АНАЛИЗ МОДИФИКАЦИЙ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ЭКСПЕРТНЫХ СУЖДЕНИЙ

УДК 004.82:519.816

ШВЕД Алена Владимировна
к.т.н., доцент (без ученого звания) кафедры инженерии программного обеспечения Черноморского национального университета им. Петра Могилы, E-mail: helenashv@mail.ru
Научные интересы: методы анализа данных, математическое моделирование, информационные технологии, системы поддержки принятия решений

ВВЕДЕНИЕ

На практике принятие обоснованных решений невозможно без учета накопленного опыта и знаний специалистов и базируется на применении современных математических методов экспертных оценок. Несмотря на существующее разнообразие методов экспертных оценок до настоящего времени не существует научно обоснованных рекомендаций по их применению, поскольку происходит постоянное усложнение задач экспертизы, появляются новые математические методы, модели и информационные технологии, с помощью которых осуществляется анализ и обработка экспертной информации.

Практика принятия решений в быстро изменяющихся условиях, при уменьшении времени, предоставляемого для принятия решений, представляет собой творческую и ответственную функцию управления, и очень часто осуществляется в условиях неопределенности различного типа, которая характеризуется наличием неполноты, неточности, противоречивости, нечеткости исходных данных. Задача значительно усложняется при обработке и анализе экспертной информации, формирующейся в условиях многокритериальности, особенно при решении слабоструктурированных задач, т.е. таких задач, в которых превалируют качественные, неформализованные факторы. Примерами подобного рода задач является принятие стратегических решений экономического и политического характера, планирование научных исследований и разработок, конкурсный отбор проектов и др.

Все это порождает многообразие методов качественного анализа данных и сводит задачи выбора к многокритериальным, многоальтернативным задачам принятия решений в условиях неопределенности.

Среди методов оценки и сравнения многокритериальных альтернатив в последнее время большую популярность получил метод анализа иерархий (*Analytic Hierarchy Process* – AHP), впервые предложенный Т. Саати в работе [1].

Метод анализа иерархий (МАИ) является процедурой иерархического представления элементов, суть которого состоит в декомпозиции проблемы, на все более простые составляющие части и дальнейшей обработке последовательности суждений лица, принимающего решение (ЛПР), по парным сравнениям.

Достоинством метода МАИ является направленность на сравнение реальных альтернатив. Он может применятся в тех случаях, когда эксперты (или ЛПР) не могут дать абсолютные оценки альтернатив по критериям, а пользуются более слабыми сравнительными измерениями.

Основным недостатком методов, в основе которых лежат процедуры попарного сравнения, является то, что они могут быть использованы для небольшого числа сравниваемых элементов. Метод Т. Саати МАИ не лишен ряда недостатков, из которых следует указать на следующие:

– с ростом числа сравниваемых попарно элементов ($n \geq 6$) достаточно часто трудно достигнуть высокого уровня согласованности локальных приоритетов;

– при больших n приходится строить большое число обратносимметричных матриц;

– МАИ работает только с жесткими оценками альтернатив и не допускает неопределенности в суждениях экспертов или ЛПР (при построении матриц парных сравнений эксперту не разрешается отвечать «не знаю» или «не уверен»).

Анализ публикаций

В настоящее время существует значительное количество модификаций МАИ. В настоящее время предложены модификации классического метода парных сравнений, позволяющие моделировать неточность и неопределенность в оценках экспертов, как на этапе выявления их предпочтений, так и на этапе получения векторов локальных приоритетов [2]: на основе точечных экспертных оценок; на основе стохастических экспертных оценок; на основе нечетких оценок экспертов; на основе интервальных оценок экспертов.

Модификации метода анализа иерархий, позволяющие учитывать неточность и нечеткость в оценках экспертов, и обрабатывать нечетки матрицы попарных сравнений можно классифицировать по следующим критериям [3]: методы, позволяющие обрабатывать как согласованных, так и не согласованные нечеткие матрицы парных сравнений, и методы, позволяющие получать точечные или интервальные значения вектора приоритетов.

Первые попытки получения вектора приоритетов из нечетких матриц парных сравнений (МПС), элементами которых являются треугольные числа, были предприняты в работе [4]. Позже Бакли [5] предложил метод нахождения значений вектора локальных приоритетов из нечетких матриц парных сравнений, представленных трапециевидными нечеткими числами. В работе [6] впервые использованы техники нахождения нечетких весов из нечетких МПС непосредственно в методе МАИ. Метод, предложенный в работе Чанга [7, 8] позволяет получать точечные значения вектора приоритетов из нечетких МПС, элементами которых являются треугольные числа. Существенным недостатком метода является возможность получение нулевых значений вектора приоритетов. В работах [9–13] описана группа методов, в основе которых лежит процедура дефаззификации нечеткой МПС для получения значений вектора приоритетов. Недостатком данных методов является трудоемкость вычислений. Методы, предложенные в [14–16], позволяют получать интервальные оценки вектора приоритетов на основе нечеткого метода наименьших квадратов. Среди недостатков такого подхода можно указать на следующие: большое количество возможных вариантов решений, и отсутствие оценки согласованности нечеткой МПС. Для преодоления указанных недостатков в работе [17] предложен метод нечеткого программирования предпочтений (МНПП) и модифицированный метод МНПП.

Постановка задачи

Целью работы является сравнительный анализ и рассмотрение модификаций метода анализа иерархий на основе математического аппарата нечеткой логики.

Изложение основного материала

Постановка задачи, решаемой с помощью метода МАИ, заключается в следующем. Имеется общая цель (или цели) решения задачи; критерии оценки альтернатив; альтернативы. Требуется выбрать лучшую альтернативу.

Рассмотрим основные положения классического метода МАИ:

1. Выполняется структуризация задачи в виде иерархической структуры с несколькими уровнями: цели – критерии – альтернативы.

В рамках данного этапа определяются множество исследуемых элементов (объектов, альтернатив) $A = \{A_i \mid i = \overline{1,n}\}$ и множество критериев $K = \{K_j \mid j = \overline{1,m}\}$, относительно которых осуществляется выбор.

2. Выполняются попарные сравнения элементов каждого уровня. В результате формируются матрицы парных сравнений между критериями и между альтернативами относительно каждого из критериев, вида

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{2n} & 1 & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & 1 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $a_{ij} = 1/a_{ji}, \forall\, i, j = \overline{1,n}$; a_{ij} – экспертные предпочтения, высказанные в рамках вербальной шкалы: равная предпочтительность – 1, средняя степень предпочтения – 3, умеренно сильное предпочтение – 5, очень сильно (очевидное) предпочтение – 7, абсолютное предпочтение – 9; значения 2, 4, 6, 8 – промежуточные степени превосходства, между каждой градацией [1]; n – количество анализируемых объектов.

Для оценивания m объектов экспертизы эксперту необходимо выполнить m(m-1)/2 парных сравнений.

3. Для каждой сформированной матрицы рассчитывается вектор локальных приоритетов, используя один из подходов предложенных в [1].

Вычисленный из матрицы парных сравнений собственный вектор приемлем в том случае, если ОС ≤ 0.10. Для матриц порядка n = 3, желательно выполнение условия ОС ≤ 0.05, и для n = 4 – ОС ≤ 0.08. Если отношение согласованности (ОС) превышает значение 0.10, то необходимо глубже изучить проблему и пересмотреть суждения в соответствии с фундаментальной шкалой.

4. Проверка согласованности элементов матрицы (1) посредством подсчета отношения согласованности (ОС)

$$ОС=ИС / СИ, \quad (2)$$

где n – число сравниваемых элементов; ИС = $(\lambda_{max}-n)/(n-1)$ индекс согласованности; $\lambda_{max}=(\sum_{j=1}^{n_1} b_j)\cdot\omega_1+(\sum_{j=1}^{n_2} b_j)\cdot\omega_2+\ldots+(\sum_{j=1}^{n_n} b_j)\cdot\omega_n$ – максимальное собственное число; СИ – случайный индекс [1].

5. Подсчитывается количественный индикатор качества каждой из альтернатив и выбирается наилучшая альтернатива. Синтез полученных коэффициентов важности осуществляется по формуле

$$U_i=\sum_{j=1}^{m} w_j r_{ij}, \quad (3)$$

где U_i – показатель качества i-ой альтернативы; w_j – вес j-го критерия; r_{ij} – важность i-ой альтернативы по j-му критерию.

Лучшим считается тот выбор, у которого значение показателя U_i является максимальным среди аналогичных значений для всех альтернатив.

В 1985 Бакли [5] предложил модификацию метода анализа иерархий, позволяющую обрабатывать нечеткие экспертные матрицы парных сравнений, элементы которых представлены трапециевидными нечеткими числами.

Пусть эксперт, оценивает значимость одного элемента иерархии по отношению к другому трапециевидными нечеткими числами $\tilde{a}_{ij}=(a_{ij}^1,a_{ij}^2,a_{ij}^3,a_{ij}^4)$, $a_{ij}^1<a_{ij}^2<a_{ij}^3<a_{ij}^4$.

Тогда результаты парных сравнений могут быть представлены в форме матрицы вида

$$(\tilde{A})=\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n}\\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{pmatrix} \quad (4)$$

где $\tilde{a}_{ij}=1/\tilde{a}_{ji}$, $\tilde{a}_{ii}=(1,1,1,1)\ \forall\ i,j=\overline{1,n}$; $\tilde{a}_{ij}=(a_{ij}^1,a_{ij}^2,a_{ij}^3,a_{ij}^4)$ – нечеткие экспертные предпочтения, формируются в рамках вербальной шкалы, выражающей степень превосходства одного элемента над другим [18], таблица 1.

Таблица 1

Трапециевидная нечеткая шкала

Вербальная шкала	$\tilde{a}_{ij}$	$\tilde{a}_{ji}$
Одинаковая значимость	(1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1)
Слабая значимость	(2, 5/2, 7/2, 4)	(1/4, 2/7, 2/5, 1/2)
Сильная значимость	(4, 9/2, 11/2, 6)	(1/6, 2/11, 2/9, 1/4)
Очень сильная значимость	(6, 13/2, 15/2, 8)	(1/8, 2/15, 2/13, 1/6)
Абсолютная значимость	(8, 17/2, 9, 9)	(1/9, 1/9, 2/17, 1/8)

Над каждым нечетким числом $\tilde{a}_p=(a_p^1,a_p^2,a_p^3,a_p^4)$, $\tilde{a}_k=(a_k^1,a_k^2,a_k^3,a_k^4)$ могут быть выполнены операции:

$$\tilde{a}_p\otimes\tilde{a}_k=(a_p^1\times a_k^1,a_p^2\times a_k^2,a_p^3\times a_k^3,a_p^4\times a_k^4);$$

$$\tilde{a}_p\oplus\tilde{a}_k=(a_p^1+a_k^1,a_p^2+a_k^2,a_p^3+a_k^3,a_p^4+a_k^4);$$

$$\tilde{a}_p^{-1}=(\frac{1}{a_p^4},\frac{1}{a_p^3},\frac{1}{a_p^2},\frac{1}{a_p^1}).$$

Для нахождения значений весов локальных приоритетов Баркли предложил использовать метод, заключающийся в следующем.

1. Определить геометрическое среднее значений каждой строки матрицы (4):

$$\widetilde{z}_i = \left[\prod_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}\right]^{1/n} \tag{5}$$

где $\prod_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{1}; \prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{2}; \prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{3}; \prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{4}\right)$.

2. Вычислить значения вектора приоритетов, как

$$w_i = \widetilde{z}_i \otimes \left[\sum_{j=1}^{n} \widetilde{z}_j\right]^{-1}; \tag{6}$$

где

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \widetilde{z}_j\right]^{-1} = \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j^4}; \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j^3}; \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}; \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j^1}\right).$$

Определим функцию принадлежности $\mu_{w_i}(x)$, табл. 2.

Таблица 2

Значения функции принадлежности

x	$\mu_{w_1}(x)$
$\leq (a_i^1 / a^4)$	0
$\geq (a_i^4 / a^1)$	0
$(a_i^2 / a^3) \leq x \leq (a_i^3 / a^2)$	1
$(a_i^1 / a^4) \leq x \leq (a_i^2 / a^3)$	$\alpha \in [0,1]$
$(a_i^3 / a^2) \leq x \leq (a_i^4 / a^1)$	$\alpha \in [0,1]$

где $a^t = \sum_{i=1}^{n} a_i^t$.

Если $x \in \left[\frac{a_i^1}{a^4}; \frac{a_i^2}{a^3}\right]$ или $x \in \left[\frac{a_i^3}{a^2}; \frac{a_i^4}{a^1}\right]$, значение x может быть рассчитано как

$$x = \begin{cases} f_i(\alpha)/g(\alpha), & \text{если} \quad x \in [a_i^1/a^4, a_i^2/a^3] \\ g_i(\alpha)/f(\alpha), & \text{если} \quad x \in [a_i^3/a^2, a_i^4/a^1] \end{cases}$$

где $f(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\alpha)$, $f_i(\alpha) = \left[\prod_{j=1}^{n}((a_{ij}^2 - a_{ij}^1)\alpha + a_{ij}^1)\right]^{1/n}$,

$$g(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} g_i(\alpha),\ g_i(\alpha) = \left[\prod_{j=1}^{n}((a_{ij}^3 - a_{ij}^4)\alpha + a_{ij}^2)\right]^{1/n},$$

$$\alpha \in [0,1].$$

Рассмотрим числовой пример использования метода анализа иерархий на основе модификации Бакли для решения задачи выбора поставщика торговой сети, рис. 1.

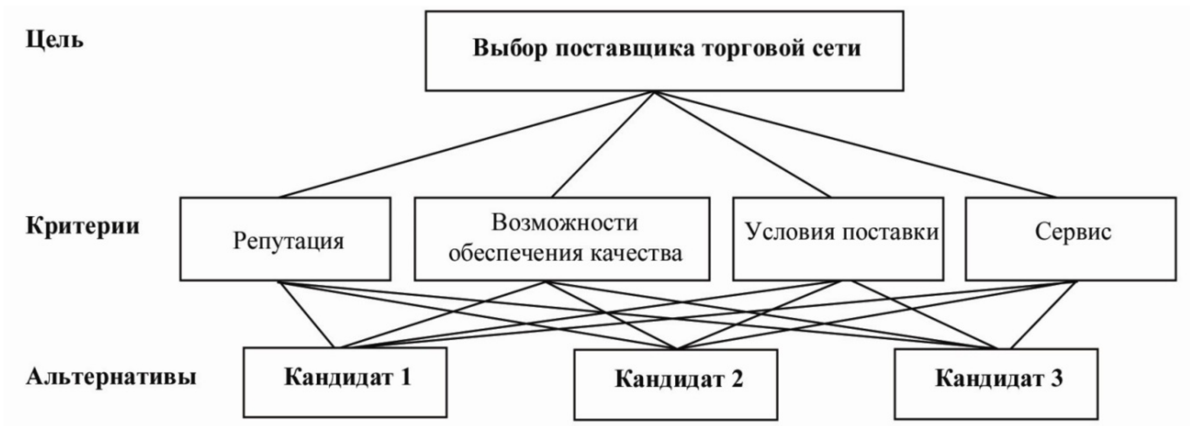

Рисунок 1 - Иерархия для примера «выбор поставщика»

Пусть имеется множество альтернатив $A = \{A_i \mid i = \overline{1,n}\}$, n=3, каждая из которых представляет собой потенциального поставщика, и множество критериев $K = \{K_j \mid j = \overline{1,m}\}$, m=4, относительно которых осуществляется выбор поставщика. В качестве критериев оценки поставщиков рассмотрим следующие [19]: репутация поставщика (K_1); производственные (технологические) возможности обеспечения качества (K_2); условия поставки (K_3); послепродажное взаимодействие (сервис) (K_4).

Результаты парных сравнений альтернатив по заданным критериям:

$$\widetilde{A}_{K_1}=\begin{pmatrix} (1,1,1,1) & \left(\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{2}{17},\frac{1}{8}\right) & \left(2,\frac{5}{2},\frac{7}{2},4\right) \\ \left(8,\frac{17}{2},9,9\right) & (1,1,1,1) & \left(4,\frac{9}{2},\frac{11}{2},6\right) \\ \left(\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{6},\frac{2}{11},\frac{2}{9},\frac{1}{4}\right) & (1,1,1,1) \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{A}_{K_2}=\begin{pmatrix} (1,1,1,1) & \left(4,\frac{9}{2},\frac{11}{2},6\right) & \left(\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{2}{17},\frac{1}{8}\right) \\ \left(\frac{1}{6},\frac{2}{11},\frac{2}{9},\frac{1}{4}\right) & (1,1,1,1) & \left(\frac{1}{8},\frac{2}{15},\frac{2}{13},\frac{1}{6}\right) \\ \left(8,\frac{17}{2},9,9\right) & \left(6,\frac{13}{2},\frac{15}{2},8\right) & (1,1,1,1) \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{A}_{K_3}=\begin{pmatrix} (1,1,1,1) & \left(6,\frac{13}{2},\frac{15}{2},8\right) & \left(\frac{1}{6},\frac{2}{11},\frac{2}{9},\frac{1}{4}\right) \\ \left(\frac{1}{8},\frac{2}{15},\frac{2}{13},\frac{1}{6}\right) & (1,1,1,1) & \left(\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right) \\ \left(4,\frac{9}{2},\frac{11}{2},6\right) & \left(2,\frac{5}{2},\frac{7}{2},4\right) & (1,1,1,1) \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{A}_{K_4}=\begin{pmatrix} (1,1,1,1) & \left(8,\frac{17}{2},9,9\right) & \left(4,\frac{9}{2},\frac{11}{2},6\right) \\ \left(\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{2}{17},\frac{1}{8}\right) & (1,1,1,1) & \left(\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{6},\frac{2}{11},\frac{2}{9},\frac{1}{4}\right) & \left(2,\frac{5}{2},\frac{7}{2},4\right) & (1,1,1,1) \end{pmatrix}$$

Результаты парных сравнений критериев:

$$\widetilde{K}=\begin{pmatrix} (1,1,1,1) & \left(6,\frac{13}{2},\frac{15}{2},8\right) & \left(\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{8},\frac{2}{15},\frac{2}{13},\frac{1}{6}\right) \\ \left(\frac{1}{8},\frac{2}{15},\frac{2}{13},\frac{1}{6}\right) & (1,1,1,1) & \left(\frac{1}{6},\frac{2}{11},\frac{2}{9},\frac{1}{4}\right) & \left(4,\frac{9}{2},\frac{11}{2},6\right) \\ \left(2,\frac{5}{2},\frac{7}{2},4\right) & \left(4,\frac{9}{2},\frac{11}{2},6\right) & (1,1,1,1) & \left(\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right) \\ \left(6,\frac{13}{2},\frac{15}{2},8\right) & \left(\frac{1}{6},\frac{2}{11},\frac{2}{9},\frac{1}{4}\right) & \left(2,\frac{5}{2},\frac{7}{2},4\right) & (1,1,1,1) \end{pmatrix}$$

Значения среднего геометрического $\widetilde{z}_i=(a,b,c,d)$ для каждой строки матрицы $\widetilde{A}_{K_1}$ приведены в табл.3.

Таблица 3

Значения среднего геометрического

	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0.6057	0.6525	0.744	0.7937
2	3.1748	3.3693	3.6717	3.7798
3	0.3467	0.3731	0.4463	0.5
$\sum$	4.1272	4.3949	4.862	5.0735

Таким образом, для матрицы $\widetilde{A}_{K_1}$ имеем $\widetilde{z}=(a,b,c,d)$=(4.1272, 4.3949, 4.862, 5.0735).

Для матрицы $\widetilde{A}_{K_2}$ имеем $\widetilde{z}=(a,b,c,d)$=(4.6725, 4.8918, 5.2611, 5.4154).

Для матрицы $\widetilde{A}_{K_3}$ имеем $\widetilde{z}=(a,b,c,d)$=(3.315, 3.6344, 4.2605, 4.5812).

Для матрицы $\widetilde{A}_{K_4}$ имеем $\widetilde{z}=(a,b,c,d)$=(4.171, 4.4549, 4.9524, 5.1766).

Для матрицы $\widetilde{K}$ имеем $\widetilde{z}=(a,b,c,d)$=(3.5737, 3.9302, 4.7026, 5.1537).

Рассчитаем r_{j1} ($j=\overline{1,3}$) – важность j-ой альтернативы по 1-му критерию.

$$r_{11}=\left(\frac{a_1}{d},\frac{b_1}{c},\frac{c_1}{b},\frac{d_1}{a}\right)=\text{(0.6057/5.0735, 0.6525/4.862, 0.744/4.3949, 0.7937/4.1272)}=$$
$$=\text{(0.1194, 0.1342, 0.1693, 0.1923)}.$$

$$r_{21}=\left(\frac{a_2}{d},\frac{b_2}{c},\frac{c_2}{b},\frac{d_2}{a}\right)=\text{(0.6258, 0.693, 0.8354, 0.9158)}.$$

r_{31}=(0.0683, 0.0767, 0.1015, 0.1211).

Рассчитаем значения r_{j2}, $j=\overline{1,3}$ – важность j-ой альтернативы по 2-му критерию.

r_{12}=(0.1409, 0.1509, 0.1768, 0.1944).

r_{22}=(0.0508, 0.055, 0.0663, 0.0742).

r_{32}=(0.6711, 0.7239, 0.8323, 0.8903).

Рассчитаем значения r_{j3}, r_{j4}, $j=\overline{1,3}$ – важность j-ой альтернативы по 3-му и 4-му критериям.

r_{13}=(0.2183, 0.2482, 0.3262, 0.3801).

r_{23}=(0.0688, 0.079, 0.1086, 0.1318).

r_{33}=(0.4366, 0.5259, 0.7374, 0.8701).

r_{14}=(0.6133, 0.6803, 0.8242, 0.9062).

r_{24}=(0.0585, 0.0639, 0.081, 0.0951).

r_{34}=(0.1339, 0.1553, 0.2064, 0.2397).

Рассчитаем значения весов критериев

w_1 = (0.1277, 0.15, 0.2097, 0.2528).

w_2 = (0.1043, 0.1222, 0.1676, 0.1979).

w_3 = (0.2307, 0.2847, 0.4239, 0.5208).

w_4 = (0.2307, 0.2788, 0.3954, 0.4706).

Подсчитываем количественный индикатор качества каждой из альтернатив:

$$w_1 * r_{11} = \{(a_1 a_2)[L_1, L_2], b_1 b_2, c_1 c_2, (d_1 d_2)[R_1, R_2]\}, \quad (7)$$

где $r_{11} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$; $w_1 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$;

$L_1 = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$; $L_2 = a_2(b_1 - a_1) + a_1(b_2 - a_2)$;

$R_1 = (d_1 - c_1)(d_2 - c_2)$; $R_2 = -[d_2(d_1 - c_1) + d_1(d_2 - c_2)]$.

Таблица 4

Рассчитанные значения $w_j r_{1j}$

	$w_j r_{1j}$
1	{0.0152[0.0003, 0.0046], 0.0201, 0.0355, 0.0486[0.001, -0.0141]}
2	{0.0147[0.0002, 0.0036], 0.0184, 0.0296, 0.0385[0.0005, -0.0094]}
3	{0.0504[0.0016, 0.0187], 0.0707, 0.1383, 0.1979[0.0052, -0.0649]}
4	{0.1415[0.0032, 0.0449], 0.1897, 0.3259, 0.4265[0.0062, -0.1067]}

Исходя из значений приведенных в таблице 10, сформируем нечеткие значения показателя качества альтернативы A_1:

$$U_1 = \{0.2218[0.0053, 0.0717], 0.2989, 0.5293, 0.7115[0.0129, -0.1951]\}.$$

Значение функции принадлежности для U_1 приведены в таблице 5.

Таблица 5

Значения функции принадлежности

x	$\mu_{U_1}(x)$
≤ 0.2218	0
≥ 0.7115	0
$0.2989 \le x \le 0.5293$	1
$0.2218 \le x \le 0.2989$	$\alpha \in [0,1]$
$0.5293 \le x \le 0.7115$	$\alpha \in [0,1]$

Если $x \in [0.2218, 0.2989]$, то $x = (0.0053)\alpha^2 + (0.0717)\alpha + 0.2218$.

Если $x \in [0.5293, 0.7115]$, то $x = (0.0129)\alpha^2 + (-0.1951)\alpha + 0.7115$.

Рассчитаем нечеткие значения показателей качества альтернатив A_2 и A_3:

$$U_2 = \{0.1146[0.0024, 0.034], 0.151, 0.2644, 0.3596[0.007, -0.1022]\}.$$

$$U_3 = \{0.2103[0.007, 0.0757], 0.293, 0.5549, 0.7728[0.018, -0.2358]\}.$$

В 1992 Чанг [7] предложил метод получения значений вектора локальных приоритетов в нечеткой МПС, представленной треугольными нечеткими числами (ТНЧ), позволяющий получать точечные оценки значений вектора приоритетов.

Пусть эксперт, оценивает значимость одного элемента иерархии по отношению к другому треугольными нечеткими числами $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3)$, ($a_{ij}^1 < a_{ij}^2 < a_{ij}^3$).

Тогда результаты парных сравнений могут быть представлены в форме матрицы вида (4), где $\tilde{a}_{ij} = 1/\tilde{a}_{ji}$, $\tilde{a}_{ii} = (1,1,1)$ $\forall\ i, j = \overline{1, n}$; $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3)$ – нечеткие экспертные предпочтения, формирующиеся в рамках вербальной шкалы, выражающей степень превосходства одного элемента над другим [20], таблица 6.

Таблица 6

Треугольная нечеткая шкала

Вербальная шкала	$\tilde{a}_{ij}$	$\tilde{a}_{ji}$
Одинаковая значимость	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)
Некоторое преобладание значимости	(1/2, 1, 3/2)	(2/3, 1, 2)
Слабая значимость	(1, 3/2, 2)	(1/2, 2/3, 1)
Сильная значимость	(3/2, 2, 5/2)	(2/5, 1/2, 2/3)
Очень сильная значимость	(2, 5/2, 3)	(1/3, 2/5, 1/2)
Абсолютная значимость	(5/2, 3, 7/2)	(2/7, 1/3, 2/5)

Суть метода Чанга заключается в следующем.

1. Найти сумму элементов (оценок) каждой строки и нормировать полученное значение

$$\widetilde{S}_i = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} \otimes \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} \right]^{-1}; \qquad (8)$$

где $$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{1}; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2}; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{3} \right);$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} \right]^{-1} = \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{3}}; \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2}}; \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{1}} \right)$$

.

2. Вычислить степень вероятности $\widetilde{S}_i \geq \widetilde{S}_j$, исходя из выражения

$$V(\widetilde{S}_i \geq \widetilde{S}_j) = \begin{cases} 1, & a_j^2 \geq a_i^2; \\ 0, & a_i^1 \geq a_j^3; \\ \dfrac{a_i^3 - a_j^1}{(a_i^3 - a_i^2) + (a_j^2 - a_j^1)}, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (9)$$

3. Вычислить степень вероятности $\widetilde{S}_i$ по отношению к остальным (n-1) нечетким оценкам

$$V(\widetilde{S}_i \geq \widetilde{S}_j \mid j = \overline{1,n}, i \neq j) = \min_{j=1,n,i\neq j} V(\widetilde{S}_i \geq \widetilde{S}_j), \qquad (10)$$

.

4. Вычислить значения вектора приоритетов

$$w_i = \frac{V(\widetilde{S}_i \geq \widetilde{S}_j \mid j = \overline{1,n}, i \neq j)}{\sum_{k=1}^{n} V(\widetilde{S}_i \geq \widetilde{S}_j \mid j = \overline{1,n}, i \neq j)}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (11)$$

Рассмотрим числовой пример использования метода анализа иерархий на основе модификации Чанга для решения задачи выбора поставщика торговой сети, рис. 1.

Результаты парных сравнений альтернатив по заданным критериям:

$$\widetilde{A}_{K_1} = \begin{pmatrix} (1,1,1) & \left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right) & \left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right) \\ \left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right) & (1,1,1) & \left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right) \\ \left(\frac{2}{3},1,2\right) & \left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right) & (1,1,1) \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{A}_{K_2} = \begin{pmatrix} (1,1,1) & \left(\frac{2}{3},1,2\right) & \left(\frac{5}{2},3,\frac{7}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right) & (1,1,1) & \left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right) \\ \left(\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right) & \left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right) & (1,1,1) \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{A}_{K_3} = \begin{pmatrix} (1,1,1) & \left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right) & \left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right) \\ \left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right) & (1,1,1) & \left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right) \\ \left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right) & \left(\frac{2}{3},1,2\right) & (1,1,1) \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{A}_{K_4} = \begin{pmatrix} (1,1,1) & \left(2,\frac{5}{2},3\right) & \left(\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right) \\ \left(\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right) & (1,1,1) & \left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right) \\ \left(\frac{5}{2},3,\frac{7}{2}\right) & \left(\frac{2}{3},1,2\right) & (1,1,1) \end{pmatrix}$$

Результаты парных сравнений критериев:

$$\widetilde{K} = \begin{pmatrix} (1,1,1) & \left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right) & \left(2,\frac{5}{2},3\right) & \left(\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right) \\ \left(1,\frac{3}{2},2\right) & (1,1,1) & \left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right) & \left(\frac{2}{3},1,2\right) \\ \left(\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{2}{3},1,2\right) & (1,1,1) & \left(\frac{5}{2},3,\frac{7}{2}\right) \\ \left(2,\frac{5}{2},3\right) & \left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right) & \left(\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right) & (1,1,1) \end{pmatrix}$$

Рассчитаем значения вектора локальных приоритетов на основе данных матрицы $\widetilde{A}_{K_1}$:

$$\widetilde{S}_1 = (3.00, 4.00, 5.00) \otimes (1/12.83, 1/10.00, 1/7.97) = (0.23, 0.40, 0.63);$$
$$\widetilde{S}_2 = (2.90, 3.50, 4.17) \otimes (1/12.83, 1/10.00, 1/7.97) = (0.23, 0.35, 0.52);$$
$$\widetilde{S}_3 = (2.07, 2.50, 3.67) \otimes (1/12.83, 1/10.00, 1/7.97) = (0.16, 0.25, 0.46).$$

$V(\widetilde{S}_1 \geq \widetilde{S}_2) = 1$; $V(\widetilde{S}_1 \geq \widetilde{S}_3) = 1$; $V(\widetilde{S}_3 \geq \widetilde{S}_1) = 0.60$; $V(\widetilde{S}_3 \geq \widetilde{S}_2) = 0.70$;
$V(\widetilde{S}_2 \geq \widetilde{S}_1) = 0.85$; $V(\widetilde{S}_2 \geq \widetilde{S}_3) = 1$;

$\omega_1 = 0.41;\quad \omega_2 = 0.34;\quad \omega_3 = 0.25;\qquad \sum_{i=1}^{3}\omega_i = 1.$

В результате сформируем вектор локальных приоритетов альтернатив, полученный на основе оценок эксперта по критерию K_1: $r_1 = (0.41; 0.34; 0.25)$.

Аналогичным образом, получим значения вектора приоритетов:

– по критерию K_2: $r_2 = (0.58; 0.42; 0.00)$;

– по критерию K_3: $r_3 = (0.61; 0.16; 0.23)$;

– по критерию K_4: $r_4 = (0.36; 0.06; 0.58)$.

Вектор локальных приоритетов критериев $w = (0.23; 0.24; 0.28; 0,25)$.

Подсчитываем количественный индикатор качества каждой альтернативы:

$$U_1 = \sum_{j=1}^{n} w_j r_{j1} = 0.41 \times 0.23 + 0.58 \times 0.24 + 0.61 \times 0.28 + 0.36 \times 0.25 = 0.49;$$

$U_2 = 0.24$; $\quad U_3 = 0.27$.

Из приведенных расчетов видно, что альтернатива A_1 является лучшим выбором.

В 1996 Чанг [8] предложил метод получения значений вектора локальных приоритетов в нечеткой МПС использующий меру энтропии Шеннона и принцип максимальной энтропии (максимальной неопределенности).

В 1948 г. К. Шеннон [21] определил в качестве меры неопределённости использовать

$$H(p) = -\sum_{j=1}^{n} p(\omega)\log_2 p(\omega)\,. \qquad (12)$$

Мера К. Шеннона (12), характеризующая неопределённость множества случайных событий $\Omega = \{\omega_i \mid i = \overline{1,n}\}$ в целом, получается усреднением частных неопределенностей связанной со всеми случайными событиями множества Ω, и является обобщением меры Хартли [22] для независимо реализуемых событий множества Ω. Мера (12) получила название энтропия. Энтропия (неопределенность) максимальна, если все случайные события имеют одинаковую вероятность: $H_{max} = \log_2|\Omega|$.

Пусть результаты экспертного опроса в виде совокупности индивидуальных экспертных оценок можно представить в форме матрицы размерности $n \times m$ вида:

$$(\tilde{B}) = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \cdots & \tilde{b}_{1m} \\ \tilde{b}_{12} & \tilde{b}_{22} & \cdots & \tilde{b}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{1n} & \tilde{b}_{2n} & \cdots & \tilde{b}_{nm} \end{pmatrix} \qquad (13)$$

где $\tilde{b}_{ij} = (b_{ij}^1, b_{ij}^2, b_{ij}^3)$ – оценка эксперта i-ого объекта (альтернативы) относительно j-го критерия, сформированная в рамках заданной шкалы предпочтений. В данной матрице каждая строка содержит экспертные оценки какого-либо объекта по всем критериям, а столбец – оценки всех объектов по одному из критериев.

Суть метода Чанга заключается в следующем.

1. Получить нечеткие экспертные оценки критериев $\tilde{W} = \{\tilde{w}_j \mid j = \overline{1,n}\}$, где $\tilde{w}_j = (w_j^1, w_j^2, w_j^3)$.

2. Сформировать взвешенную нечеткую матрицу экспертных предпочтений

$$(\tilde{Z}) = \begin{pmatrix} \tilde{z}_{11} & \tilde{z}_{12} & \cdots & \tilde{z}_{1n} \\ \tilde{z}_{12} & \tilde{z}_{22} & \cdots & \tilde{z}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{z}_{1n} & \tilde{z}_{2n} & \cdots & \tilde{z}_{nn} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

где $\tilde{z}_{ij} = \tilde{w}_j \otimes \tilde{b}_{ij}$.

При заданном уровне α, значения матрицы (14) трансформируются в интервалы вида

$$(\tilde{Z}_\alpha) = \begin{pmatrix} [z_{11l}^\alpha, z_{11u}^\alpha] & \cdots & [z_{1nl}^\alpha, z_{1nu}^\alpha] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [z_{n1l}^\alpha, z_{n1u}^\alpha] & \cdots & [z_{nnl}^\alpha, z_{nnu}^\alpha] \end{pmatrix} \qquad (15)$$

где $z_{ijl}^\alpha = w_{il}^\alpha b_{ijl}^\alpha$, $z_{iju}^\alpha = w_{il}^\alpha b_{iju}^\alpha$, $\alpha \in [0,1]$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

3. Преобразуем полученные интервальные значения в точечную оценку

$$(\hat{Z}) = \begin{pmatrix} \hat{z}_{11}^{\alpha} & \hat{z}_{12}^{\alpha} & \cdots & \hat{z}_{1n}^{\alpha} \\ \hat{z}_{21}^{\alpha} & \hat{z}_{22}^{\alpha} & \cdots & \hat{z}_{2n}^{\alpha} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \hat{z}_{n1}^{\alpha} & \hat{z}_{n2}^{\alpha} & \cdots & \hat{z}_{nn}^{\alpha} \end{pmatrix} \quad (16)$$

где $\hat{z}_{ij}^{\alpha} = (1-\lambda) z_{ijl}^{\alpha} + \lambda z_{iju}^{\alpha}$, λ – коэффициент оптимизма эксперта, $\lambda \in [0,1]$.

4. Рассчитываем значения энтропии для каждой строки матрицы (16)

$$H_i = -\sum_{j=1}^{n} (f_{ij}) \log_2 (f_{ij}) . \quad (17)$$

Значения f_{ij} могут быть получены следующим образом

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{z}_{11}^{\alpha}}{s_1} & \frac{\hat{z}_{12}^{\alpha}}{s_1} & \cdots & \frac{\hat{z}_{1n}^{\alpha}}{s_1} \\ \frac{\hat{z}_{21}^{\alpha}}{s_2} & \frac{\hat{z}_{22}^{\alpha}}{s_2} & \cdots & \frac{\hat{z}_{2n}^{\alpha}}{s_2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hat{z}_{n1}^{\alpha}}{s_n} & \frac{\hat{z}_{n2}^{\alpha}}{s_n} & \cdots & \frac{\hat{z}_{nn}^{\alpha}}{s_n} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $s_k = \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{kj}^{\alpha}$.

5. Рассчитываем значения вектора локальных приоритетов

$$w_i = \frac{H_i}{\sum_{j=1}^{n} H_j}, \ i = \overline{1,n} . \quad (19)$$

Рассмотрим числовой пример использования метода анализа иерархий на основе модификации Чанга для решения задачи выбора поставщика торговой сети, рис. 1.

Результаты экспертных оценок представлены в виде матрицы:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,3,5) & (1,3,5) & (7,9,9) & (5,7,9) \\ (3,5,7) & (1,1,3) & (1,3,5) & (1,3,5) \\ (1,1,3) & (5,7,9) & (1,1,3) & (3,5,7) \end{pmatrix} \end{array}$$

Значения вектора локальных приоритетов критериев представлены в форме нечетких оценок:

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4) = ((1,3,5), (7,9,9), (3,5,7), (1,1,3)).$$

Сформируем взвешенную матрицу, перемножив значения нечеткой матрицы экспертных оценок и нечетких оценок критериев:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,3,5)\otimes(1,3,5) & (7,9,9)\otimes(1,3,5) & (3,5,7)\otimes(7,9,9) & (1,1,3)\otimes(5,7,9) \\ (1,3,5)\otimes(3,5,7) & (7,9,9)\otimes(1,1,3) & (3,5,7)\otimes(1,3,5) & (1,1,3)\otimes(1,3,5) \\ (1,3,5)\otimes(1,1,3) & (7,9,9)\otimes(5,7,9) & (3,5,7)\otimes(1,1,3) & (1,1,3)\otimes(3,5,7) \end{pmatrix} \end{array}$$

Пусть $\alpha = 0.8$, тогда $\tilde{Z}_{\alpha} = [z_L^{\alpha}, z_R^{\alpha}] = [(m-l)\alpha + l, -(u-m)\alpha + u]$, где $z^{\alpha} = (l, m, u)$.

$$\tilde{z}_{11}^{0.8} = [(m-l)0.8 + l, -(u-m)0.8 + u] =$$
$$= [(3-1)\times 0.8 + 1, -(5-3)\times 0.8 + 5] \otimes [(3-1)\times 0.8 + 1, -(5-3)\times 0.8 + 5] = [6.76, 11.6];$$

$$\tilde{z}_{12}^{0.8} = [(3-1)\times 0.8 + 1, -(5-3)\times 0.8 + 5] \otimes [(5-3)\times 0.8 + 3, -(7-5)\times 0.8 + 7] = [12, 18.4] .$$

Результаты расчетов представлены в виде матрицы:

$$\tilde{Z}_{\alpha} = \begin{pmatrix} [6.76; 11.6] & [39.6; 48.6] & [39.6; 48.6] & [6.6; 10.4] \\ [12; 18.4] & [8.6; 12.6] & [12; 18.4] & [2.6; 4.76] \\ [2.6; 4.76] & [56.8; 66.6] & [4.6; 7.56] & [4.76; 7.56] \end{pmatrix}$$

Рассчитаем соответствующие точечные оценки альтернатив при заданном коэффициенте $\lambda = 0.5$ и значения f_{ij} :

$$(\hat{Z}) = \begin{pmatrix} 9.16 & 44.1 & 44.1 & 8.48 \\ 15.2 & 10.6 & 15.2 & 3.68 \\ 3.68 & 61.7 & 6.08 & 6.08 \end{pmatrix};$$

$$f_{ij} = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.42 & 0.42 & 0.08 \\ 0.34 & 0.24 & 0.34 & 0.08 \\ 0.05 & 0.8 & 0.08 & 0.08 \end{pmatrix}.$$

Полученные значения энтропии и агрегированные веса альтернатив приведены в таблице 7.

Из приведенных расчетов видно, что альтернатива A_2 является лучшим выбором при заданных $\alpha = 0.8$, $\lambda = 0.5$.

Таблица 7

	H_i	w_i
A_1	1.65	0.36
A_2	1.85	0.40
A_3	1.05	0.24

ВЫВОДЫ

В статье рассмотрен ряд модификаций метода анализа иерархий на основе математического аппарата нечеткой логики для решения задач многокритериального принятия решений, позволяющий учитывать неуверенность и нечеткость суждений экспертов. Рассмотренные методы позволяют получать значения вектора локальных приоритетов как из согласованных, так из несогласованных нечетких матриц парных сравнений, значения полученного вектора локальных приоритетов могут принимать вид точечных или интервальных оценок. В статье рассмотрен ряд примеров практического применения рассмотренных методов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Saati, T. L. Priniatie resheniy. Metod analiza ierarkhiy / T. L. Saati. – M. : Radio i sviaz, 1993. – 320 s.
2. Dubrovin, V. I. Metod polucheniya vektora prioritetov iz nechetkih matric parnyh sravnenij / V. I. Dubrovin, N. A. Mironova // Iskusstvennyj intellekt. 2009. – No. 3. – S. 464–470.
3. Nedashkovskaia, N. I. Metodologiia obrabotki nechetkoy ekspertnoy informatsii v zadachakh predvideniia. Ch. 1 / N. I. Nedashkovskaia, N. D. Pankratova // Problemy upravleniia i informatiki. 2007. – № 2. – S. 40–55.
4. Van Laarhoven, P. J. M. A fuzzy extension of Saaty's priority theory / P. J. M. Van Laarhoven, W. Pedrycz // Fuzzy Sets and Systems. 1983. – Vol. 11. – No. 3. – P. 229–241.
5. Buckley, J. J. Fuzzy hierarchical analysis / J. J. Buckley // Fuzzy Sets and Systems. 1985. – 17(3). – P. 233–247.
6. Stam, A. Artificial neural network representations for hierarchical preference structures / A. Stam, S. Minghe, M. Haines // Computers and Operations Research. 1996. – Vol. 23. – No. 12. – P. 1191–1201.
7. Chang, D. Y. Extent analysis and synthetic decision, optimization techniques and applications. Vol. 1. / D. Y. Chang. – Singapore: World Scientific. 1992. – 352 p.
8. Chang, D. Y. Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP / D. Y. Chang // EuropeanJournal of Operational Research. 1996 – Vol. 95. – P. 649–655.
9. Prabjot, K. A fuzzy ANP-based approach for selection ERP vendors / K. Prabjot, N. C. Mahanti // International Journal of Soft Computing. – 2008. – Vol. 3. – No.1. – P. 24–32.
10. Cheng, R. W. A fuzzy ANP-based approach to evaluate medical organizational performance / R. W. Cheng, CheWei Chang, Hung-Lung Lin // International and Management Sciences. – 2008. – Vol. 19. – No. 1. – P. 53–74.
12. Liao, S. H. Evaluating anti-armor weapon using rankin fuzzy numbers / S. H. Liao, K.C. Lu, C. H. Cheng // Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences. – 2000. – Vol. 16. – No. 2. – P. 241–257.
13. Xinfan, W. Fuzzy number intuitionistic fuzzy arithmetic aggregation operators / W. Xinfan // International Journal of Fuzzy Systems. – 2008. – Vol. 10. – No. 2. – P. 92–103.
14. Ting-Yu, Chen. Importance-assessing method with fuzzy number-valued fuzzy measures and discussions on TFNs and TrFNs / Ting-Yu Chen, Tai-Chun Ku // International Journal of Fuzzy Systems. – 2008. – Vol. 10. – No. 2. – P. 104–111.
15. Ruoning, Xu. Fuzzy least-squares priority method in the analytic hierarchy process / Xu. Ruoning // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – Vol. 3. – No.112. – P. 395–404.
16. Ruoning, Xu. Fuzzy logarithmic least squares ranking method in analytic hierarchy process / Xu Ruoning, Zhai Xiaoyan // Fuzzy Sets and Systems. – 1996. – Vol.2. – No.77. – P. 175–190.
17. Ying-Ming, Wang. A modified fuzzy logarithmic least squares method for fuzzy analytic hierarchy process / Ying-Ming Wang, M. S. Taha Elhag, Zhongsheng Hua // Fuzzy Sets and Systems. – 2006. – Vol. 23. – No. 157. – P. 3055–3071.
18. Mikhailov, L. Evaluation of services using a fuzzy Analityc Hierarchy Process / L. Mikhailov, P. Tsvetinov // Applied Soft Computing. – 2004. – No. 5. – P. 23–33.
19. Mou, Q. Method of multi-attribute decision-making and its application / Q. Mou. – Nanning: Guangxi University, 2004.
20. Sysoliatin, A. V. Vybor postavshika v zakupochnoy deiatelnosti torgovoy firmy / A. V. Sysoliatin // Nauka-rastudent.ru. – 2014. – No. 12 / [Elektronnyy resurs] – Rezhym dostupa. – URL: http://nauka-rastudent.ru/12/2256/
21. Abdel-Kader, M. G. Evaluating investments in advanced manufacturing technology: A fuzzy set theory approach / M. G. Abdel-Kader, D. Dugdale // British Journal of Accounting. 2001. – Vol. 33. – P. 455–489.
22. Shannon, C. E. The mathematical theory of communication / C. E. Shannon // The Bell System Technical Journal. 1948. – Vol. 27. No. 3&4. – P. 379–423, 623–656.
23. Hartley, R. V. L. Transmission of information / R. V. L. Hartley // The Bell System Technical Journal. 1928. – Vol. 7. – No. 3. – P. 535–563.

Рецензент: *д.т.н., проф. Коваленко І. І.*
Чорноморський національний університет імені Петра Могили