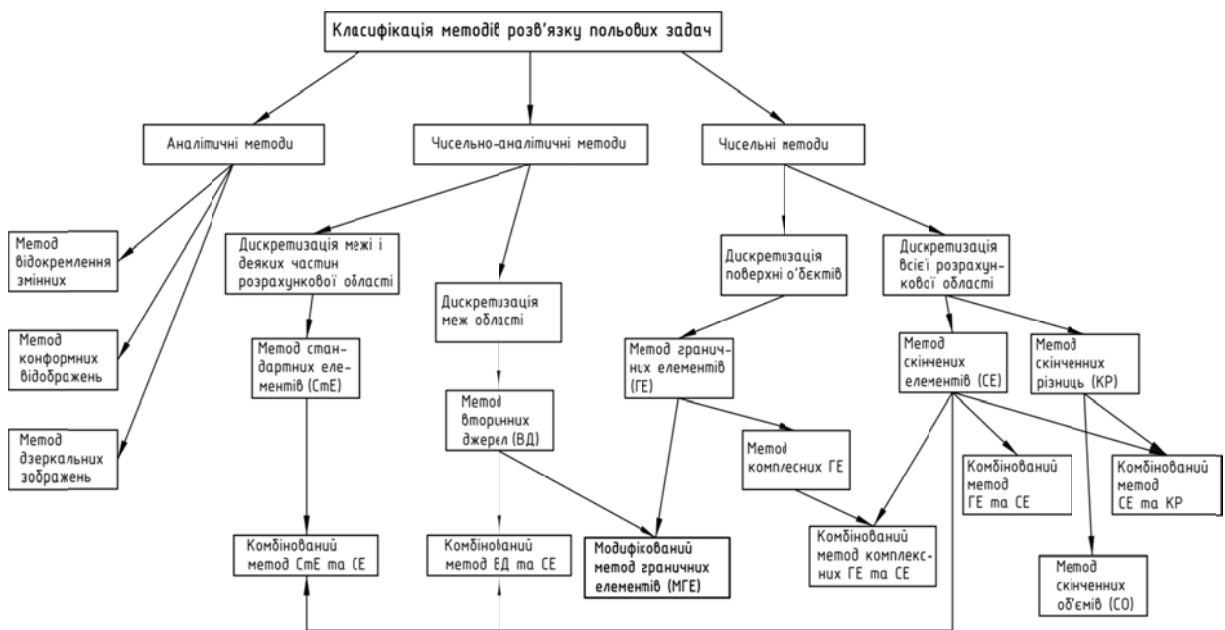


Рис. 1. Класифікація методів розв'язку польових задач.

Філіппов Д.М. в своїй роботі [3] розвив метод вторинних джерел для моделювання плоскопаралельного магнітного поля електромагнітних систем, в якому при складанні СЛАР для знаходження густини вторинних джерел вперше запропоновано застосовувати інтегральні закони поля до елементів межі розділу середовищ.

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Для тонких оболонок фундаментальна матриця розв'язків визначається складними громіздкими виразами, а для пологої сферичної оболонки виражається спеціальними функціями. Тому досліджень щодо розв'язку завдань з теорії пологих оболонок МГЕ небагато. У зв'язку з цим актуальною темою дослідження є розробка модифікованого методу граничних елементів

(ММГЕ) і алгоритмів, заснованих на розробленому методі, для розв'язку лінійних і нелінійних задач теорії тонких оболонок, заснованих на застосуванні фундаментальних розв'язків, які визначаються простими аналітичними виразами. Для цього треба розробити аналітичні вирази для розв'язування задач тривимірного магнітного поля складної конфігурації на основі рівнянь для розв'язку задач плоскопаралельного магнітного поля [3]. Створити нову САПР, яка буде мати всі необхідні засоби візуалізації та буде повністю автоматизованою, що відповідає всім сучасним вимогам для розв'язку поставлених задач.

У запропонованому методі застосований інтегро-інтерполяційний спосіб дискретизації крайової задачі, заснований на дотриманні балансу магнітних потоків

для контрольних об'ємів (КО) і представлення розв'язку у вигляді потенціалу в центрі КО.

Математичною основою збіжності методу є обмеженість операторів, зворотних проектуємим операторам та оператору граничних умов, а також густина в просторі неперервних функцій, побудована на основі дискретизації простого шару. При цьому консервативність схеми апроксимації граничних умов забезпечує «фізичність» розв'язку, отриманого при будь-якому, в тому числі і грубому, розбитті граничної поверхні. Остання обставина підтверджується, зокрема, наявним досвідом аналогового і аналого-цифрового моделювання поля намагнічення тонкостінних конструкцій на електричних сітках, при якому розв'язок може бути отриманий шляхом ітераційного підбору дискретних джерел струму (магнітного потоку), що задаються в вузлових точках однорідної R – сітки. Між моделюванням на електричних сітках і моделюванням чисельним методом, що пропонується, є майже повна аналогія. Відмінність полягає тільки в заміні розподілених джерел точковими.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У стаціонарному випадку (при впливі постійного в часі зовнішнього магнітного поля \vec{H}_0) потенціал φ_m шуканого поля намагнічування $H_m = -grad \varphi_m$ тонкостінних конструкцій задовольняє [4,5] рівнянню Лапласа:

$$\varphi_m = 0 \quad (1)$$

Та наближеним («некласичним») граничним умовам на серединній поверхні конструкції S :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m^- - \varphi_m^+ &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_m^-}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_m^+}{\partial n} + div_s \mu_s^* grad \varphi_m &= div_s \mu_s^* \vec{H}_{0s} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де $\mu_s^* = \mu \delta$, $\mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}$ та δ - відносна магнітна проникність і товщина конструкції відповідно.

Зовнішнє поле \vec{H}_0 вважається заданим. Потрібно знайти потенціал φ_m та значення напруженості \vec{H}_m індукованого магнітного поля тонкостінних оболонок S .

Відомо [5], що розв'язок крайової задачі (1)–(2) може бути представлений у вигляді потенціалу простого шару (ППШ) з густиною g :

$$\varphi_m(t) = \int g(q) \Psi_m(t, q) dS_q \quad (3)$$

де t — точка спостереження; q — поточна точка поверхні S ; $\Psi_m(t, q)$ — фундаментальний розв'язок Лапласа.

При цьому ППШ визначається з рішення інтегро-диференціального рівняння:

$$-g(t) + div_s \mu_s^* grad \int_S g(q) \Psi_m(t, q) dS_q = div_s \mu_s^* grad \vec{H}_{0s} \quad (4)$$

Перша основна ідея розробленого ММГЕ полягає в дискретизації рівняння (4) інтегро-інтерполяційним методом [6, 7] шляхом інтегрування по ділянці поверхні ΔS_j ($j = 1, \dots, N$). При цьому, переходячи від поверхневих інтегралів до контурних, одержуємо:

$$\begin{aligned} - \int_S g(t) dS_t + \int_{L_j} \mu_s^*(l) \left[\frac{\partial}{\partial n_l} \int_S g(q) \Psi_m(t, q) dS_q \right] dl = \\ = div_s \mu_s^* grad_s \vec{H}_{0s} \end{aligned} \quad (5)$$

де n_l - зовнішня нормаль до контуру L_j , що обмежує поверхню ΔS_j .

Рівняння (5) виражає умови балансу магнітного потоку для контрольного об'єму (елемента тонкостінної конструкції), обмеженого циліндричною поверхнею з твірною L_j .

В запропонованому методі апроксимується не сама функція φ_m , а простий шар, який її визначає, тобто формально використовується розкладання φ_m по неортогональним функціям [8]. Ця друга основна ідея методу має просту фізичну інтерпретацію: простий шар замінюється системою точкових джерел з інтенсивністю $Q_j = \int_{S_j} g(t) dS_t$, розміщених в вузлах q_j ($j = 1, \dots, N$). Так як потенціал $\varphi_m(t)$ є неперервною диференційованою гладкою функцією на границі L_j всіх ділянок ΔS_j , при вказаному способі апроксимації (6) консервативність методу не порушується.

$$\varphi_m(t) = \sum_{i=1}^N Q_i \Psi_m(t, q_i) \quad (6)$$

В результаті рівняння (4) зводиться до наступної СПАР відносно значень Q_j :

$$-Q_j + \int_{L_j} \mu_s^*(l) l \frac{\partial}{\partial n_i} \sum_{i=1}^N Q_i \Psi_m(t, q_i) dl = \int_{L_j} \mu_s^*(l) H_{on}(l) dl$$

$$j = 1, \dots, N \quad (7)$$

Перепишемо рівняння (7) в компактному вигляді та поміняємо порядок додавання та інтегрування:

$$-Q_j + \sum_{i=1}^N a_{ij} Q_i = c_j \quad j = 1, \dots, N \quad (8)$$

де

$$a_{ij} = \int_{L_j} \mu_s^*(l) \frac{\partial \Psi_m(t, q_i)}{\partial n_i} dl \quad c_j = \int_{L_j} \mu_s^*(l) H_{on}(l) dl \quad (9)$$

Інтеграли в вище згаданому рівнянні зв'язують вузол q_j , де використовується фундаментальний розв'язок, з вузлом q_i ($i = 1, \dots, N$). a_{ij} та c_j часто називаються коефіцієнтами впливу. Точка q_j залишається незмінною (опорна точка) (рис. 2), в той час коли точка q_i змінюється по i -му елементу (точка інтегрування).

Контурний інтеграл (7) розраховується за формулою прямокутників на відрізках l_{jkl} ($k = 1, \dots, P_j$; $l = 1, 2$). Тоді вираз для коефіцієнтів впливу в (8) матиме вигляд:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{P_j} \sum_{l=1}^2 \mu_s^*(t_{jkl}) l_{jkl} \left. \frac{\partial \Psi_m(t, q_i)}{\partial n_{jkl}} \right|_{t_{jkl}}, \quad (10)$$

$$c_j = \sum_{k=1}^{P_j} \sum_{l=1}^2 \mu_s^*(t_{jkl}) l_{jkl} H_{on_{jkl}}, \quad (11)$$

де l_{jkl} та l_{jk2} - відрізки, що з'єднують центр мас трикутника з серединою сторін його бічних граней; \bar{n}_{jkl} та \bar{n}_{jk2} - зовнішні (відносно ΔS_j) нормальні вектори до відрізків l_{jkl} та l_{jk2} , що лежать в площині Δ_{jk} .

Після розв'язку СЛАР шуканий потенціал φ_m розраховується за формулою (6), а напруженість поля визначаються за формулами:

$$\bar{H}_m(t) = - \sum_{i=1}^N Q_i \text{grad}_i \Psi_m(t, q_i) \quad (12)$$

При $\mu_s = \infty$ вихідне рівняння (4) зводиться до інтегрального рівняння першого роду. Спектр оператора цього рівняння містить нульове власне число, яке є причиною нестійкості чисельного розв'язку СЛАР (7). Щоб запобігти нестійкості розв'язку СЛАР в ліву частину

вводимо добавку γ [9], яка змінює спектр матричного оператора:

$$-Q_j + \sum_{i=1}^N a_{ij} Q_i + \gamma = c_j \quad j = 1, \dots, N \quad (13)$$

В рівняння (13) додається умова рівності нулю сумарного магнітного заряду:

$$\int_S g(t) dt = \sum_{i=1}^N Q_i + \gamma = 0 \quad (14)$$

СЛАР (14) в матричному вигляді:

$$[A]\{Q\} = \{C\} \quad (15)$$

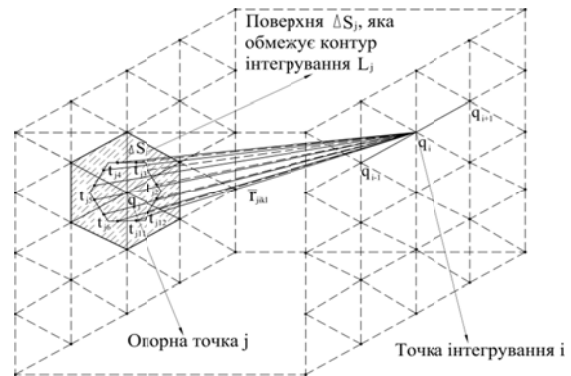


Рис. 2. Апроксимація тривимірної поверхні при розрахунку коефіцієнтів впливу

Матриця A - це вироджена матриця. Для її розв'язку найефективніше використовувати метод найменших квадратів, а в якості ортогонального розкладання використовувати SVD (singular value decomposition) або сингулярне розкладання.

Після сингулярного розкладання матриця A матиме вигляд:

$$A = USV^T \quad (16)$$

де S — матриця такого ж розміру, як і матриця A , у котрій елементи, що лежать на головній діагоналі — це сингулярні числа (а всі елементи, які не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю); U і V — це дві унітарні матриці, що складаються з лівих і правих сингулярних векторів відповідно.

СЛАР (15) з урахуванням (16) матиме вигляд:

$$[U][S]\{Q\} = \{C\}[V] \quad (17)$$

Тепер отриману СЛАР можна вирішити за допомогою методу найменших квадратів.

Розроблений ММГЕ складається з наступних кроків: на першому етапі відбувається триангуляція поверхні

заданого об'єкта; обчислення коефіцієнтів a_{ij} матриці A ; обчислення коефіцієнтів c_j вектору C ; сингулярне розкладання матриці (16); розрахунок значень інтенсивності Q_j в опорних точках q_j ; розрахунок

магнітного потенціалу та напруженості індукованого поля в будь-якій точці простору за формулами (18) і (19) відповідно:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \Psi_m(t, q_i) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{P_j} \frac{Q_i}{\sqrt{(x_t - x_i)^2 + (y_t - y_i)^2 + (z_t - z_i)^2}} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{mx} &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{P_j} \frac{Q_j(x_t - x_j)}{\sqrt[3]{(x_t - x_j)^2 + (y_t - y_j)^2 + (z_t - z_j)^2}} \\ H_{my} &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{P_j} \frac{Q_j(y_t - y_j)}{\sqrt[3]{(x_t - x_j)^2 + (y_t - y_j)^2 + (z_t - z_j)^2}} \\ H_{mz} &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{P_j} \frac{Q_j(z_t - z_j)}{\sqrt[3]{(x_t - x_j)^2 + (y_t - y_j)^2 + (z_t - z_j)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

На базі розробленого ММГЕ була створена програма для розрахунку індукованого магнітного поля тонкостінних конструкцій в тривимірному просторі Mesh_lab, алгоритм якої наведено на рис. 3.

Програма, реалізована мовою C++ з використанням Open Source бібліотеки GNU GSL. Алгоритм програми Mesh_lab складається з наступних основних блоків:

- *Триангуляція поверхні заданого об'єкта (тонкостінної конструкції).* Будується поверхнева конформна триангуляція області за допомогою портативних бібліотек Ani3D [10]. Вхідна інформація: параметри об'єкта і крок триангуляції. Вихідна інформація: файл mesh.out, що містить кількість точок розбиття (nV) і їх координати, кількість трикутників (faces) і номери вершин, що входять в кожен трикутник. Також, виводиться поверхнева трикутна сітка заданого об'єкта на екран.
- *Формування масивів для обробки результатів триангуляції, які зберігаються в файлі mesh.out.*
- *Формування матриці A.* Функція get_A () обчислює елементи матриці A в кожній j-тій точці (опорна точка) розбиття поверхні і знаходить коефіцієнт впливу a_{ij} від цієї точки на інші i-ті точки (точки інтегрування) за формулою (10).
- *Формування матриці C.* Функція get_C () обчислює елементи векторів C в кожній точці розбиття поверхні за формулою (11).
- *Визначення інтенсивності точкових джерел Q.* Функція get_X () формує матриці і вектори для розрахунку інтенсивності точкових джерел Q_j і

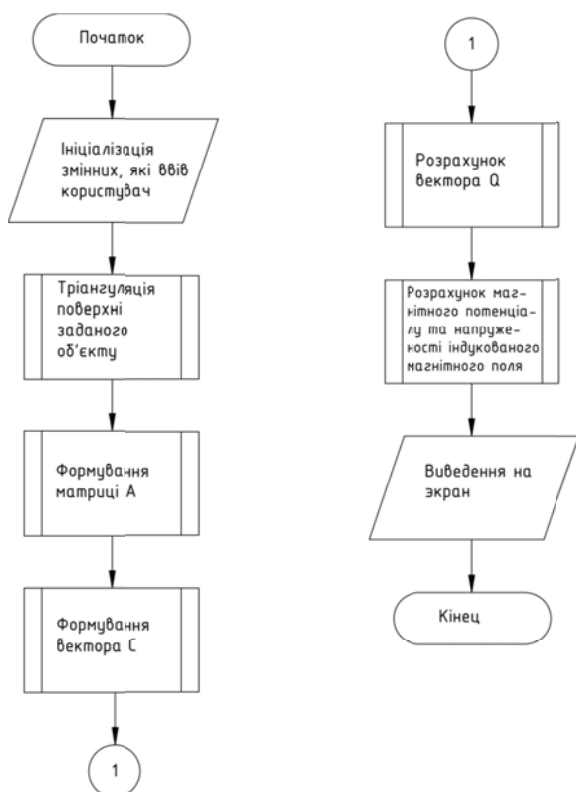


Рис. 3 Алгоритм роботи програми

викликає функції `sl_linalg_SV_decomp ()` і `gsl_linalg_SV_solve ()` з бібліотеки GNU GSL; `sl_linalg_SV_decomp ()`, розраховує сингулярне розкладання матриці (16), де S — діагональна матриця такого ж розміру, як матриця A , у якій елементи, що лежать на головній діагоналі - це сингулярні числа; U та V — це унітарні матриці, що складаються з лівих і правих сингулярних векторів відповідно. Функція `gsl_linalg_SV_solve ()` вирішує СЛАР (16). Результати розрахунку зберігаються в вектор Q і записуються в файл `result.txt`.

- Обчислення індукваного магнітного поля в заданій точці простору. Функція `calc_field()` обчислює

значення потенціалу φ_m за формулою (18) і напруженості \vec{H}_m за формулою (19) в заданій точці простору.

Детальніше зупинимось на алгоритмі формування матриці A , який зображений на рис. 4.

В першу чергу функція `get_A()` ініціалізує масив для зберігання елементів матриці A , розміром $nV \times nV$. Далі читаємо координати поточної вершини та розраховуємо коефіцієнт впливу між цією вершиною та усіма іншими вершинами за формулою (10). Для цього навколо кожної вершини розраховується елемент ΔS_j , який складається з трикутників, що примикають до цієї вершини. Межа контуру — це межа елемента ΔS_j

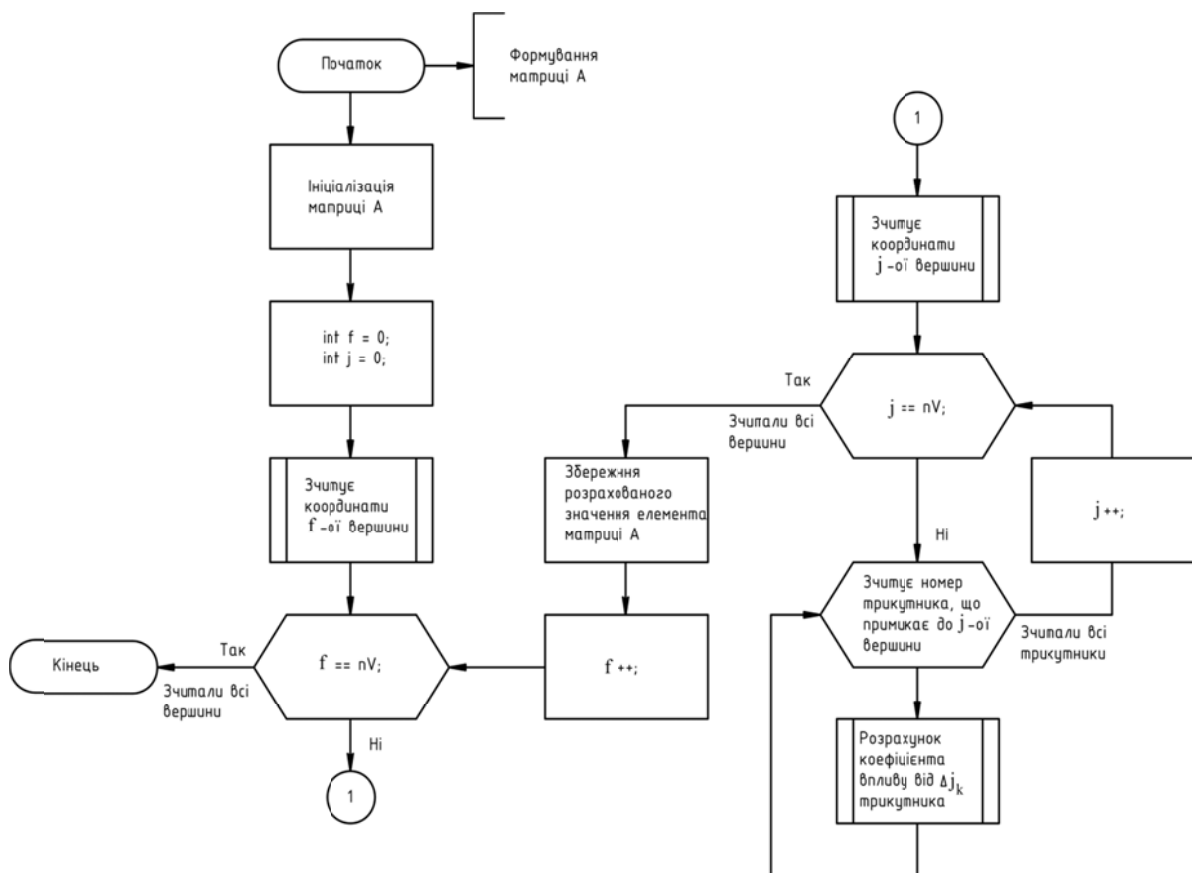


Рис. 4. Алгоритм формування матриці A .

Розглянемо роботу розробленого ММГЕ на прикладі. Розрахуємо магнітну індукцію залізної труби, зовнішній радіус $r_1 = 1\text{м}$, внутрішній радіус $r_2 = 0,7\text{м}$, довжина труби $l = 8\text{м}$, магнітна проникність заліза

$\mu = 400$. Знаходиться в зовнішньому полі $H_{0x} = 0\text{ А/м}$, $H_{0y} = 1\text{ А/м}$, $H_{0z} = 0\text{ А/м}$. Вісь труби співпадає з віссю z . Центр труби співпадає з початком координат.

Напруженість магнітного поля була розрахована на відстані 2 м від осі циліндру ($y = 2\text{ м}, z = 0\text{ м}$) на відрізьку з координатами по осі абсцис $[-5;5]$ метрів (рис. 5а). Значення індукованої магнітної напруженості \vec{H}_m були розраховані за допомогою розробленого ММГЕ (рис. 5б). Отримані значення були перевірені за допомогою МСЕ в програмі ANSYS (рис. 5в). На рис. 5в зображено значення напруженості результуючого поля $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_m$. Як видно на рис. 5, значення індукованої магнітної напруженості \vec{H}_m тонкостінного циліндру, розрахованих на основі ММГЕ, були підтверджені результатами напруженості \vec{H} , отриманими в ANSYS.

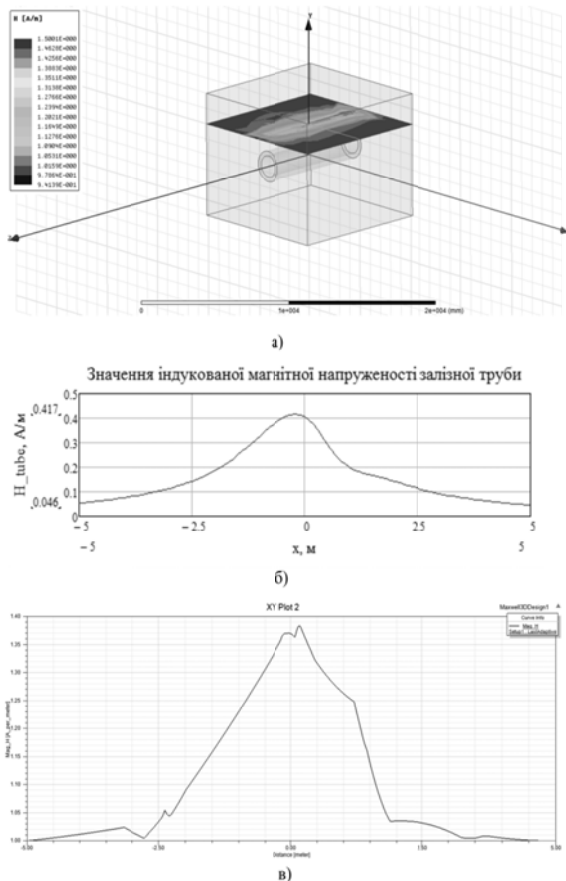


Рис. 5. Розрахунок магнітного поля тонкостінного циліндру.

ЛІТЕРАТУРА

1. Pashkovskij A.I. Chislenno-analiticheskie metody standartnyh jelementov dlja modelirovanija stacionarnyh fizicheskih polej v linejnyh kusochno-odnorodnyh i nelinejnyh sredah: avtoreferat dis. doktor tehn. nauk. — Novoчерkassk, 2014. — 36 s.
2. Katsikadelis, John T The Boundary Element Method for Engineers and Scientists 2nd Edition. — Academic Press, 2016, 464 p.

ВИСНОВКИ

Запропоновано новий актуальний модифікований метод граничних елементів та алгоритм розв'язання задач індукованого магнітного поля тонкостінних конструкцій. ММГЕ базуються на методі граничних елементів та методі вторинних джерел.

Застосування ММГЕ дозволяє підвищити точність та швидкість розрахунку індукованого магнітного поля будь-якої конфігурації. На базі розробленого ММГЕ було розроблено алгоритм, на базі якого була створена програма для розрахунку індукованого магнітного поля тонкостінних конструкцій в тривимірному просторі Mesh_lab. Необхідно підкреслити, що сфера застосування розробленого методу величезна. Це і визначення магнітного поля морських суден, виявлення підводних човнів і мін, виявлення підводних копалин, процес неруйнівного контролю виробів магнітним методом та інше.

Розроблений ММГЕ, на відміну від класичного МГЕ, не вимагає наявності матриці фундаментальних розв'язків. Для цього були розроблені універсальні коефіцієнти впливу, за допомогою яких можна розв'язувати задачі з довільною геометрією. Представлений ММГЕ позбавлений вище зазначених недоліків МГЕ і МСЕ, тому, в порівнянні з ними, перспектива його використання набагато вище.

Розроблена програма для розрахунку індукованого поля тонкостінних конструкцій за допомогою ММГЕ може бути інтегрована в програмний комплекс Gmsh. Цей комплекс містить чотири модулі для опису геометрії, створення сітки і подальшої обробки розв'язку задачі (візуалізації результатів). Gmsh підтримує параметричне введення і володіє сучасними механізмами візуалізації. На базі цієї програми планується створити нову САПР, що володіє всіма засобами візуалізації і повної автоматизації, що відповідає всім сучасним вимогам.

3. Filippov D.M. Razvitie metoda vtorychnyh istochnikov dlja modelirovaniya ploskparallel'nogo magnitnogo polja jelektromagnitnyh sistem: avtoreferat dis. kand. tehn. nauk. — Har'kov, 2013. — 24 s.
4. Cejtin L.A. Ob opredelenii magnitnyh i jelektricheskikh polej tonkih sloev i oboloček. — Zhurnal tehnicheckoj fiziki, 1958, t. 28, vyp.6, s. 1326 – 1329.
5. Krasnov I.P. Oreshenii zadach nekotoryh granichnyh zadach teorii garmonicheskikh funkcij. — Diffirencial'nye uravnenija, 1975, t. XI, № 11, s. 2052 – 2066.
6. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Vvedenie v proekcionno-setochnye metody. — M.: Nauka, 1981, 416 s.
7. Patankar S. Chislennye metody reshenija zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti. — M.: Jenergoatomizdat, 1984, 152 s.
8. Aleksidze M.A. Reshenie granichnyh zadach metodom razlozhenija po neortogonal'nym funkcijam. M.: Nauka, 1978, 352 s.
9. Belocerkovskij S.M., Lifanov I.K. Chislennye metody v singuljarnyh integral'nyh uravnenijah. — M.: Nauka, 1978, 352 s.
10. Danilov A. A. Sposoby postroenija trjohmernih poverhnostnyh trianguljacij i tetrajedral'nyh setok // Nauchno-tehnicheckij vestnik SPbGU ITMO. 2010. T. 65, № 1. S. 87–92.

Рецензент: *д.т.н., проф. Сис В. Б.*
Херсонський національний технічний університет