

УДК 539.3

Н. А. Гук, д-р физ.-мат. наук

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ИЗМЕНЕНИЯ ТОЛЩИНЫ ТОНКОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАДАННОЙ ФОРМЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Рассматривается задача определения функции толщины оболочки, при которой оболочка под действием фиксированной равномерной нагрузки в результате деформирования превращается в оболочку с ограничивающей поверхностью заданной формы. Обратная задача формулируется в вариационной постановке. Приводятся результаты определения геометрических параметров модели оболочки.

Ключевые слова: обратная задача, оболочка, толщина, форма деформирования.

Введение. Тонкостенные пространственные конструкции являются наиболее эффективными инженерными сооружениями во многих областях техники и строительства, поэтому развитие методов, позволяющих проектировать конструкции, удовлетворяющие различным критериям оптимизации, является актуальной задачей.

В большей части работ, посвященных вопросам оптимизации формы срединной поверхности и толщины оболочек, рассматриваются безмоментные оболочки вращения в линейной постановке, для которых отыскивается минимум веса или объема при ограничениях по жесткости [2, 6, 7], прочности или по частоте свободных колебаний [5]. Оптимальная форма оболочки вращения переменной толщины, нагруженной внутренним равномерным давлением, отыскивалась в работе В. А. Столярчука, где вариационная задача минимизации веса оболочки решалась с использованием метода локальных вариаций. Вопросы проектирования оптимального распределения толщин геометрически нелинейных пластин и пологих оболочек при условии равнопрочности рассматривались в работе [1].

В технических системах (контактные системы), где под действием фиксированной специальной нагрузки необходимо реализовать заданную форму поверхности пластины или оболочки, возникают задачи определения закона изменения толщины оболочки, при выполнении которого данная оболочка под действием заданной нагрузки превращается в оболочку с ограничивающей поверхностью заданной формы.

В работе [3] аналитические решения, описывающие функции толщины консольной пластины и толщины пологого сегмента оболочки вращения, получены в предположении о симметричном изгибе оболочки, поэтому в качестве математической модели используется криволинейный брус, что позволяет упростить систему уравнений равновесия. Однако такой под-

ход неприменим в тех случаях, когда математическая модель рассматриваемой контактной системы является более сложной.

В настоящей работе предлагается определять закон изменения толщины оболочки из решения геометрической обратной задачи так, что нормальные прогибы, возникающие в результате деформирования оболочки под действием фиксированной внешней нагрузки, будут образовывать требуемую геометрическую форму конструкции.

Постановка задачи. Рассматривается задача об определении функции толщины оболочки, при которой оболочка под действием фиксированной равномерной нагрузки в результате деформирования превращается в оболочку с ограничивающей поверхностью заданной формы.

Требуемая форма оболочки задается значениями отклонений точек срединной поверхности от соответствующего недеформированного тонкостенного элемента в виде вектора нормальных перемещений $w^*(x, y)$.

Математическая модель. Введем в рассмотрение область $\Omega \in R^2$, где $\Omega = \{X : a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\}$, имеющую границу \tilde{A} .

Вектор-функция состояния тонкостенного элемента $W(X) = \{u, v, w\}$ в ограниченной пространственной области Ω описывается соотношениями:

$$L(H(X), W(X)) = P(X); \quad (1)$$

$$L^{\tilde{A}}(W(X))_{X=X^{\tilde{A}} \in \tilde{A}} = W^{\tilde{A}}(X^{\tilde{A}}), \quad (2)$$

где $L(\cdot)$, $L^{\tilde{A}}(\cdot)$ – заданные дифференциальные операторы; $X = \{x, y\}$ – вектор координат точек срединной поверхности оболочки; z – нормаль к поверхности оболочки; $W(X) = \{u, v, w\}$ – вектор перемещений в направлениях x, y, z ; \tilde{A} – контур области Ω ; $P(X)$ – внешнее воздействие;

$H^0(X)$ – функция изменения толщины оболочки, входящая в дифференциальный оператор задачи и характеризующая геометрические свойства системы. Предполагается, что оказанное внешнее воздействие фиксировано и не вызывает в деформируемой системе пластических деформаций. Функции $H(X)$, $P(X)$ ограничены на области Ω с помощью априорно заданных величин, определяемых конструктивными или технологическими особенностями процесса, тем самым искусственно вводится множество корректности.

Решение обратной задачи предполагает определение закона изменения толщины оболочки $H(X)$, при выполнении которого поверхность оболочки под действием известной равномерной нагрузки в конце деформирования приобретет заданную геометрическую форму $w^*(X)$.

Метод решения. Для решения прямой задачи (1), (2) используется метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий получить решение задачи при любом законе изменения геометрических параметров оболочки.

Использование МКЭ для определения напряженно-деформированного состояния конструкции требует представления неизвестных функций

задачи и искомых геометрических характеристик системы в параметрическом виде. Для этого на области Ω вводятся следующие сетки:

- сетка для описания решения прямой задачи (1), (2) с координатами узлов X_l , где $X_l = \{x_l, y_l\}$, $l = \overline{1, L}$, и соответствующими узловыми значениями функции W в виде вектора $W(X_l) = \{W_l\}$;

- сетка для параметрического представления искомых геометрических характеристик (толщины) оболочки с узлами X_s , $s = \overline{1, S}$ (все X_s выбираются из числа X_l и находятся внутри или на границе \tilde{A} области Ω), толщины задаются для непересекающихся подобластей Ω_m , $m = \overline{1, M}$ (Ω_m определяется узлами из множества X_s ; $\bigcup_m \Omega_m = \Omega$) и представляются в виде вектора $H(X) = \{H_m\}$;

- сетка для задания формы поверхности оболочки $w^*(x, y)$ с координатами узлов X_n , $n = \overline{1, N}$ (все X_n выбираются из числа X_l) и соответствующими узловыми значениями функции $w^*(x, y)$ в виде вектора $w^*(X_n) = \{w_n^*\}$.

Для решения прямой задачи с использованием МКЭ неизвестные функции на элементе задаются для локальной системы координат, связанной с центром тяжести элемента, при помощи аппроксимаций [8]. После выполнения соответствующей процедуры методом Ритца и суммирования матриц элементов получаем систему уравнений, в результате решения которой формируется вектор нормальных перемещений $\{w_l(H)\}$ при заданных значениях параметров модели и соответствующих условиях на границе Γ области Ω .

С использованием введенных сеток решение обратной задачи описывается вектором параметров модели оболочки $H = \{H_1, H_2, \dots, H_M\}^T$, который соответствует той или иной функции распределения толщины оболочки, требуемая форма оболочки задается вектором $w^* = \{w_1^*, w_2^*, \dots, w_N^*\}^T$. Таким образом, каждому вектору H можно поставить в соответствие вектор w^* , следовательно, существует функциональное отношение, устанавливающее причинно-следственную связь между измеренными величинами w^* и неизвестным вектором параметров H , а обратная задача может быть представлена в виде уравнения относительно искомого вектора параметров:

$$w(H) - w^* = 0. \quad (3)$$

Обратная задача формулируется как вариационная, то есть осуществляется переход к задаче минимизации функционала, характеризующего среднеквадратическое отклонение между расчетными значениями нормальных прогибов w в точках поверхности оболочки, полученными из решения

прямой задачи (1), (2) при известной нагрузке $P(X)$ и известном законе распределения толщины оболочки $H(X)$, и заданными значениями $w^*(x, y)$, описывающими требуемую форму поверхности оболочки:

$$H = \arg \min_{H \in \bar{H}} J, H \in \bar{H}; \quad (4)$$

$$J = \int_{\Omega} (w(H) - w^*)^2 d\Omega, \quad (5)$$

где \bar{H} – область изменения компонент неизвестного вектора H , характеризующего толщину оболочки.

Для определения вектора неизвестных параметров, удовлетворяющих условию (4), организуется итерационный процесс минимизации функционала (5), аналогичный [4]:

$$H^{(k)} = H^{(k-1)} + Q^{-1} \Big|_{H^{(k-1)}} \cdot \Delta(H^{(k-1)}), \quad (6)$$

тогда для определения приращений значений параметров имеем:

$$\Delta H^{(k)} = Q^{-1} \Big|_{H^{(k-1)}} \cdot \Delta(H^{(k-1)}), \quad (7)$$

где $Q = (G^T G)^{-1} G^T$; $\Delta(H^{(k-1)}) = (w^*(X_n) - w(X_n, H))$ – линеаризованная функция невязки; k – номер шага итерационного процесса метода Ньютона. Для построения матрицы Q используется матрица чувствительности:

$$G = \left\{ \frac{\partial w(X_n, H^{(k-1)})}{\partial H_m} \right\}, \quad n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M},$$

где n – номера точек измерений; m – номера компонент вектора H , определяемые количеством возможных параметров модели. Компоненты матрицы градиента G определяются численно с использованием разностного аналога, такая замена не нарушает сходимости итерационного процесса метода Ньютона.

В результате выполнения итерационной процедуры минимизации функционала (5) формируется вектор значений толщины оболочки.

Результаты вычислительного эксперимента. Предложенный подход был применен для определения функции толщины открытой цилиндрической оболочки, находящейся под действием фиксированной нагрузки, по заданным значениям нормальных прогибов, описывающих требуемую геометрическую форму. Исследовалась стальная открытая цилиндрическая оболочка переменной толщины ($L/R = 4$, $R/h = 40 \div 200$, где L, R, h – длина, радиус, толщина оболочки; с углом раствора в плане равным 90°), жестко защемленная по прямолинейным кромкам, криволинейные кромки оболочки

свободны. Оболочка находится под действием равномерного внешнего давления, направленного по нормали к поверхности оболочки.

Форма поверхности оболочки, которая должна быть получена в результате деформирования, представлена на рис. 1. Показанная на рис. 1 форма была получена в результате деформирования оболочки, распределение толщины которой по продольной координате описывается зависимостью, представленной на рис. 2 сплошной тонкой линией.

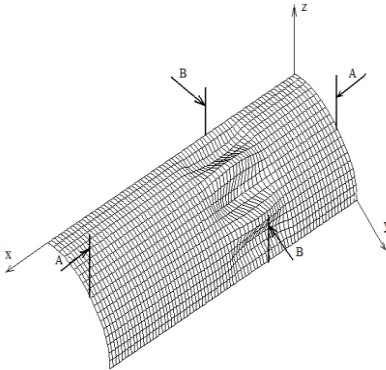


Рис. 1 – Заданная форма поверхности оболочки

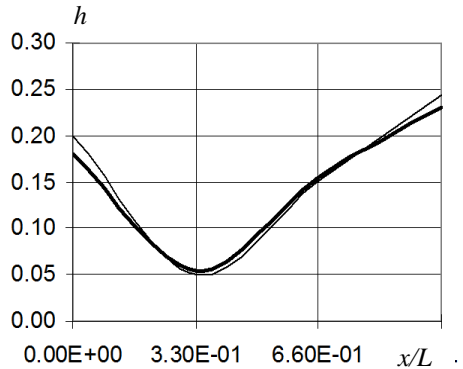


Рис. 2 – Результат восстановления функции толщины оболочки

Значения $w^*(x, y)$, описывающие требуемую форму оболочки, заданы в виде вектора значений нормальных прогибов в узлах конечно-элементной сетки равномерно распределенных по всей поверхности оболочки.

Для описания неизвестной функции распределения толщины поверхность оболочки разбивается на равные по размеру непересекающиеся под-области Ω_m , $m = \overline{1, M}$ (для рассмотренного примера $M = 20$), значения толщин в этих подобластях и составляют вектор неизвестных обратной задачи $H = \{H_1, H_2, \dots, H_M\}^T$, подлежащий определению.

На рис. 2 представлен результат определения функции толщины оболочки из решения обратной задачи (4), жирной сплошной линией показано распределение толщины по длине оболочки в сечении А–А. Видно, что характер восстановленной зависимости приближается к действительному распределению функции толщины (обозначено тонкой сплошной линией).

На рис. 3 и рис. 4 приведено распределение нормальных прогибов оболочки, функция толщины которой определена с использованием предложенного подхода (зависимости обозначены сплошной жирной линией), и прогибов $w^*(x, y)$ оболочки, функция толщины которой является известной (зависимости обозначены сплошной тонкой линией). Кривые на рис. 3, рис. 4 построены в характерных сечениях А–А и В–В. Из анализа построен-

ных

зависимостей видно, что использование функции толщины, определенной из решения обратной задачи (4), позволяет построить модель оболочки, которая при фиксированном внешнем воздействии в результате деформирования образует требуемую форму поверхности.

Для проверки адекватности предложенного подхода было выполнено сравнение с результатами работы [3], в которой получено аналитическое решение обратной задачи определения закона изменения толщины консольной пологой оболочки, имеющей начальный прогиб.

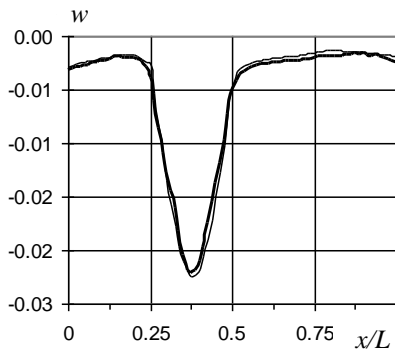


Рис. 3 – Нормальный прогиб оболочки по длине

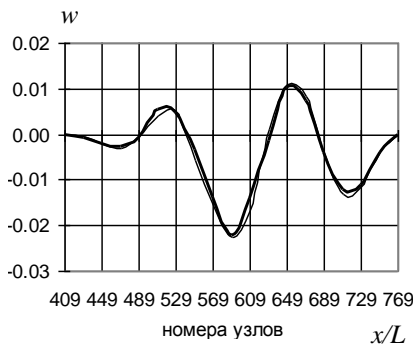


Рис. 4 – Нормальный прогиб оболочки в окружном направлении

Рассматривается консольная полая оболочка, защемленная по одному краю и имеющая три свободных края, находящаяся под действием равномерно распределенной нагрузки. Ширина оболочки изменяется по линейному закону:

$$b = b_0 + (b_1 - b_0) \frac{x}{a},$$

где a – длина оболочки по оси x ; ось x имеет начало у защемленного края оболочки; ось y направлена по нормали к поверхности оболочки; b_0 – ширина защемленного края; b_1 – ширина свободного края.

Оболочка находится под действием равномерной нагрузки $q_0 = 3 \cdot 10^4 \text{ Па}$, где q_0 – нагрузка на единицу ширины; $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$. До приложения нагрузки нижняя ограничивающая поверхность оболочки задана в форме

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - ax + \sqrt{3}ay.$$

Требуется определить закон изменения толщины оболочки, при котором данная оболочка под действием заданной равномерной нагрузки в конце деформации будет иметь ограничивающую поверхность заданной формы:

$$\varphi(x, y) = 3.39x^2 + 2.17y^2 - 4ax + 4\sqrt{3}ay + 1.22\sqrt{3}xy. \quad (8)$$

В предположении о симметричности изгиба в качестве математической модели оболочки используется криволинейный брус, что существенно упрощает систему уравнений равновесия и позволяет получить аналитическое представление решения в виде:

$$h = \sqrt[3]{\frac{6q_0 \left[b_0 x^2 + \frac{b_1 - b_0}{3} \cdot \frac{x^3}{a} - ax(b_0 + b_1) + \frac{a^2}{3}(b_0 + 2b_1) \right]}{E \left[b_0 + (b_1 - b_0) \frac{x}{a} \right] \chi_1}}, \quad (9)$$

где χ_1 – изменение кривизны срединной поверхности оболочки.

Результаты численного расчета приведены для оболочки, имеющей геометрические размеры: $a = 0,03552 \text{ м}$; $b_0 = 0,001618 \text{ м}$; $b_1 = 0,014708 \text{ м}$.

Эта же задача была решена с использованием предложенного в работе подхода. При проведении вычислительного эксперимента форма оболочки была задана вектором значений нормальных прогибов $w^* = \{w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*\}^T$, определенных в соответствии с (8) в узлах конечно-элементной сетки, узлы X_n равномерно распределены по поверхности оболочки. Вектор неизвестных значений толщины оболочки определялся из итерационной процедуры (6), в качестве начального приближения использовался вектор, составленный из постоянных значений толщины. Результат восстановления толщины оболочки, полученный с использованием предложенного подхода, приведен в табл. 1, там же показано распределение толщины оболочки, вычисленное с использованием (9) при заданных характеристиках оболочки.

Таблица 1 – Восстановление толщины при заданных характеристиках оболочки

x/a	Аналитическое решение [3], h , м	Численное решение с использованием предложенного подхода, H , м	Погрешность восстановления, %
0,1	0,00205	0,001997	2,6
0,2	0,00115	0,001203	4,6
0,3	0,00097	0,000916	5,6
0,4	0,00058	0,000601	3,6
0,5	0,00043	0,000421	2,1
0,6	0,00032	0,000318	0,6
0,7	0,00024	0,000228	5,0
0,8	0,00016	0,000154	3,8
0,9	0,00007	0,000074	5,7
1	0	3,1E-06	0

Из анализа приведенной таблицы видно, что численные результаты, полученные с использованием предложенного подхода, свидетельствуют об удовлетворительном качестве восстановления толщины оболочки; в сравнении с аналитическим решением погрешность определения значений толщины не превосходит 6%.

Выводы. Предложенный подход позволяет определить закон изменения толщины оболочки, обеспечивающий в результате деформирования под действием фиксированной внешней нагрузки образование требуемой гео-

метрической формы поверхности оболочки. Использование параметризации модели оболочки позволяет выполнять восстановление неизвестных геометрических параметров в случае, когда деформирование носит нелинейный характер. Сравнительный анализ результатов вычислительного эксперимента показал, что с использованием предложенного подхода достигается высокая точность восстановления геометрических параметров модели оболочки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Александров М. А.** Расчет близких к равнопрочным гибких пластин и оболочек / М. А. Александров, М. С. Корнишин, Н. Н. Столяров // Прикладная механика. – 1978. – Вып. 10. – С. 41–46.
2. **Баничук Н. В.** Об оптимальных формах в механике контактного взаимодействия / Н. В. Баничук // Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 427, № 2. – С. 187–191.
3. **Ганиев Н. С.** Об одной обратной задаче в нелинейной теории пологих оболочек вращения / Н. С. Ганиев // Изв. Казанского филиала АН СССР. Сер.: Физ.-мат. науки. – 1962. – № 2. – С. 291–298.
4. **Ободан Н. І.** Обернена задача визначення зовнішніх навантажень при деформації тонкостінних оболонок / Н. І. Ободан, Н. А. Гук // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2011. – № 1. – С. 47–50.
5. **Одишвили К. А.** Оптимальный закон изменения толщины пологой оболочки вращения / К. А. Одишвили // Исследования по строительным конструкциям. – М., 1971. – С. 31–49.
6. **Шихранов А. Н.** Расчет тонкостенных конструкций с учетом несовершенств формы / А. Н. Шихранов, Э. Г. Сайфуллин // Вестн. Казанск. гос. технич. ун-та. – 1996. – № 4. – С. 60–63.
7. **Шихранов А. Н.** К оптимизации гибких пологих оболочек вращения по критерию жесткости / А. Н. Шихранов // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 15-летию ИММ КазНЦ РАН. – Казань: Казанский государственный университет, 2006. – С. 261–267.
8. **Bathe K.** Numerical method in finite element analysis / K. Bathe, E. L. Wilson. – М.: Наука, 1985. – 648 с.

Н. А. Гук, д-р фіз.-мат. наук

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ЗМІНИ ТОВЩИНИ ТОНКОСТІННОЇ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАДАНІЙ ФОРМІ ДЕФОРМАЦІЇ

Розглядається задача визначення функції товщини оболонки, при якій під дією фіксованого рівномірного навантаження в результаті деформування перетворюється на оболонку з обмежувальною поверхнею заданої форми. Обернена задача формулюється у варіаційній постановці. Наводяться результати визначення геометричних параметрів моделі оболонки.

Ключові слова: обернена задача, оболонка, товщина, форма деформації.

N. A. Guk, Professor

INVERSE PROBLEM OF IDENTIFICATION OF CHANGE THICKNESS FUNCTION FOR THIN-WALLED SHELL AT GIVEN SURFACE DEFORMATION SHAPE

The problem of determination of shell thickness when a shell due to action of fixed uniform load turns into a shell with limiting surface of given shape is examined. The variation inverse problem is formulated. Results of geometrical parameters identification for the shell model are presented.

Keywords: inverse problem, shell, thickness, form of deformation.

Introduction. In technical systems (contact systems), where due to fixed special loading a given surface shape of a plate or shell should be obtained, the problem of determining the law of shell thickness change exists. The problem is to determine the law of shell thickness change due to which this shell becomes a shell with limiting surface having a predetermined shape under the given load.

Statement of the problem. The problem of determining the shell thickness function at which the shell due to deformation by fixed uniform load becomes a shell with limiting surface of a given shape is examined. The desired shape of the shell is given as deviations of middle surface points from the corresponding non-deformed thin-walled element as normal displacements vector $w^*(x, y)$.

Mathematic model. We introduce an area $\Omega \in R^2$, where $\Omega = \{X : a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\}$, Γ is the border area.

Vector function of the state of thin-walled element $W(X) = \{u, v, w\}$ in the limited spatial area Ω is described by the relations:

$$L(H(X), W(X)) = P(X), \quad (1)$$

$$L^\Gamma(W(X))_{X=X^\Gamma \in \Gamma} = W^\Gamma(X^\Gamma), \quad (2)$$

where $L(\cdot)$, $L^\Gamma(\cdot)$ are defined differential operators; $W(X) = \{u, v, w\}$ is a vector of displacement in the direction x, y, z ; $P(X)$ is external loading; $H^0(X)$ is a function of the shell thickness varying, which describes geometric properties of the system.

External loading is fixed, plastic deformations in deformable system do not arise. Functions $H(X)$, $P(X)$ on the area Ω are limited using a priori setpoints. The set of correctness is introduced artificially.

The solution of the inverse problem of the shell thickness variation $H(X)$ under which the shell surface under the known uniform load at the end of deformation gain the given geometry $w^*(X)$ is determined.

The method of solution. The discretization area is performed. The solution of the direct problem (1), (2) using the finite element method is carried out.

Solution of the inverse problem as a vector of the model shell parameters which corresponds to a particular function of shell thickness distribution is described. The desired shape of the shell as the vector $w^* = \{w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*\}$ is given. The inverse problem concerning the required parameter vector in an equation form is formulated

$$w(H) - w^* = 0. \quad (3)$$

The variation inverse problem is formulated:

$$H = \arg \min_{H \in \bar{H}} J, \quad H \in \bar{H}, \quad (4)$$

$$J = \int_{\Omega} (w(H) - w^*)^2 d\Omega; \quad (5)$$

where \overline{H} is the range of components variation of unknown vector H .

To determine the vector of unknown parameters satisfying condition (4), an iterative process of minimizing the functional (5), similar to [4], is organized:

$$H^{(k)} = H^{(k-1)} + Q^{-1} \Big|_{H^{(k-1)}} \cdot \Delta(H^{(k-1)}), \quad (6)$$

where $Q = (G^T G)^{-1} G^T$; $\Delta(H^{(k-1)}) = (w^*(X_n) - w(X_n, H))$ is linearized discrepancy function; k is step number of the Newton iterative process.

The results of computer simulation. Results of recovery the shell thickness, which allow to obtain a predetermined shape of the shell, are provided. To test the adequacy of proposed approach the results of computer simulation are compared with the results of [3], in which analytical solution of the inverse problem of determining the thickness change law for shallow shell having an initial deflection is given.

REFERENCES

1. **Alexandrov M. A.** Calculation of close to equal strength of flexible plates and shells / M. A. Aleksandrov, M. S. Kornishin, H. H. Joiners // Applied Mechanics. – 1978. – Is. 10. – P.41–46 (in Russian).
2. **Banichuk N. V.** About optimal forms in mechanics of contact interaction / N. V. Banichuk // Proceedings of the Academy of Sciences. – 2009. – Vol. 427, № 2. – P. 187–191 (in Russian).
3. **Ganiev N. S.** On an inverse problem in the nonlinear theory of shallow shells of revolution / N. S. Ganiev // Math. Kazan Branch of the USSR Academy of Sciences, series Physics and Mathematics science. – 1962. – № 2. – P. 291–298 (in Russian).
4. **Obodan N. I.** Inverse problem of determination of external load at deformation of the thin-walled shells / N. I. Obodan, N. A. Guk // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics. – 2011. – № 1. – P. 47–50 (in Russian).
5. **Odishvili K. A.** Optimal law changing the thickness of shallow shell / K. A. Odishvili // Research on building structure. – M., 1971. – P. 31–49.
6. **Shihranov A. N.** Calculation of thin-walled structures with imperfections of shape / A. N. Shihranov, E. G. Saifullin // Bulletin of Kazan State Technical University. – 1996. – № 4. – P. 60–63 (in Russian).
7. **Shihranov A. N.** Optimization of flexible shallow shells of revolution by the stiffness / A. N. Shihranov // Actual problems of continuum mechanics. For the 15th anniversary of the IME KSC RAS. – Kazan State University, 2006. – P. 261–267.
8. **Bathe K.** Numerical method in finite element analysis / K Bathe, E. L. Wilson. – M. : Nauka, 1985. – 648 p. (in Russian).

*Днепропетровский национальный университет
им. Олеся Гончара,
Днепропетровск, Украина*

Поступила в редколлегию 10.03.13