УДК 614.8

Г.В. Іванець, к.т.н., доцент кафедри, НУЦЗУ,
Є.І. Стецюк, ст. викладач, НУЦЗУ,
І.О. Толкунов, к.т.н., доцент, нач. каф., НУЦЗУ

МЕТОДИКА ОЦІНКИ ПЕРІОДУ ПЕРІОДИЧНОЇ СКЛАДОВОЇ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ЗМІНИ УЗАГАЛЬНЕНОГО ПАРАМЕТРУ НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ ПРИРОДНОГО ХАРАКТЕРУ

(представлено д-ром техн. наук Чубом І.А.)

Розглянуто методику оцінки періоду періодичної складової процесу зміни узагальнених параметрів надзвичайних ситуацій природного характеру з врахуванням дії всіх дестабілізуючих факторів, а також запропоновано алгоритм оцінки значень періодичної складової.

Ключові слова: надзвичайна ситуація, випадковий процес, узагальнений параметр, періодична складова, χ^2 розподіл, метод найбільшої правдоподібності.

Постановка проблеми. При плануванні заходів цивільного захисту в системі Державної служби України з надзвичайних ситуацій (ДСНС України) для локалізації та ліквідації можливих наслідків надзвичайних ситуацій (НС) досить часто виникає проблема щодо наявності в розпорядженні фахівців, які займаються цим питанням, прогнозних оцінок та їх узагальнюючих характеристик. Наявні дослідження не в повній мірі дозволяють отримувати достовірні розрахункові дані, які використовуються при плануванні заходів цивільного захисту в ДСНС України для ефективного залучення сил і засобів підрозділів оперативно-рятувальної служби цивільного захисту щодо локалізації та ліквідації можливих наслідків надзвичайних ситуацій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз літературних джерел з означеної проблематики довів, що в більшості з них в якості узагальненого параметру процесу виникнення надзвичайних ситуацій природного характеру розглядається кількість НС, наприклад, природного характеру за деякий проміжок часу. Із врахуванням дії всіх дестабілізуючих факторів процес зміни узагальненого параметру представлений у вигляді адитивної суміші систематичної складової, яка характеризує незворотні процеси дрейфу параметрів, періодичної і випадкової складової [1]. Якщо систематична складова випадкового процесу оцінена, тоді виникає завдання оцінки періодичної складової цього процесу. Періодична функція цілком визначається частотою w і значеннями коефіцієнтів ряду Фур'є [2].

Для виділення періодичних складових можна використовувати і різні перетворення вихідних функцій $Y(t)$, які посилюють роль періодичної компоненти в перетвореному процесі [2]. Усі подібні селекційні або сфокусовані перетворення можна поділити на два класи: лінійні та нелінійні перетворення. Застосування таких перетворень дає можливість виділити періодичну складову будь-якої частоти із заданого діапазону.

Слід відзначити, що вихідна функція може містити декілька періодичних складових. Кожну з виявлених періодичних складових можна екстраполювати на довільний час випередження Δt. У випереджений час $t+\Delta t$, беручи суму екстрапольованих періодичних складових, дістаємо передбачене значення періодичної частини процесу. Але в усіх цих методах необхідно чітко знати частоту (період) періодичної складової.

Постанова завдання та його вирішення. З огляду на вищезазначене, виникає задача оцінки періоду періодичної складової. Для її вирішення в роботі розроблено методику оцінки періоду періодичної складової випадкового процесу зміни узагальнених параметрів НС природного характеру і розроблено алгоритм оцінки та прогнозу періодичної складової цього процесу.

Нехай у випадковій реалізації вимірюваного узагальненого параметру зміни НС природного характеру Y міститься періодична і випадкова складові. Модель вимірюваного узагальненого параметру представимо у вигляді

$$Y = 1 \otimes X + \xi, \tag{1}$$

де $Y = (y_0, y_1, ..., y_{n-1})^T$ – матриця значень реалізації узагальненого параметру розмірністю $n \times 1$; $1 = (1,1,1,...,1)^T$ – матриця розмірністю $q \times 1$; $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1})^T$ – матриця значень випадкової складової розмірністю $n \times 1$; $X = (x_0, x_1, ..., x_{p-1})^T$ – матриця значень періодичної складової за період розмірністю $p \times 1$; $\otimes$ – символ добутку Кроннекера; $n = q \cdot p$ – довжина реалізації вимірюваного параметру; p – період періодичної складової; q – кількість періодів періодичної складової в реалізації.

Будемо вважати, що ξ – Гауссівський випадковий дискретний процес з нульовим середнім і некорельованими значеннями.

Знайдемо логарифм відношення правдоподібності [3, 4].

$$\ln l(Y) = \ln \frac{P_y(Y / X \neq 0)}{P_y(Y / X = 0)}, \tag{2}$$

де $P_y(Y/X \neq 0) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} \exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\left(Y - 1\otimes X\right)^T \left(Y - 1\otimes X\right)\right\}$ – умовна щільність розподілу дискретних значень Y при наявності в реалізації періодичної складової (функція правдоподібності);

$P_y(Y/X = 0) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} \exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2} Y^T Y\right\}$ – умовна щільність розподілу дискретних значень Y при відсутності в реалізації періодичної складової, у вигляді

$$\ln l(Y) = \frac{1}{2\sigma^2}\left[2Y^T\left(1\otimes X\right) - q(X^T X\right]. \qquad (3)$$

В подальшому логарифм відношення правдоподібності будемо позначати $\ln l$.

Для оцінки значень періодичної складової X і дисперсії σ^2 продиференціюємо вираз (3) за всіма варіюємими x і прирівняємо до нуля. Одержимо:

$$Y^T\left(1\otimes dX\right) = q\cdot X\cdot dX\,, \qquad (4)$$

де dX – матриця розмірності $p\times 1$.

Будемо вважати, що елементи матриці dX незалежні. Тоді можна рахувати, що любий елемент цієї матриці dx_i не дорівнює нулю, а решта дорівнюють нулю.

Враховуючи це вираз (4) перепишемо у вигляді

$$Y^T \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ dx_i \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ dx_i \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = q\cdot X^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ dx_i \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

де dx_i – елемент матриці dX на місці з номером і.

Якщо розписати матриці Y^T і X^T за елементами і підставити у вираз (5), тоді можна знайти оцінки значень періодичної складової у вигляді

$$\hat{x}_i = \frac{1}{q}\sum_{s=0}^{q-1} y_{i+sp} \ , \tag{6}$$

де $i = 0,1,2,...,(p-1)$.

Оцінку дисперсії $\hat{\sigma}^2$ виконаємо методом максимальної апостеріорної щільності ймовірності, якщо підставимо оцінки $\hat{x}_i$ у вираз для $P_y(Y/X \neq 0)$, потім знайдемо $\ln(Y/X \neq 0)$ і методом підбору $\hat{\sigma}^2$ знайдемо максимум $P_y(Y/X \neq 0)$, що буде відповідати максимуму $\ln P_y(Y/X \neq 0)$. Легко переконатися, що

$$\ln P_y(Y/X \neq 0)_{/X=\hat{X}} = -n\ln\sqrt{2\pi} - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(Y - 1\otimes X)^T(Y - 1\otimes X).$$

Для знаходження екстремального значення необхідно знайти похідну і прирівняти її до нуля. Рішенням одержаного рівняння і буде оцінка дисперсії

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(Y - 1\otimes\hat{X}\right)^T\left(Y - 1\otimes\hat{X}\right). \tag{7}$$

Далі знайдемо максимум $\ln l$ при умові, що матриця $X = \hat{X}$. З виразу (3) при $X = \hat{X}$ одержимо

$$\sigma^2 \ln l_{\ /X=\hat{X}} = Y^T\left(1\otimes\hat{X}\right) - \frac{q}{2}\left(\hat{X}^T\hat{X}\right). \tag{8}$$

Якщо знайти складові і підставити їх у вираз (8), тоді одержимо

$$\sigma^2 \ln l_{\ /X=\hat{X}} = \frac{q}{2}\left(\hat{X}^T\hat{X}\right). \tag{9}$$

Якщо випадкова складова в реалізації вимірюваного параметру відсутня, тоді у відповідністю з моделлю (1) маємо

$$Y = 1\otimes X \ ,$$

а

$$\sigma^2 \ln l_{/X=\overline{\overline{X}}} = \frac{q}{2}\sum_{i=0}^{p-1} x_i^2 .$$

Якщо в реалізації вимірюваного параметру відсутня періодична складова, тоді

$$Y = \xi ,$$

а

$$\sigma^2 \ln l_{/X=\hat{X}} = \frac{q}{2}\left(\hat{X}^T \hat{X}\right),$$

де $\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ : \\ \hat{x}_{p-1} \end{pmatrix}$ – матриця оцінок періодичної складової.

Слід відзначити, що оцінки знаходяться так, як і раніше

$$\hat{x}_i = \frac{1}{q}\sum_{s=0}^{q-1} y_{i+sp} = \frac{1}{q}\sum_{s=0}^{q-1} \xi_{i+sp} .$$

Враховуючи це маємо

$$\sigma^2 \ln l_{/X=\hat{X}} = \frac{1}{2q}\left\{\left(\sum_{s=0}^{q-1} \xi_{0+sp}\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{s=0}^{q-1} \xi_{p-1+sp}\right)^2\right\}.$$

Введемо до розгляду випадкову величину

$$D = \sigma^2 \ln l_{/X=0} ,$$

(умова $X = 0$, що в реалізації відсутня періодична складова). Тоді із виразу (9) слідує, що

$$D = \sum_{i=0}^{p-1}\left(\sqrt{\frac{q}{2}}\,\hat{x}_i\right)^2 . \qquad (10)$$

Із аналізу виразу (10) можна зробити висновок, що D – це ніщо інше, як сума p квадратів випадкової величини $\left(\sqrt{\frac{q}{2}}\hat{x}_i\right)$, які мають нормальний закон розподілу з нульовими середніми. Знайдемо коваріацію

$$\left\langle \sqrt{\frac{q}{2}}\hat{x}_i \sqrt{\frac{q}{2}}\hat{x}_{i'} \right\rangle = \frac{1}{2q}\sum_{s=0}^{q-1}\sum_{s'=0}^{q-1}\left\langle \xi_{i+sp}\xi_{i'+sp} \right\rangle .$$

Далі дамо відповідь на питання – чи можуть при різних i і i' співпадати номери ξ, тобто чи може мати місце рівність $i+sp=i'+s'p$. Це відповідає тому, що $s' = s+\frac{i-i'}{p}$. Але так як i і i' змінюються від 0 до $p-1$, а s і s' цілі числа та $\frac{\left|i-i'\right|}{p}<1$, то і s' не може дорівнювати s при $i \neq i'$. А це означає, що випадкові величини $\left(\sqrt{\frac{q}{2}}\hat{x}_i\right)$ із різними номерами незалежні, а їх дисперсії дорівнюють $\frac{q}{2} < \hat{x}_i^2 >= \frac{\sigma^2}{2}$.

Тепер від розгляду випадкової величини D перейдемо до розгляду випадкової величини d із одиничною дисперсією виду

$$d=\frac{2}{\sigma^2}D=\sum_{i=0}^{p-1}\left(\sqrt{\frac{q}{\sigma^2}}\hat{x}_i\right)^2 . \tag{11}$$

З виразу (11) видно, що d – це сума квадратів p випадкових незалежних нормально розподілених величин $\left(\sqrt{\frac{q}{\sigma^2}}\hat{x}_i\right)$ з нульовими середніми і одиничними дисперсіями, а це означає що вона підпорядковується розподілу χ^2 із p ступенями волі [4, 5]. Тоді $\langle d\rangle = p$, а $\sigma_d^2 = 2p$.

З’ясувавши закон розподілу випадкової величини d можна виявляти періодичну складову, якщо виставляти пороги виявлення у відповідності з таблицями χ^2 розподілу.

На основі вище викладеного пропонується наступна методика визначення періоду і оцінки значень періодичної складової:

1. Знаходимо матриці оцінок значень періодичної складової перебором всіх можливих значень p $\left(p = 1,2,...,n\right)$

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \\ \hat{x}_{p-1} \end{pmatrix},$$

де $\hat{x}_i = \frac{1}{q}\sum_{s=0}^{q-1} y_{i+sp}$.

2. Для кожної матриці оцінок значень періодичної складової для різних p формуємо випадкові величини D

$$D = \sum_{i=0}^{p-1}\left(\sqrt{\frac{q}{2}}\,\hat{x}_i\right)^2 .$$

3. Знаходимо оцінки дисперсії $\hat{\sigma}^2$ для різних p

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(Y - 1\otimes \hat{X}\right)^T\left(Y - 1\otimes \hat{X}\right).$$

4. Підставляємо знайдені оцінки дисперсії $\hat{\sigma}^2$ для різних p у вираз логарифму відношення правдоподібності і знаходимо максимум $\ln l$:

$$\ln l(Y) = \frac{1}{2\sigma^2}\left[2Y^T\left(1\otimes X\right) - q(X^T X\right].$$

5. Для виставлення порогу виявлення введена випадкова величина d, а сам поріг виявлення визначається для даного p за таблицями розподілу χ^2 , якщо задати ймовірності помилок 1 та 2 роду.

6. Якщо максимальне значення логарифму відношення правдоподібності перевищує поріг виявлення, тоді отримуємо оцінку періоду періодичної складової $\hat{p}$.

Висновки. Запропонована методика оцінки періоду періодичної складової випадкового процесу зміни узагальнених параметрів НС природного характеру на основі методу найбільшої правдоподібності, а також алгоритм оцінки значень періодичної складової цього процесу. У випадку, якщо вихідна функція містить декілька періодичних складових, кожну з них виявляють послідовно у відповідності із запропонованою методикою.

ЛІТЕРАТУРА

1. Серебреников М.Г. Выявление скрытых периодичностей / М.Г. Серебреников, А.А. Первозванский. – М.: Наука, 1965. – 178 с.

2. Ван Дер Варден Б.Л. Математическая статистика / Б.Л. Ван Дер Варден. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 434 с.

3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 543 с.

4. Абезгауз Г.Г. Справочник по вероятностным расчетам / Г.Г. Абезгауз, А.П. Тронь, Ю.Н. Копенкин, И.А. Коровина. – М.: Воениздат, 1970. – 536 с.

Г.В. Иванец, Е.И. Стецюк, И.А. Толкунов

Методика оценки периода периодической составляющей случайного процесса изменения обобщенного параметра чрезвычайных ситуаций природного характера

В статье рассмотрена методика оценки периода периодической составляющей процесса изменения обобщенных параметров чрезвычайных ситуаций природного характера с учетом действия всех дестабилизирующих факторов, а также предложен алгоритм оценки значений периодической составляющей.

Ключевые слова: чрезвычайная ситуация, случайный процесс, обобщенный параметр, периодическая составляющая, χ^2 распределение, метод наибольшего правдоподобия.

G.V. Ivanec, E.I. Stetsyuk, I.A. Tolkunov

Methods of assessing the period of the periodic component of the random process parameter changes generalized natural emergencies

The article describes the method of estimating the period of the periodic component of the process of changing the parameters of generalized natural emergencies, taking into account the actions of all destabilizing factors, as well as an algorithm for estimating the values of the periodic component.

Keywords: emergency, random process, a generic setting, the periodic component, the χ^2 distribution, the method of maximum likelihood.