

УДК 159.955+159.956

Лідія Мойсеєнко

## ПСИХОЛОГІЯ РОЗУМІННЯ ЯК НАСКРІЗНОГО ПРОЦЕСУ ТВОРЧОГО МАТЕМАТИЧНОГО МИСЛЕННЯ

*У статті розкрито психологічну сутність процесу розуміння в творчому математичному мисленні. Описано сучасні наукові підходи до дослідження творчого мислення. Виокремлено індифікаційні ознаки мисленнєвої діяльності людини в галузі математики. Проведено аналіз процесуально-динамічного аспекту розуміння як складника процесу творчого математичного мислення, спрямованого на розв'язання математичної задачі. Доводиться наскрізний характер цього процесу і його зв'язок з прогнозуванням розв'язку та апробацією мисленнєвих результатів.*

**Ключові слова:** *творче математичне мислення, процес розуміння, процесуально-динамічний компонент розуміння творчої математичної задачі, розуміння-впізнання, розуміння-прогнозування, розуміння-пояснення, розуміння-об'єднання.*

У цій статті ми вдаємося до аналізу взаємозв'язку творчості, математичного мислення і розуміння. Конкретніше, до аналізу творчого математичного мислення, а ще конкретніше, до аналізу психології процесу розуміння у творчому математичному мисленні. Тобто, будучи доробком у дослідженні **загальної проблеми** – з'ясування психологічної сутності мисленнєвої творчості людини, ця стаття має своєю **метою** здійснити аналіз однієї зі складових творчого математичного мислення – процесу розуміння.

**Актуальність** вивчення психологією проблеми творчого мислення зумовлюється тим, що її розробка створює підґрунтя для формування особистості, що здатна вирішувати творчі нестандартні завдання. Не випадково вона привертала й привертає увагу багатьох вчених: Г.С. Костюка, С.Л. Рубінштейна, А.В. Брушлінського, О.М. Леонтьєва, О.К. Тихомирова, Д.Б. Богоявленської, Л.Л. Гурової, О.М. Матюшкіна, В.О. Моляко, Я.О. Пономарьова, А.Ф. Есаулова, І.С. Якиманської і ще багатьох інших. Їх праці є вагомим внеском у розробку основних теоретичних і практичних положень щодо сутності творчого мислення, його процесів. Проте, сьогодні в психології ще не склалася струнка теорія цієї важливої проблеми.

Водночас вже протягом усього ХХ століття спостерігається збільшення ролі математики в розвитку практично всіх наук, вона фактично стала важливою складовою пізнання, що також зумовлює актуальність дослідження становлення математичного мислення різних вікових категорій, різних фахів та різних фахових рівнів. Математизація знань – це природний процес, що дозволяє, зокрема, заощаджувати різні ресурси, потрібні для розв'язання виникаючих

проблем, тому психологія може і повинна відіграти організаційну роль у розвитку математики як різновиду наукової творчості.

Передумовою успішного виконання будь-якого виду діяльності, будь-якого мисленнєвого процесу є розуміння завдання, яке необхідно виконати. В цьому випадку можна говорити про розуміння як про "стартовий майданчик" при розв'язанні зовсім або частково нових завдань. Науковці встановили, що розуміння задачі формується в процесі її розв'язання. Розуміння являє собою не лише результат мислення, але є одним із його процесів, забезпечує успішність цього розв'язання. Тому дослідження процесу розуміння при розв'язанні різноманітних математичних задач є важливою складовою *проблеми з'ясування психологічної сутності творчого математичного мислення*.

**Аналіз наукових досліджень і публікацій.** Творча сутність людини проявляється у вирішенні проблем, труднощів, завдань, вимог. Вона багатогранна і поділяється на багато видів: наукова, технічна, літературна, музична, ігрова, навчальна, побутова, військова тощо. Зрозуміло, що такий поділ має умовний характер. Однак, як влучно зауважує Д.Б. Богоявленська: "... творчість, будучи вищим проявом феномена "Людина", найменше вивчена" [2, с. 5].

Частіше за все творчу діяльність визначають через новизну [1,6,8,12], що є емпіричним узагальненням, яке не залежить від специфіки різних форм творчості і констатує спільне в них. Поряд із цим, відмічається значущість ролі механізму мотивації [12], обсягу образних компонентів [4], зміна підходу до розв'язку творчої проблеми [12] та місця результату [18]. Найбільш значущими в дослідженні творчого мислення є праці С.Л. Рубінштейна, О.М. Леонтьєва, Л.І. Анциферової, А.В. Брушлінського, О.Я. Пономарьова, Ю.Б. Гіппенрейтер, О.М. Матюшкіна, К.О. Славської, Ю.А. Самаріна та інших. З точки зору С.Л. Рубінштейна, мислення є процесом, результати якого у вигляді понять і знань самі включаються в його подальший перебіг. Він висуває як головну ланку мислення особливу форму аналізу через синтез і називає її "основним нервом процесу мислення" [15]. Цю позицію автора підхопили О.М. Леоньєв [10], О.К. Тихомиров [16], А.В. Брушлінський [3], А.Ф. Есаулов [18] і багато інших дослідників, які дали ряд уточнень і деталізацій за таким вектором дослідження мислення взагалі і творчого зокрема.

На загал, у літературі процес творчого мислення розглядають у феноменологічному, змістовому і структурному аспектах. У першому випадку процес розв'язання творчої задачі подається як набір хаотичних "проб і помилок" і лише випадкова догадка приводить мислення до правильного розв'язку. У змістовому аспекті процес пошуку характеризується як перехід від одного бачення ситуації до іншого, як перебір варіантів. Досліджуючи *структурний аспект* при розв'язанні творчих задач, науковці виділяють основні фази, етапи,

складові процесу знаходження принципу розв'язання і його втілення. *Ми досліджували творче математичне мислення саме так. Було виділено три його складники: процеси розуміння, прогнозування, апробації і три послідовні етапи: етапи вивчення умови творчого завдання, пошуку його розв'язку, перевірки знайденого розв'язку. В свою чергу, складові процеси було поділено на ряд мікроетапів.*

Слід відзначити внесок вітчизняних психологів у розробку теорії творчого мислення [6,8,12]. Зокрема, В.О. Моляко запропонував стратегіально-системний підхід до аналізу розумової діяльності в галузі технічної творчості. Учений виділяє п'ять основних стратегій розв'язання творчих задач: стратегія пошуку аналогів; стратегія комбінаторних дій; реконструююча стратегія; універсальна стратегія; стратегія випадкових підстановок [12]. Такі стратегії охоплюють розроблені світовою психологією суттєві особливості творчого мислення.

В літературі зустрічаються різні підходи до вивчення математичної діяльності, які дещо умовно можна представити як: філософський, математичний, психологічний. Звертає на себе увагу те, що частина досліджень стосується математичної творчості. Психологічні дослідження творчих математичних процесів – це дослідження процесів, що пов'язані з розв'язанням нестандартних математичних задач, народженням математичних відкриттів, створенням нових математичних теорій. Існує ряд ґрунтовних досліджень психології математичного мислення, серед яких роботи Ж. Адамара, Г. Вейля, М. Вертгеймера, В.А. Крутецького, Д.Д. Мордухай-Болтовського, Д. Пойа, А. Пуанкаре та інших. Їх наукові праці присвячено загальній характеристиці математичного мислення на сучасному етапі розвитку математики, виявленню і опису певних етапів чи психологічних процесів мислення математика, дослідженню співвідношення усвідомленого й неусвідомленого в процесі пошуку розв'язку математичних задач тощо. Однак, більш-менш цілісної характеристики творчого математичного мислення поки що не створено.

Мислення часто розгортається як процес розв'язання задачі, тобто задача перетворюється в предмет мисленнєвої діяльності. Тому логічно досліджувати творче мислення як процес розв'язання суб'єктивно нової задачі. *Наші дослідження творчого математичного мислення базуються на аналізі пошуків розв'язку творчої математичної задачі.*

Мисленнєвий процес при розв'язанні нової математичної проблеми ототожнюється з особливим методом міркувань, що містить ряд компонентів: символічний, числовий, просторовий, логічний, інтуїтивний. Математична діяльність немислима без використання таких логічних прийомів, як порівняння, аналіз, синтез, абстрагування, узагальнення. Однак неможливо чисто логічно обґрунтувати

математичне мислення, оскільки неможливо чисто логічно визначити всі математичні поняття і психологічно неможливо проводити логічні операції без звернення до *інтуїції*. Зокрема, безсумнівним є незалежність психологічних властивостей аксіом від їх логічних властивостей. Математик, філософ, психолог Д.Д. Мордухай-Болтовський зауважує: "Інтуїція, а не формальна логіка з логічними позначеннями, являє собою ті крила, на яких ми відлітаємо у найвіддаленіші області абстракції" [13, с. 51]. *Числовий, символний компоненти* полягають в утворенні числових чи символних характеристик та вмінні їх інтерпретувати: умінні з отриманих числових даних виявити певну якісну характеристику. І, навпаки, вмінні перевести ту чи іншу якісну характеристику у правильні числові чи символні співвідношення. Особливості *просторового компонента* у математичному мисленні полягають в оперуванні просторовими математичними фігурами, образами. До такого оперування слід віднести: просторове абстрагування (виділення загального, спільного), просторове комбінування (знаходження зв'язків і відношень об'єктів у просторі) тощо. Ми аналізуємо процес розв'язання творчої математичної задачі, опираючись саме на такі компоненти.

При розв'язанні математичних проблем часто послуговуються *аналогією*. Відомий дослідник математичної творчості Д. Пойа зауважує, що багато задач часто легше розв'язувати, ніж лише одну. Д. Пойа обґрунтував процес розв'язання поставленої задачі методом спеціально придуманих додаткових задач, точніше, за допомогою ланцюга еквівалентних задач. На думку автора, допоміжна задача не гарантує розв'язку основної, але частина її розв'язку може стати частиною розв'язку основної задачі, зробити основну задачу більш зрозумілою, розширити область пошуку [14]. Цим самим автор вказує на значущість *комбінаторних дій* у математичному мисленні. Математики послуговуються методами, що ґрунтуються на *реконструкції*: методом від протилежного, метод висхідного аналізу тощо. Метод висхідного аналізу полягає в тому, що суб'єкт подумки припускає, що задача вже розв'язана. Потім він подумки "піднімається" від "розв'язку" до умови з тим, щоб пізніше пройти в оберненому напрямку і саме цей шлях буде шляхом розв'язання задачі.

Виділення таких методів пошуку розв'язку математиками дає нам право *при аналізі розв'язання творчої математичної задачі, як взірця творчого мислення людини, повною мірою застосувати стратегії пошуку розв'язку творчої задачі, запропонованої В.О. Моляко: аналогізування, комбінування, реконструкції, універсалізації та стратегії проб і помилок.*

Як правило, в задачі виділяють умову й вимогу. Умови задачі мають багатопланову характеристику, яку необхідно врахувати, вивчаючи процеси мислення при розв'язанні задач. Умова математичної задачі – це набір фактів і об'єктів, що іноді не мають

один з одним жодного очевидного зв'язку. Безпосередньо представлений в умові, набір може бути невеликим, але він доповнюється фактами іншого типу: розв'язуючи задачу, суб'єкт підходить до неї з позицій певного рівня математичних знань, додаючи до умови певні твердження, раніше відомі математичні результати (аксіоми, визначення, теореми тощо). Межі такої сукупності фактів не є чіткими, бо наперед не відомо, які знання будуть потрібні для розв'язання задачі. Щоб розв'язати задачу, перш за все необхідно вибудувати свою сукупність фактів у певну конструкцію. При цьому розв'язання є побудовою такої конструкції, що здійснюється за певними правилами і дає конкретний результат. Відповідь задачі повинна обов'язково виявитися елементом цієї конструкції.

Усе це підводить нас до значущості наступного аспекту нашого аналізу – аналізу *сутності процесу розуміння*. Увага до феномена розуміння, його природи, ролі й значення в діяльності суб'єкта є однією з характерних особливостей сучасного етапу філософських, психологічних, педагогічних досліджень. Методологія науки свідчить, що в жодній з галузей наукового пізнання розуміння не є провідним методом дослідження чи його основною метою. Розуміння – це не засіб пізнання світу, а лише засіб отримання знань про дійсність. Коли розуміння спрацьовує відносно гладко, його просто не помічають, коли ж його автоматизм перестає діяти, розуміння стає предметом роздумів, предметом вивчення.

Аналізуючи дослідження психологів по означеній проблемі, можна відмітити, що в їх роботах: а) розуміння інколи пов'язується з певним психологічним процесом мислення (Г.С. Костюк [8]), інколи розглядається як одна з форм мислення (В. Шевчук [17]), випадком мислення (Ю.К. Корнілов [7]), властивістю мислення (Л.Л. Гурова [4]); б) зустрічається точка зору, за якою мислення є компонентом розуміння (П. Зіфф [21]); в) деякі автори вважають, що розуміння не зводиться до мислення і включає в себе інші психологічні процеси (пам'ять, уява) (В.В. Знаков [5], В.О. Моляко [12], А.Б. Коваленко [6]). Саме з цих позицій проводиться аналіз процесу розуміння в даній роботі.

Багато психологів, слідом за С.Л. Рубінштейном, Г.С. Костюком вважають розуміння аналітико-синтетичною діяльністю [6, 7, 11, 12]. Намагаючись зібрати відомі напрацювання психологів про співвідношення мислення й розуміння, В.В. Знаков [5] робить висновки: розуміння може існувати без мислення (коли опирається на минулий мисленневий процес – розуміння зводиться до впізнавання); мислення можливе без розуміння (людина не завжди розуміє всі проміжні результати в процесі розв'язання задачі); не існує специфічного процесу розуміння, що відрізняється від процесу мислення; не можна говорити про розуміння як специфічний вид мислення. "... розуміння як компонент мислення, має безпосередне

відношення не до виявлення нових знань, а до їх засвоєння, вписування нового в структуру досвіду, особистісного знання суб'єкта" [5, с. 89].

В.В. Знаков експериментально доводить, що процес формування мети й постановки задачі веде до виявлення типу мисленнєвої задачі, яку в цьому випадку розв'язує суб'єкт. Тип мисленнєвої задачі спричинює виникнення у суб'єкта конкретних форм розуміння: розуміння-впізнавання, розуміння-прогнозування, розуміння-об'єднання, розуміння-пояснення. У першому випадку (розуміння-впізнавання) розуміння базується переважно на минулому досвіді, (фактори, що аналізуються, відносяться до розряду відомих чи нових). Якщо ж об'єкт розуміння новий, то суб'єкт починає зіставляти його ознаки з ознаками відомих йому об'єктів, шукати подібність між ними, відносити цей об'єкт до певного класу об'єктів (розуміння-прогнозування). Основний зміст психічної діяльності суб'єкта в цьому випадку полягає в висуванні гіпотез. Адекватність гіпотези по відношенню до реального світу визначає успішність розуміння. На наступному етапі розуміння природи предмета дослідження суб'єкт повинен спочатку вибрати найбільш суттєві ознаки предмета, накреслити коло взаємозалежних ознак, пов'язати їх у ціле, що стане основою розуміння. Ця форма розуміння – результат розв'язання суб'єктом мисленнєвої задачі конструювання цілого з частин. В.В. Знаков називає його "розуміння-об'єднання". Останній етап дослідник назвав "розуміння-пояснення". Спроби пояснити явище, що пізнавалося, виявляє недостатність розуміння, його нецілісність. Ця форма розуміння найбільш складна з описаних вище і вбирає в себе всі пізнавальні процеси, що використовувались на попередніх етапах. Словесне чи символічне пояснення є необхідним компонентом будь-якої форми розуміння, нерозривно пов'язане з ним і є його зворотною стороною [5]. В нашому дослідженні ми аналізуємо роль, місце дії та значущість виділених форм розуміння в процесі розв'язання творчої математичної задачі.

Розвиток психології мислення вніс значні корективи в уявлення про роль розуміння у розв'язанні задач. Установлено, що розуміння формується в процесі розв'язання задачі і тому його виникнення не можна віднести лише до однієї якоїсь стадії пошукового мисленнєвого процесу [5, 6, 12, 15]. Так як *розуміння* являє собою не лише результат мислення, але є одним із його процесів, то воно бере активну участь у розв'язанні задачі, забезпечує успішність цього розв'язання.

Зазначимо, що аналіз процесу розуміння математичної задачі як такої у літературі зустрічається рідко. Значний вклад у з'ясування психологічної природи феномена розуміння у творчій математичній діяльності зробив Д. Пойа. Він надавав розумінню виключної ваги в пошуковій діяльності, спрямованій на розв'язання творчої математичної задачі [14]. Дослідження процесу розуміння при

розв'язанні математичних задач проводила Л.Л. Гурова. Вчена отримала ряд психологічних оцінок цього пізнавального процесу, однак ці оцінки вона не пов'язувала з математичним характером задач [4]. В.А. Крутецький акцентує увагу на важливості "аналітико-синтетичного бачення", "аналітико-синтетичного осмислення" матеріалу задачі [9]. Трактуючи це як особливий вид сприймання, на якому базується здатність добути з даних умови задачі максимально корисну для розв'язання інформацію, автор, по суті справи, веде мову про розуміння умови задачі. Адже осмислення матеріалу, розкриття реально існуючих зв'язків предметів і явищ об'єктивної дійсності і є розумінням.

До розуміння приводить спостереження, пам'ять, уява. Але доступність форми інформації, що подається, автоматично не веде до розуміння проблеми. Суб'єкт повинен її переробити відповідним чином, долучити до власного досвіду. Аналіз цих процесів торкається різних аспектів його дослідження. Зокрема, А.Б. Коваленко, досліджуючи розуміння творчих задач, виділяє три базові складові: когнітивний, операційний, регулятивно-особистісний. До *когнітивного* компоненту автор відносить знання, попередній досвід, суб'єктивні системи смислів; до *операційного* – мисленнєві стратегії: пошук аналогів, комбінування, гнучку стратегію, продуктивну стратегію; до *регулятивно-особистісного* – мотиви діяльності, індивідуально-типологічні особливості, тип особистості, властивості мислення, рівень інтелекту [6]. Аналізуючи процес розуміння творчої математичної задачі, ми задіємо його когнітивну та операційну складові.

Таким чином, можна констатувати, що розуміння творчої задачі формується по ходу її розв'язання, а психологічна сутність процесу вбачається у зіставленні нової інформації зі старою, відомою суб'єкту, для виявлення сутності (часто прихованої) задачі через осмислення й переосмислення її змісту.

**Виклад основного матеріалу.** В цій роботі досліджується творче математичне мислення студентів технічного вузу. Експериментальна діяльність студентів полягала у розв'язанні різноманітних творчих математичних задач. В експерименті взяло участь 426 студентів Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу. Було підібрано 23 серії задач, так, щоб кожна серія сприяла вивченню певного аспекту математичного мислення. Усього використано 160 задач. Усі задачі були розділені 4 основні класи: задачі на знаходження невідомої величини, задачі на доведення, задачі на побудову і задачі на дослідження. Відібрана система задач дала змогу моделювати більшість ситуацій властивих творчому математичному мисленню, а їх зміст передбачав можливість фіксування різних компонентів пошукового процесу.

Зауважимо, що, вдаючись до схематичного спрощення творчого математичного мислення, ми розділимо пошуковий математичний

процес на три етапи: вивчення умови задачі, формування гіпотези розв'язку та її перевірка і будемо його трактувати як одночасний перебіг трьох взаємопов'язаних, однаково значущих складових процесів: процесу розуміння математичної проблеми, процесу формування гіпотези розв'язку проблеми, процесу апробації мисленневих результатів, отриманих при розв'язанні математичної проблеми [11]. *Акцентуємо увагу на процесі розуміння задачі впродовж всіх цих етапів, точніше на процесуально-динамічній стороні розуміння творчої математичної задачі, залишивши без аналізу особистісний аспект розуміння.*

Звернемось до аналізу деяких базових складових. *Когнітивна складова* є основою мисленневого процесу, тому спершу проаналізуємо деякі аспекти когнітивного компоненту процесу розуміння творчих математичних задач, віднісши до нього знання, накопичені суб'єктом; попередній досвід суб'єкта; суб'єктивні системи смислів; словниковий запас.

Розуміння не зводиться до відтворення раніше пізнаного, а є процесом подальшого збагачення знань через розкриття нових для суб'єкта зв'язків між речами. Засвоєння будь-якої нової інформації (в тому числі і тієї, що містить задача) відбувається як осягнення її смислу шляхом зіставлення нової інформації з наявними у суб'єкта знаннями. Перші кроки, спрямовані на розуміння задачі – це кроки *етапу вивчення умови задачі*, але той смисл, якого набувають структурні елементи задачі, – це наслідок *етапу побудови розв'язку*. Адже навіть на початку мисленневої діяльності, спрямованої на задачу, структурний елемент набуває того "відтінку", який може прислужитися у розв'язку. В.К. Нішанов описує процес приросту знань у процесі розуміння як створення мисленневих конструкцій, що зв'язують новий об'єкт із знаннями суб'єкта про світ. Ці конструкції будуються із знань та чуттєвих образів суб'єкта. Вони можуть бути нагромадженням раніше утворених конструкцій [13]. В акті осмислення математичного завдання процес побудови таких мисленневих моделей досить різноплановий. Більше того, можна навіть виокремити ряд принципів побудови таких математичних новоутворень, які свого часу виділив і описав А.Ф. Єсаулов при дослідженні технічної творчості [18]. Це може бути *приєднання* кількох елементів, що далі функціонуватимуть як єдине ціле, *складання* кількох елементів (наприклад, функції  $y = \sin x$  і  $y = |x|$  складаються як  $y = |\sin x|$ ), *заміщення* кількох елементів, логічне *переродження* (наприклад, цілий вираз, що включає різні функції приймається за єдину змінну). У таких новоутвореннях також можна прослідкувати зародження майбутнього розв'язку.

Потік таких новоутворень досить активний. Оперування абстрактними величинами не веде суб'єкта до будь-яких негативних



наслідків: суб'єкт може вільно з'єднувати, складати, заміщувати будь-які елементи, без будь-яких побоювань (як то могло б виникнути, наприклад, у фізиці чи у хімії). Саме тому, ми часто спостерігали вільне оперування структурними елементами в момент, коли ідеї пошуку розв'язку ще не знайдено.

У процесі розв'язання задач знання відбираються поетапно (відповідно до мікроетапів пошуку розв'язку), щоразу зіставляються з умовою й вимогою задачі і на цій основі знання відбираються, а сама задача переформулюється, або точніше сказати, змінюється певне співвідношення її умови і вимоги на основі єдиної системи понять, тобто, будується певна модель проблемної ситуації, описаної задачею, а, отже, формується певний стан її розуміння.

Що стосується творчих завдань, то, як зауважують М.Д. Мамфорд і С.Б. Густавсон, творчість більшою мірою "... пов'язана з інформацією, що здається нерелевантною для розв'язання даної задачі" [20, с. 30]. В цьому випадку переформулювання задачі часто базується на латеральному мисленні – "мисленні навколо задачі". У людей з великим обсягом знань актуалізується значно більше інформації, а здатність її використовувати дозволяє їм творити за межами того, чого їх вчили, тобто за межами досвіду. Вплив досвіду на розуміння також неоднозначний. Нова інформація, що міститься в задачі, накладаючись на власний досвід суб'єкта, викликає з його пам'яті подібну задачу. Це може статись у результаті спеціальних мисленневих дій, спрямованих на пошук у власному досвіді подібної задачної ситуації (чи хоча б частини її). Тобто розуміння умови задачі переходить у розуміння змісту розв'язку, що, "працює" на його пошук. Тепер, в ході мисленневих дій, на передній план виходить *процес прогнозування*, результати якого впливають на стан розуміння задачі.

Якщо віднайдений еталон справді відповідає новій задачі, то це прискорює й поглиблює розуміння нового. Якщо ж подібність не суттєва, і це не виявлено досліджуванним, то такий стан речей може привести до хибного розуміння, надовго пригальмувати пошуковий процес. Стосовно творчих математичних задач це дуже актуально. В математиці існує ряд типів задач, алгоритм розв'язання яких відомий. Це є надбанням суб'єктивного досвіду студента. Відомий алгоритм розв'язання може "виступити" з досвіду настільки сильно, що замінить собою реальну картину співвідношень між математичними об'єктами і, звісно, негативно вплинути на стан розуміння задачі. Зробити правильний висновок на цьому мікроетапі означає і досягти певного рівня розуміння задачі, і просунутись у напрямку пошуку розв'язку.

Що стосується *операційного* компоненту розуміння творчих математичних задач, то проведений аналіз дає підстави стверджувати, що він забезпечує оперування наявними у суб'єкта знаннями, співставленням нової інформації з наявною системою знань, засвоєнням нової інформації, включає методи виділення смислу задач.

Крім того, він забезпечує висування й селекціонування гіпотез. Процес розуміння найчастіше описують за допомогою тих самих операцій, що й будь-який мисленнєвий процес. Однак у пошуковому процесі важливу роль відіграють не стільки самі операції, як суб'єктивні переваги в їх використанні – *стратегії досягнення мети*. Ці переваги мисленнєвої діяльності охоплюють, з одного боку, особливість творчої задачі, а з іншого – суб'єктивні особливості мислення. В даній роботі віддається перевага підходу, запропонованому В.О. Моляко. З його точки зору, стратегія не є ані планом, ані способом, ані методом розв'язання, а являє собою суб'єктивну розумову тенденцію, що спрямовує інтелектуальні дії суб'єкта при розв'язанні нових задач. Стратегія визначає не програму мисленнєвих дій, а їх якість і є відносно стійкою, але гнучкою системою суб'єктивно привабливих дій. [12]. Мисленнєва стратегія суб'єкта, що розв'язує творчу математичну задачу, проявляється вже на початкових етапах розв'язання творчої задачі і завершується суб'єктивним переконанням у правильності знайденого розв'язку. Аналізуючи мисленнєві стратегії, що виникали в осіб, які розв'язували творчі математичні задачі, ми брали за критерій характер мисленнєвих механізмів, окремих операцій, що забезпечують їх функціонування.

У математичній діяльності будь-якого суб'єкта операція порівняння є чи не найважливішою. Саме вона і породжує дії за аналогією, всупереч аналогії, на основі комбінування чи їх поєднання. При розв'язанні математичних задач часто спостерігаються дії за аналогією. Тенденція до *аналогізування* в процесі розуміння визначається пошуком аналогічного еталона зв'язку між структурними елементами задачі, пошуком аналогічної властивості чи наслідку взаємовідношення математичних об'єктів і теоретичних фактів. Тобто, *процес розуміння за аналогією* зводиться до відшукування такого ракурсу геометричної фігури, такої властивості того чи іншого математичного об'єкта, що перетворив би спочатку незрозумілу математичну інформацію на аналогічну до еталонної. Мисленнєві дії за аналогією в процесі розуміння переважають у пошуковій діяльності студентів (близько 45%).

*Процес розуміння* математичної проблеми може настати за допомогою стратегії *комбінування* (близько 18%). В цих випадках після аналізу, співставлення й перекомбінування складових частин конструюється цілісне бачення її змісту. Ця стратегія визначається перебудовою структури задачі і на цій основі виявленням нових зв'язків між елементами, можливостей залучення нових теоретичних фактів, нових властивостей утворених зв'язків. Таким є, наприклад, комбінування елементів у правій частині нерівності  $x^2 - 3x + y^2 + 3 > 0$ .  $(x^2 - 3x + 3) + y^2 > 0$ . Такий запис дозволяє

тракувати вимогу довести вихідну нерівність, як вимогу довести, що  $x^2 - 3x + 3 > 0$ , а це достовірно.

Деколи у студентів виникала ідея діяти всупереч аналогії, тобто отримати математичний результат всупереч відомому прийому, відомому правилу. Ми фіксували підпорядкування *процесу розуміння на основі реконструктивних дій* майже у 9% учасників експерименту. Здійснена мисленнева інверсія висуває на перший план інші властивості структурних елементів, інші теоретичні факти, на основі яких настає розуміння задачі. Часто пошуковий процес, а, отже і *процес розуміння, базується на поєднанні* описаних трьох мисленневих тенденціях – *змішана стратегія (універсальна)* (близько 15%). Наприклад, аналог до відомого еталона може шукатись після певного перекомбінування елементів. Але при цьому мисленневі дії є цілеспрямованими, підпорядкованими загальній ідеї. Хоча слід зауважити, що спостерігаються і мисленневі маніпуляції "навмання", без будь-якої закономірності (близько 8%) – те, що В.О. Моляко називає "*стратегією випадкових підстановок*" [12].

Варто підкреслити, що повне розуміння умови творчої задачі не досягається на етапі вивчення умови, воно часто настає значно пізніше, аж після знаходження розв'язку. Зазначимо, що *вивчення умови задачі й розуміння умови задачі* часто мають різні "кінцеві пункти. Виділимо *ряд мікроетапів в процесі розуміння умови математичної задачі* та проаналізуємо їх зміст, місце і роль у пошуковому процесі.

- *Загальне ознайомлення з умовою задачі.* Читаючи задачу вперше, студент намагається зрозуміти її загальний смисл, щоб зорієнтуватися, чи зустрічався він із задачами такого типу, впізнати значення слів, символів. Тому перше прочитання має велике орієнтовне значення, є першим кроком до розуміння запропонованої йому задачі, навіть, якщо це перше уявлення не є чітким і переконливим. Цей мікроетап розпочинається на *етапі вивчення умови задачі* і відповідає першій формі розуміння, виділеній В.В. Знаковим: розуміння-впізнавання, точніше розуміння-пригадування [5]. Суб'єкт виділяє з контексту задачі відомі терміни (пригадуючи їх значення),

символи, числа (що мають певні якісні ознаки):  $\int f(x) dx$  - інтеграл

певної функції;  $\frac{\partial z}{\partial x}$  - частинна похідна і т.д. При цьому виділяються певні структури, що не потребують подальшого вивчення, бо інформація про них наявна в пам'яті суб'єкта. Тобто при розумінні-пригадуванні суб'єкт не виконує активної мисленневої діяльності.

- *Розподіл умови на головну й другорядну частини.* Цей мікроетап сприяє подальшому цілеспрямованому вивченню умови задачі, її окремих частин. У більшості випадків тепер студенти відносять математичну задачу до певного класу, тобто визначають, що потрібно

зробити (обчислити, довести, побудувати) і що для цього відомо. Дані в основному оцінюються з якісної сторони (наприклад: для обчислення площі відома ширина і невідома довжина), майже не акцентується увага на їх кількісній оцінці. Це особливо яскраво ілюструється при розв'язанні задач із надлишковою чи недостатньою умовою, коли на початкових стадіях вивчення умови, такий "дефект" не виявляється. В той час як у задачах із несформульованим завданням, як правило, відразу виникає запитання: "Що потрібно виконати?"

- *Перекодування задачі на "свою" мову.* Зрозуміти – це віднести предмет чи явище до певної категорії – дати відповідь на запитання "що це таке?" Аналізуючи умову математичної задачі, суб'єкт намагається розчленувати її на прості елементи, що зрозумілі для нього аргіогі і зіставити ознаки нового об'єкта з ознаками відомих об'єктів та шукати подібності між ними. Тепер розуміння – це віднесення нового об'єкта лише до певної категорії об'єктів, подібних із ним, – розуміння-уподібнення. Виділяються вузлові поняття задачі, асоціативно з'являються основні теоретичні відомості, що пов'язані із задачею. Тобто відбувається детальніше вивчення частин умови, а роль розуміння в мисленні суб'єкта зводиться в основному до розуміння фактів як результатів узагальнення попереднього досвіду, включення їх в систему особистісних знань. Крім того, такі пошукові дії забезпечують деякий напрям пошуку розв'язку (*другий етап*). "Своє" бачення умови задачі полягає у наданні певної знайомої математичної інтерпретації конкретній заданій ситуації, у графічних ілюстраціях тексту задачі чи текстовому описі графічної ілюстрації, що подана умовою задачі.

У процесі розуміння висувається перша гіпотеза про те ціле, про яке йдеться у задачі. Часто ця ж гіпотеза носить ознаки майбутнього розв'язку. Подальший пошук керується цією гіпотезою. Коли вступає в дію визначення змісту інших деталей, під їх впливом здійснюється перевірка гіпотези. Не задовольнивши умови, але детальніше дослідивши вказані в задачі об'єкти, вона відкидається й замінюється іншою. Перевірка гіпотези (елементи третього етапу і третього складового процесу), її узгодження з умовою задачі, веде до нового змісту розуміння задачі. Тобто *процес розуміння переходить у процеси прогнозування і апробації*, які, в свою чергу, впливають на стан розуміння математичної проблеми.

- *Доповнення тексту задачі кресленнями, ескізами, малюнками.* Експериментальні задачі були запропоновані або в текстовій чи символній формі, при цьому частина з них була доповнена графіками, кресленнями. Ми спостерігали на початкових етапах мисленнєвої діяльності прагнення студентів зіставляти текст із наявними малюнками або доповнювати задачі "ілюстраціями". Фактично, такий мікроетап є продовженням попереднього, адже графічна чи схематична інтерпретація тексту і текстовий опис графічної чи схематичної

інформації – це і є переведення змісту задачі на "свою" мову. Мікроетап співставлення графічної й текстової інформації в процесі розуміння творчої математичної задачі важко переоцінити. Супроводження текстового завдання "провокаційними" рисунками часто приводить до хибного розуміння завдання, якщо вчасно не виявляється невідповідність між текстом і рисунком.

- *Новий рівень вивчення умови задачі.* В подальшій пошуковій діяльності спостерігається детальне обстеження елементів задачної ситуації, виявлення великої кількості їх властивостей. Виявивши ряд елементів у задачі, студенти намагаються їх синтезувати в те ціле, яким є творча математична задача. Мова йде про виявлення деякої суб'єктивної значущості структурних елементів з точки зору їх корисності для подальшого розв'язку. Для математики, що оперує символами, числами, важливим є настання взаємоузгодження семантичного й формального змісту, який містить задача. Потрібно прийняти рішення про необхідність більш-менш широкої інформації про ті об'єкти, які виражені такими символами, або встановити допустимі значення для символів. Наприклад, при встановленні множини точок, що описуються нерівністю  $x^2 + y^2 \leq 1$ , необхідно знати, де ця множина точок розміщена: на площині (круг), чи у просторі (циліндричне тіло). Описані дії, спрямовані на розуміння математичної задачі, можна віднести і до етапу пошуку розв'язку, і до етапу перевірки розв'язку (проміжного чи кінцевого), тому можна стверджувати, що на цьому мікроетапі *процес розуміння "вмонтовується" в процеси прогнозування розв'язку і апробації* мисленневих результатів.

- *Виділення сутності задачі.* В результаті переведення умови задачі на математичну мову настає ще один поділ задачі на частини: відділяється суттєве й другорядне. Це мікроетап ще однієї переоцінки задачі. Якщо на першому мікроетапі студент впізнавав: розв'язував він коли-небудь таку задачу чи ні, до якого розділу знань вона належить; на другому мікроетапі він визначав, чи це математична задача на обчислення, чи на доведення і т.д., то тепер відбувається внутрішній поділ задачі на частини: яка інформація відома для досягнення мети (обчислити, довести, побудувати) і яку необхідно ще добути; які теоретичні відомості вже можна використати, а які ще невідомо як використати; які засоби можна застосувати для цього. Тобто, знову спостерігаємо, що виділений нами *мікроетап процесу розуміння* (з певними функціональними ознаками) є одночасно і *мікроетапом процесу прогнозування розв'язку* (з дещо іншими функціональними ознаками), що свідчить про взаємопроникнення означених процесів, їх взаємне доповнення.

Після описаних дій задача набуває вигляду більш-менш цілісної системи математичних об'єктів – завершується формування певної моделі задачі і напряму пошуку її розв'язку. Починають діяти

комплекси математичних символів, що мають свої математичні значення, властивості. В деяких випадках це відбувається на основі підключення реальних кількісних співвідношень, що надалі функціонуватимуть з утвореними символічними виразами. Нерідко на цьому етапі задача одного типу перетворюється в розряд задач іншого типу (наприклад, рівняння четвертого степеня стає рівнянням другого степеня). Однак задача ще містить ряд прогалин, які не дають можливості скласти вичерпну характеристику цієї системи, тобто існують "зайві", або "недостаючі" елементи у задачі, які охоплює функціонуюча в даний момент розв'язання модель задачі.

- *Включення умови творчої математичної задачі в ланцюг знань і досвіду студентів.* Цей мікроетап охоплює всі три етапи процесу розв'язання творчої математичної задачі. Зміст задачі, що був "привнесений" в математичну діяльність після попереднього обстеження, під'єднується до системи знань суб'єкта, перестаючи бути "інородним тілом" для цієї системи.

- *Настання розуміння умови й висунення гіпотези щодо розв'язку.* В результаті описаних дій настає або ні впевненість суб'єкта в розумінні умови. Ця впевненість може бути як виправданою, так і ні. Вона сприяє подальшій роботі над задачею, *активізації процесу прогнозування* а, отже, і *поглибленню процесу розуміння*. Якщо впевненості у розумінні умови немає, то робота може припинитися.

Отже, в процесі розуміння творчої математичної задачі суб'єкт спочатку виділяє елементи (числа, символи, операції, геометричні фігури тощо), впізнає їх призначення, а після знаходить зв'язки між ними як шляхом *висунення й перевірки ряду гіпотез* про ці зв'язки (на етапі вивчення умови), так і шляхом висунення гіпотез про шляхи розв'язання (на етапі формування проекту розв'язку). Гіпотези, що спрямовані на об'єднання розрізаних елементів умови задачі, поступово переплітаються в процесі розуміння, із гіпотезами щодо змісту розв'язку. На *етапі формування гіпотези* розв'язку задачі, процес розуміння йде паралельно з пошуком розв'язку, при цьому його домінуючою формою є розуміння-прогнозування. Адже висунені гіпотези щодо розв'язку є і гіпотезами процесу розуміння, вони висвітлюють певні сторони об'єктів, процесів, що містить творча математична задача. Унаслідок цього суб'єкт отримує нове бачення задачі в цілому і новий рівень проникнення в сутність її умови та вимоги – нову більш досконалу модель задачі. Після різнобічного вивчення різних сторін структурних елементів, розпочинається мисленнєве конструювання цілого з утворених частин – розуміння-об'єднання, результатом якого часто є розв'язок (проміжний чи кінцевий). Він піддається *перевірці* умовою. І якщо у суб'єкта складається враження, що існує відповідність між умовою задачі і знайденим новоутворенням, що можливо після деяких *апробаційних*

дій, то воно оголошується розв'язком задачі, але водночас зміст цього новоутворення є інформацією про стан *розуміння* задачі.

Прямим результатом таких процедур часто були проміжні розв'язки (хоч не завжди). Саме проміжні розв'язки на *етапі формування гіпотези* розв'язку були найяскравішим проявом, індикатором, розуміння математичної задачі. Процес висування гіпотез концентрується навколо однієї (рідше двох, трьох), найбільш привабливої ідеї, одного образу. Тобто, синтетичний образ розв'язку (*його проект*), що складається після ряду переформулювань задачі, є результатом певного стану розуміння умови задачі й розуміння сутності її розв'язку. Слід наголосити, що переважаюча ідея не завжди приводить до вірного розв'язку творчої математичної задачі. Коли виникало кілька ідей, студенти не завжди надавали перевагу тій, яка сприяла би розв'язанню. Це можна, на нашу думку, пояснити недостатнім розумінням задачі, тому про зміст переважаючої ідеї можна говорити як про ще один індикатор розуміння творчої математичної задачі. Крім того, часто нерезультативність вибраної ідеї виявляється на *етапі апробації ідеї*. Тому усвідомлення невірності чи неповного розуміння умови задачі, невірності розв'язку деколи настає аж на цьому, більш пізньому, етапі розв'язання.

Зміст мисленневих дій *апробаційного процесу* творчого математичного мислення полягає у зіставленні результату з умовою й вимогою задачі; у перегляді ланцюга мисленневих кроків, що привели до результату; у його апробації в різних умовах, що не виходять за межі умови задачі і допускаються нею. Такі дії, *формуючи суб'єктивну впевненість у правильності (або неправильності) знайденого розв'язку*, водночас спрямовані на поглиблення розуміння сутності самої задачі. Вони об'єднують розрізнені математичні елементи попередніми мисленневими діями у цілісну математичну систему, тобто домінує та форма розуміння, яка носить назву розуміння-об'єднання.

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** Творчий математичний процес є процесом, який гармонійно поєднує загальні ознаки інтелектуальної творчості зі специфікою математичної діяльності, що проявляються, зокрема, в процесі розуміння нової математичної задачі і є адекватною моделлю процесу мисленневої творчості. До основних психологічних аспектів і базових компонентів, котрі визначатимуть головний напрямок у його дослідженні, можна віднести процесуально-динамічний аспект, що у свою чергу містить когнітивний, операційний і регулятивно-особистісний компоненти. Зміст пошукових дій залежить від етапів розв'язання задачі (вивчення умови, пошук розв'язку, перевірка знайденого розв'язку), в яких його процесуально-динамічна сторона не лише проявляється, але й формується. *Процес розуміння суб'єктом творчої математичної задачі має місце на всіх етапах процесу розв'язання*, досягається через співставлення нової інформації з системою знань суб'єкта завдяки

взаємодії числової, символної та просторової складових математичного мислення, причому розуміння умови має своє продовження на подальших етапах розв'язання (формування та обґрунтування розв'язку). Специфіка розуміння математичної задачі пов'язана з наявністю числових і символних елементів, оперуванням формалізованими об'єктами за допомогою просторової уяви, існуванням алгоритмів розв'язання певного типу задач.

Подальшого дослідження потребує особистісний аспект процесу розуміння, його вплив на перебіг та взаємоузгодження складових процесів творчого математичного мислення.

1. *Адамар Ж.* Исследования психологии процесса изобретения в области математики / Адамар Ж. – М.: Соврадио, 1970. – 152 с.
2. *Богоявленская Д.Б.* Психология творческих способностей / Богоявленская Д.Б. – М.: Академия, 2002. – 318 с.
3. *Брушлинский А.В.* Проблемы субъекта психологической науки / Брушлинский А.В. // Психол. журн. – № 6. – 1991. – С. 1-3.
4. *Гурова Л.Л.* Интуиция и логика в психологической структуре решения задач / Гурова Л.Л. // Семантика, логика, интуиция в мыслительной деятельности человека. – М.: Педагогика, 1979. – С. 8-45.
5. *Знаков В.В.* Понимание в познании и общении / Знаков В.В. – М.: Изд-во РАН Института психологии, 1994. – 237 с.
6. *Коваленко А.Б.* Психология розуміння / Коваленко А.Б. – К.: Геропринт, 1999. – 184 с.
7. *Корнилов Ю.К.* Психологические проблемы понимания / Корнилов Ю.К. – Ярославль: Изд-во Ярослав. ун-та, 1979. – 80 с.
8. *Костюк Г.С.* Навчально-виховний процес і психологічний розвиток особистості / Костюк Г.С. – К.: Радянська школа, 1989. – 108 с.
9. *Крутецкий В.А.* Психология математических способностей школьников / Крутецкий В.А. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.
10. *Леонтьев А.Н.* Деятельность. Сознание. Личность / Леонтьев А.Н. – М.: Политиздат, 1975. – 304 с.
11. *Мойсеенко Л.А.* Психология творческого математического мышления / Мойсеенко Л.А. – Ивано-Франківськ: Факел, 2003. – 481 с.
12. *Моляко В.А.* Психология конструкторской деятельности / Моляко В.А. – М.: Машиностроение, 1983. – 136 с.
13. *Мордухай-Болтовский Д.Д.* Философия, Психология. Математика / Мордухай-Болтовский Д.Д. – М.: Серебряные нити, 1998. – 552 с.
14. *Поля Д.* Математическое открытие. – М.: Наука. – 1976. – 336 с.
15. *Рубинштейн С.Л.* Принципы и пути развития психологии / Рубинштейн С.Л. – М.: АН СССР, 1959. – 356 с.
16. *Тихомиров О.К.* Психология мышления / Тихомиров О.К. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 270 с.
17. *Шевчук В.* Объяснение явлений и проблема инсайта / Шевчук В. // Вопр. психологии. – 1964. – №3. – С.111-122.
18. *Эсаулов А.Ф.* Активизация учебно-познавательной деятельности студентов / Эсаулов А.Ф. – М.: Высшая школа, 1982. – 223 с.
19. *Bransford J.D.* Consideration of some problems of comprehension / Bransford J.D., Johnson M.K. // Visual information processing.– N.Y.-London, 1973, – P. 383-438.
20. *Mumford M.D.* Creativity syndrome: Integration, application and innovation / Mumford M.D., Gustafson S.B. // Psychological Bulletin. – 1988. – 27-43p.
21. *Ziff P.* Understanding Understanding. Ithaca / Ziff P. – London, 1972. – 146p.



*The article considers issues concerning psychological essence of the understanding process in creative mathematical thinking. Modern scientific approaches to the investigation of creative thinking have been described. There has been pointed out the identification signs of human thinking activity in the field of mathematics. Moreover, the analysis was conducted of procedural-dynamic aspect of the understanding as a component of creative mathematical thinking process directed to the solution of mathematical problems. The article proves the prevailing character of this process and its interconnection with solution offorecasting and approbation of thinking results.*

**Key words:** *creative mathematical thinking, understanding process, procedural-dynamic component of creative mathematical problem understanding, understanding-recognition, understanding-forecasting, understanding-explanation, understanding-unification.*