

УДК 539.3

Р. А. Искендеров, канд. физ.-мат. наук, Дж. Н. Мамедов, М. М. Таран

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ РЕБРИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ СО СРЕДОЙ

Данная статья посвящена исследованию цилиндрической панели, контактирующей с вязкоупругой средой, с учетом поперечного сдвига в панели, с помощью вариационного принципа в геометрической нелинейной постановке задачи о параметрическом колебании подкрепленной перекрестной системы ребер. Влияние внешней среды учтено в соответствии с динамической моделью Пастернака.

Ключевые слова: ребристая оболочка, вязкоупругость, параметрические колебания, динамическая устойчивость, модель Пастернака, частота колебания.

Введение. Разработка математических моделей поведения подкрепленных оболочек наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках и проведение на их основе исследований устойчивости и колебаний, а также выбора рациональных параметров конструкции, контактирующей со средой, являются актуальными задачами. Исследованиям нелинейных колебаний гладких цилиндрических оболочек без среды посвящены монографии [1–3]. параметрические колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой без подкрепленной цилиндрической оболочки с заполнителем исследованы с применением вариационного принципа и модели Пастернака в работах [4, 5]. Задача о нелинейном параметрическом колебании подкрепленной продольными ребрами цилиндрической оболочки, контактирующей со средой, с применением модели Пастернака решена в работе [6]. Задача о свободных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженных осевыми сжимающими силами заполненной средой цилиндрических оболочек исследована в [7]. В работе [8] рассмотрена устойчивость подкрепленной кольцевыми ребрами цилиндрической оболочки с заполнителем при действии различных нагрузок, изменяющихся во времени. Работа [9] посвящена исследованию влияния начального прогиба на критические напряжения потери устойчивости ребристой цилиндрической оболочки, контактирующей со средой.

Метод решения задачи. Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для поперечно подкрепленной цилиндрической панели, контактирующей со средой, получим на основе вариационного принципа Остроградского – Гамильтона. Для применения принципа Остроградского – Гамильтона предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергии системы. Потенциальная энергия упругой деформации цилиндрической оболочки с учетом деформации сдвига имеет вид [1]

$$\begin{aligned}
\Pi_0 = & \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ N_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + N_y \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + \right. \\
& + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + M_x \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \\
& \left. + M_{xy} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + Q_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + Q_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) \right\} dx dy.
\end{aligned} \quad (1)$$

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации i -го продольного и j -го поперечного ребер таковы [3]:

$$\begin{aligned}
\Pi_i = & \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[E_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + E_i J_{yi} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + E_i J_{zi} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \right)^2 + G_i J_{kpi} \left(\frac{\partial \phi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx; \\
\Pi_j = & \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left[E_j F_j \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + E_j J_{xj} \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \right. \\
& \left. + E_j J_{zj} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} - \frac{\phi_{kpi}}{R} \right)^2 + G_j J_{kpj} \left(\frac{\partial \phi_{kpi}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dy.
\end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $F_i, J_{zi}, J_{yi}, J_{kpi}$ – площадь и моменты инерции поперечного сечения i -го продольного стержня относительно оси Oz и оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; $F_j, J_{zj}, J_{yj}, J_{kpj}$ – аналогичные величины для j -го поперечного стержня; E_i, G_i и E_j, G_j – модули упругости и сдвига материала i -го продольного и j -го поперечного стержня соответственно.

Потенциальная энергия внешних поверхностных и краевых нагрузок, приложенных к оболочке, определяется как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде

$$\begin{aligned}
A_0 = & - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (q_x u + q_y \vartheta + q_r w) dx dy - \int_{y_1}^{y_2} (T_1 u + S_1 \vartheta + Q_1 w + M_1 \varphi_1) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} dy - \\
& - \int_{x_1}^{x_2} (S_2 u + T_2 \vartheta + Q_2 w + M_2 \varphi_2) \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} dx.
\end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично потенциальные энергии внешних краевых нагрузок, приложенных к торцам соответственно i -го продольного и j -го поперечного стержней, определяются следующими выражениями (принимается, что к ребрам приложены только краевые нагрузки):

$$A_i = - \left(T_i u_i + S_i \vartheta_i + Q_i w_i + M_i \varphi_i + M_{1i} \varphi_{zi} + M_{kpi} \varphi_{kpi} \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2}; \quad (4)$$

$$A_j = - \left(S_j u_j + T_j \vartheta_j + Q_j w_j + M_j \varphi_j + M_{1j} \varphi_{zj} + M_{kpj} \varphi_{kpj} \right) \Big|_{y=y_1}^{y=y_2}.$$

Полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий упругих деформаций оболочки и ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{k_2} \Pi_i + \sum_{j=1}^{k_1} \Pi_j + A_0 + \sum_{i=1}^{k_2} A_i + \sum_{j=1}^{k_1} A_j. \quad (5)$$

Кинетическая энергия оболочки и ребер записывается в виде:

$$K_0 = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t_1} \right)^2 \right] d\xi d\theta; \quad (6)$$

$$K_i = \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{\delta i}}{F_i} \left(\frac{\partial \Phi_{\delta i}}{\partial t} \right)^2 \right] dx; \quad (7)$$

$$K_j = \rho_j F_j \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{\delta j}}{F_j} \left(\frac{\partial \Phi_{\delta j}}{\partial t} \right)^2 \right] dx.$$

Здесь t – временная координата; $t_1 = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}}$,

а ρ_0, ρ_i, ρ_j – соответственно плотности материалов, из которых изготовлены оболочка, i -й продольный и j -й поперечный стержни; k_1, k_2 – соответственно количество поперечных и продольных ребер.

Кинетическая энергия ребристой оболочки

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^{k_2} K_i + \sum_{j=1}^{k_1} K_j. \quad (8)$$

Предположим, что интенсивность нагрузки, действующей на панели со стороны вязкоупругого заполнителя, можно написать в следующем виде:

$$q_z = k_c w - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau)w(\tau) d\tau, \quad (9)$$

$k_c = q_1 + q_0 \nabla^2$ (модель Пастернака), где ∇^2 – двумерный оператор Лапласа на поверхности контакта; w – прогиб панели; q_1, q_0 – постоянные.

Уравнения движения ребристой оболочки, контактирующей с вязкоупругой средой, получены на основе принципа стационарности действия Остроградского – Гамильтона:

$$\delta W = 0, \quad (10)$$

где $W = \int_{t'}^{t''} \tilde{L} dt$ – действие по Гамильтону; $\tilde{L} = K - \Pi$ – функция Лагранжа,

а t' и t'' – заданные произвольные моменты времени.

Учитывая, что имеют место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_i(x) &= u(x, y_i) + h_i \phi_1(x, y_i); & \vartheta_i(x) &= \vartheta(x, y_i) + h_i \phi_2(x, y_i); & w_i(x) &= w(x, y_i); \\ \phi_i &= \phi_1(x, y_i); & \phi_{kpi}(x) &= \phi_2(x, y_i); & u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \phi_1(x_j, y); \\ \vartheta_j(y) &= \vartheta(x_j, y) + h_j \phi_2(x_j, y); & w_j(y) &= w(x_j, y); & \phi_j &= \phi_2(x_j, y); & \phi_{kpj}(y) &= \phi_1(x_j, y). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $h_i = 0,5h + H_i^1, h_j = 0,5h + H_j^1$; h – толщина оболочки; H_i^1 и H_j^1 – расстояния от осей i -го продольного и j -го поперечного стержней до поверхности оболочки; x_i и y_i – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой; ϕ_i, ϕ_{kpi} и ϕ_j, ϕ_{kpj} – углы поворота и закручивания поперечных сечений продольных и поперечных стержней соответственно.

С учетом соотношений (11) перемещение стержней выражаем через перемещение оболочки. Из условия стационарности (9) получаем системы нелинейных алгебраических уравнений относительно искомым неизвестных. Например, рассмотрим нелинейные параметрические колебания поперечно подкрепленной цилиндрической панели под действием радиальной нагрузки $q = q_0 + q_1 \sin \tilde{\omega} t$, где q_1 – амплитуда, $\tilde{\omega}$ – частота изменения давления, контактирующей с вязкоупругой средой. Считаем, что края панели шарнирно оперты, то есть при $x = 0, l$ и $\varphi = 0, \pi$:

$$N_x = 0; M_x = 0; w = 0; \vartheta = 0; \psi_y = 0.$$

Неизвестные величины аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u &= \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (u_0 \cos \omega t + u_1 \sin \omega t); \\
 \vartheta &= \sin \frac{\pi x}{l} \cos(k\phi) (\vartheta_0 \cos \omega t + \vartheta_1 \sin \omega t); \\
 N_x &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (N_{x0} \cos \omega t + N_{x1} \sin \omega t); \\
 N_y &= \cos \frac{\pi x}{l} \cos(k\phi) (N_{y0} \cos \omega t + N_{y1} \sin \omega t); \\
 M_y &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (M_{y0} \cos \omega t + M_{y1} \sin \omega t); \\
 M_{xy} &= \sin \frac{\pi x}{l} \cos(k\phi) (M_{xy0} \cos \omega t + M_{xy1} \sin \omega t); \\
 N_{xy} &= -qR + \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (N_{xy0} \cos \omega t + N_{xy1} \sin \omega t); \\
 M_x &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (M_{x0} \cos \omega t + M_{x1} \sin \omega t); \\
 \psi_x &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (\psi_{x0} \cos \omega t + \psi_{x1} \sin \omega t); \\
 \psi_y &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (\psi_{y0} \cos \omega t + \psi_{y1} \sin \omega t); \\
 Q_x &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(m\phi) (Q_{x0} \cos \omega t + Q_{x1} \sin \omega t); \\
 Q_y &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(m\phi) (\psi_{y0} \cos \omega t + \psi_{y1} \sin \omega t); \\
 w &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (w_0 \cos \omega t + w_1 \sin \omega t), \tag{12}
 \end{aligned}$$

где k – число волн в окружном направлении; ω – частота колебания искомых величин $u, w, \vartheta, N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, \psi_x, \psi_y, Q_x, Q_y$.

Подставим аппроксимации (12) в функционал L и, учитывая, что $x_1 = 0, x_2 = l, y_1 = 0, y_2 = \pi, t' = 0, t'' = \frac{2\pi}{\omega}$, проинтегрируем по x, y и t . Тогда вместо функционала (5) получаем функцию от искомых величин $u_m, w_m, \vartheta_m, N_{xm}, N_{ym}, N_{xym}, M_{xm}, M_{ym}, M_{xym}, \psi_{xm}, \psi_{ym}, Q_{xm}, Q_{ym}$.

Стационарное значение полученной функции дает система нелинейных уравнений относительно неизвестных:

$$1) \frac{\partial J}{\partial u_0} = 0; \quad 2) \frac{\partial J}{\partial u_1} = 0; \quad 3) \frac{\partial J}{\partial \vartheta_0} = 0; \quad 4) \frac{\partial J}{\partial \vartheta_1} = 0; \quad 5) \frac{\partial J}{\partial w_0} = 0; \quad 6) \frac{\partial J}{\partial w_1} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 &7) \frac{\partial J}{\partial N_{x0}} = 0; \quad 8) \frac{\partial J}{\partial N_{x1}} = 0; \quad 9) \frac{\partial J}{\partial N_{y0}} = 0; \quad 10) \frac{\partial J}{\partial N_{y1}} = 0; \quad 11) \frac{\partial J}{\partial N_{xy0}} = 0; \\
 &12) \frac{\partial J}{\partial N_{xy1}} = 0; \quad 13) \frac{\partial J}{\partial M_{x0}} = 0; \quad 14) \frac{\partial J}{\partial M_{x1}} = 0; \quad 15) \frac{\partial J}{\partial M_{y0}} = 0; \quad 16) \frac{\partial J}{\partial M_{y1}} = 0; \quad (13) \\
 &17) \frac{\partial J}{\partial M_{xy0}} = 0; \quad 18) \frac{\partial J}{\partial M_{xy1}} = 0; \quad 19) \frac{\partial J}{\partial \psi_{x0}} = 0; \quad 20) \frac{\partial J}{\partial \psi_{x1}} = 0; \quad 21) \frac{\partial J}{\partial \psi_{y0}} = 0; \\
 &22) \frac{\partial J}{\partial \psi_{y1}} = 0; \quad 23) \frac{\partial J}{\partial Q_{x0}} = 0; \quad 24) \frac{\partial J}{\partial Q_{x1}} = 0; \quad 25) \frac{\partial J}{\partial Q_{y0}} = 0; \quad 26) \frac{\partial J}{\partial Q_{y1}} = 0.
 \end{aligned}$$

Нелинейная система уравнений (13) решена методом Ньютона при следующих исходных данных:

$$E = E_i = E_j = 6,67 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2; \quad \nu = 0,3; \quad n = 8; \quad h_j = 1,39 \text{ мм}; \quad k = 16; \quad R = 160 \text{ мм};$$

$$\tilde{q}/\tilde{q}_0 = 3; \quad \tilde{q}_0/E = 0,002; \quad \Gamma(t) = Ae^{-\psi t}; \quad (\psi = 0,05; A = 0,1615);$$

$$|h_i| = 0,1375 \cdot 10^{-1} R; \quad \frac{I_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}; \quad h = 0,45 \text{ мм}; \quad I_{kp,j} = 0,48 \text{ мм}^4;$$

$$\frac{I_{kp,i}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}; \quad L = 800 \text{ мм}; \quad F_j = 5,75 \text{ мм}^2; \quad I_{xj} = 19,9 \text{ мм}^4;$$

$$\frac{F_i}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1}; \quad k_1 = 4; \quad \rho_0 = 7,82 / \text{см}^3; \quad \tau_0 = \frac{q_0}{Eh^3} = 0,08; \quad \tau_1 = \frac{q_1}{Eh^3}.$$

На рис. 1 приведены графики зависимости зоны динамической устойчивости от параметров конструкции на плоскости «нагрузка-частота» и представлены в виде кривой. Эта кривая разделяет плоскость на две области: для точек одной из которых колебания ограничены, а для другой – не ограничены во времени.

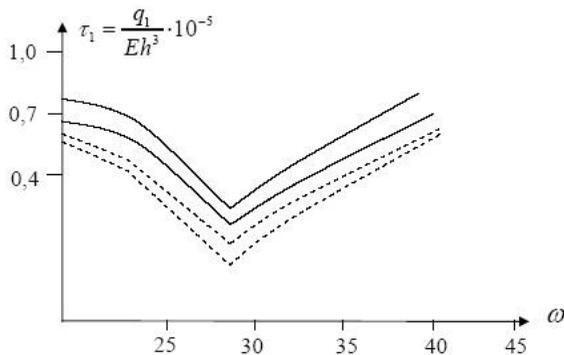


Рис. 1 – Области устойчивых и неустойчивых параметрических колебаний

На графике штриховые линии соответствуют колебаниям цилиндрической панели в вязкоупругой среде, моделируемой на основе динамической модели Пастернака, а сплошные – на основе классической модели Пастернака.

Вывод. Расчет показывает, что учет поперечного сдвига в оболочке приводит к сужению устойчивых зон оболочки. Применение динамической модели Пастернака приводит к снижению критической силы по сравнению с классической моделью Пастернака. Для вязкоупругого тела точка перелома характерной кривой поднимается над осью частот. Кроме того, учет влияния среды приводит к увеличению силы τ_1 .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Амиро И. Я.** Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – К.: Наук. думка, 1980. – 367 с.
2. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
3. **Искендеров Р. А.** Устойчивость подкрепленной кольцевыми ребрами цилиндрической оболочки с заполнителем при действии различных нагрузок, изменяющихся во времени / Р. А. Искендеров // Системные технологии. – Д., 2009. – № 2(61). – С. 198–204.
4. **Искендеров Р. А.** Влияние начального прогиба на критические напряжения потери устойчивости ребристой цилиндрической оболочки, контактирующей со средой / Р. А. Искендеров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Д.: Наука і освіта, 2010. – Вип. 14. – С. 183–190.
5. **Кубенко В. Д.** Нелинейные колебания цилиндрических оболочек / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Н. П. Подчасов – К.: Высшая школа, 1989. – 208 с.
6. **Латифов Ф. С.** Задача о свободных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной средой / Ф. С. Латифов, С. Г. Сулейманова // Механика машин, механизмов и материалов. Международный научно-технический журнал. – Минск: Изд-во объединенного института машиностроения НАН Беларуси, 2009. – № 1. – С. 59–62.
7. **Мехтиев М. М.** Нелинейные параметрические колебания подкрепленной продольными ребрами цилиндрической оболочки, контактирующей со средой / М. М. Мехтиев // Механика. – М.: Машиностроение, 2011. – № 1. – С. 23–27.
8. **Пирмамедов И. Т.** Параметрические колебания вязкоупругой оболочки, с учетом повреждаемости, заключенной в вязкоупругую матрицу / И. Т. Пирмамедов // Международный научно-технический журнал. – Минск: Изд-во объединенного института машиностроения НАН Беларуси, 2009. – № 1 (6). – С. 52–55.
9. **Пирмамедов И. Т.** Параметрические колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки, контактирующей с вязкоупругой средой, с применением динамической модели Пастернака / И. Т. Пирмамедов // Вестник Кавказского международного университета. – Тбилиси, 2009. – № 1. – С. 20–25.

Р. А. Искендеров, канд. фіз.-мат. наук, Дж. Н. Мамедов, М. М. Таран

НЕЛІНІЙНІ ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ РЕБРИСТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ, ЩО КОНТАКТУЄ З СЕРЕДОВИЩЕМ

Дана стаття присвячена дослідженню циліндричної панелі, що контактує з в'язкопружним середовищем, з урахуванням поперечного зсуву в панелі за допомогою варіаційного принципу в геометричній нелінійній постановці задачі про параметричні коливання підкріпленої перехресної системи ребер. Вплив зовнішнього середовища врахований у відповідності до динамічної моделі Пастернака.

Ключові слова: ребриста оболонка, в'язкопружність, параметричні коливання, динамічна стійкість, модель Пастернака, частота коливання.

NONLINEAR PARAMETRIC OSCILLATIONS OF RIBBED CYLINDRICAL PANEL IN CONTACT WITH A MEDIUM

This article is devoted to research with the help of the variational principle in geometric nonlinear formulation of the problem of parametric oscillations of a system of cross-stiffened cylindrical panel edges in contact with a viscous-elastic medium, taking into account the transverse shear in the panel. Influence of the environment is taken into account by using a dynamic model of Pasternak.

Keywords: ribbed shell, viscoelasticity, parametrical fluctuations, dynamic stability, Pasternak's model, fluctuation frequency.

Introduction. Development of mathematical models of strengthened shells behavior completely taking into account their work under dynamical loads, and also investigation of stability, vibrations, choice of rational parameters of a medium-contacting construction are urgent problems. The monographs [1–3] have been devoted to the investigation of nonlinear vibrations of smooth cylindrical shells without medium. Parametric vibrations of a non-linear and non-homogeneous in thickness viscous-elastic non-strengthened, filled cylindrical shell were investigated in [4, 5] by using the variational principle and the Pasternak model. The problem on nonlinear parametric vibrations of a medium-contacting cylindrical shell strengthened with longitudinal ribs was solved by using the Pasternak model in [6]. The problem on free vibrations of a medium-filled cylindrical shells strengthened with a crossed system of ribs and loaded with axial compressive forces was studied in [7]. The paper [8] considers stability of a filled cylindrical shell strengthened with annular ribs under different loads changing in time. The paper [9] is devoted to investigation of influence of initial flexure on critical stress of stability loss of a medium-contacting ridge shell.

Solution method of the problem. Differential equations of motion and natural boundary conditions for laterally strengthened medium-contacting cylindrical panel are obtained on the basis of the Ostrogradsky-Hamilton variational principle. For using the Ostrogradsky-Hamilton principle, potential and kinetic energy of the system with regard to shearing deformation is written beforehand. It is assumed that the load intensity acting on the panel from the side of viscous-elastic filler, may be written in the form

$$q_z = k_c w - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau)w(\tau)d\tau \quad (1)$$

where Γ is relaxation kernel, coefficient k_c is determined by dependence $k_c = q_1 + q_0 \nabla^2$ (Pasternak model), where ∇^2 is Laplace's two-dimensional operator on contact surface, w is panel's deflection, q_1 and q_0 are constant numbers.

The equations of motion of a ridge shell contacting with viscous-elastic medium, are obtained on the base of Ostrogradsky-Hamilton action stationarity principle

$$\delta W = 0, \quad (2)$$

where $W = \int_{t'}^{t''} \tilde{L} dt$ is Hamilton action, $\tilde{L} = K - \Pi$ is Lagrange function, t' and t'' are given arbitrary moments.

Taking into account constancy of radial deflections on the cross-sectional height, and also equality of appropriate twisting angles following from the conditions of rigid joint of ribs and a shell, we write the following relations:

$$\begin{aligned} u_i(x) &= u(x, y_i) + h_i \phi_1(x, y_i); \quad \mathcal{G}_i(x) = \mathcal{G}(x, y_i) + h_i \phi_2(x, y_i); \quad w_i(x) = w(x, y_i); \\ \phi_i &= \phi_1(x, y_i); \quad \phi_{kpi}(x) = \phi_2(x, y_i); \quad u_j(y) = u(x_j, y) + h_j \phi_1(x_j, y); \\ \mathcal{G}_j(y) &= \mathcal{G}(x_j, y) + h_j \phi_2(x_j, y); \quad w_j(y) = w(x_j, y); \quad \phi_j = \phi_2(x_j, y); \quad \phi_{kpi}(y) = \phi_1(x_j, y). \end{aligned} \quad (3)$$

where $h_i = 0,5h + H_i^1, h_j = 0,5h + H_j^1, , h$ is thickness of the panel, H_i^1 and H_j^1 are the distance from the axes of i -th longitudinal and j -th lateral bar to panel surface, x_j and y_j are the coordinates of conjugation lines of ribs and the panel, φ_j, φ_{kpi} and φ_j, φ_{kpi} – are rotation and twisting angles of cross sections of longitudinal and lateral bars respectively.

Allowing for relations (3), we express the bars displacement by the shell displacement. From stationarity condition (2) we obtain a system of nonlinear algebraic equations with respect to desired unknowns. Consider for example nonlinear parametric vibrations of laterally strengthened cylindrical panel under radial load $q = q_0 + q_1 \sin \tilde{\omega} t$, where q_1 is an amplitude, $\tilde{\omega}$ is pressure change frequency, contacting with viscous-elastic medium. It is assumed that the edges of the panel are hinge supported (i.e. for $x = 0, l$ and $\varphi = 0, \pi$), $N_x = 0; M_x = 0; w = 0; \mathcal{G} = 0; \psi_y = 0$.

We approximate the unknown variables in the following way:

$$\begin{aligned} u &= \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (u_0 \cos \omega t + u_1 \sin \omega t); \quad \mathcal{G} = \sin \frac{\pi x}{l} \cos(k\phi) (\mathcal{G}_0 \cos \omega t + \mathcal{G}_1 \sin \omega t); \\ N_x &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (N_{x0} \cos \omega t + N_{x1} \sin \omega t); \quad N_y = \cos \frac{\pi x}{l} \cos(k\phi) (N_{y0} \cos \omega t + N_{y1} \sin \omega t); \\ M_y &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (M_{y0} \cos \omega t + M_{y1} \sin \omega t); \quad M_{xy} = \sin \frac{\pi x}{l} \cos(k\phi) (M_{xy0} \cos \omega t + M_{xy1} \sin \omega t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{xy} &= -qR + \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (N_{xy0} \cos \omega t + N_{xy1} \sin \omega t); M_x = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (M_{x0} \cos \omega t + M_{x1} \sin \omega t); \\
\psi_x &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (\psi_{x0} \cos \omega t + \psi_{x1} \sin \omega t); \psi_y = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (\psi_{y0} \cos \omega t + \psi_{y1} \sin \omega t); \\
Q_x &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(m\phi) (Q_{x0} \cos \omega t + Q_{x1} \sin \omega t); Q_y = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(m\phi) (\psi_{y0} \cos \omega t + \psi_{y1} \sin \omega t); \\
w &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\phi) (w_0 \cos \omega t + w_1 \sin \omega t), \tag{4}
\end{aligned}$$

where k is the number of waves in peripheral direction, ω is vibration frequency of the desired variables $u, w, \vartheta, N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, \psi_x, \psi_y, Q_x, Q_y$.

Substitute approximation (4) in functional \tilde{L} and, taking into account $x_1 = 0, x_2 = l, y_1 = 0, y_2 = \pi, t' = 0, t'' = \frac{2\pi}{\omega}$, integrate with respect to x, y and t . Then instead of functional L we get function J of the desired variables $u_m, w_m, \vartheta_m, N_{xm}, N_{ym}, N_{xym}, M_{xm}, M_{ym}, M_{xym}, \psi_{xm}, \psi_{ym}, Q_{xm}, Q_{ym}$.

Stationary value of the obtained function gives a system of nonlinear equations with respect to the unknowns:

$$\begin{aligned}
1) \frac{\partial J}{\partial u_0} = 0; \quad 2) \frac{\partial J}{\partial u_1} = 0; \quad 3) \frac{\partial J}{\partial \vartheta_0} = 0; \quad 4) \frac{\partial J}{\partial \vartheta_1} = 0; \quad 5) \frac{\partial J}{\partial w_0} = 0; \quad 6) \frac{\partial J}{\partial w_1} = 0; \\
7) \frac{\partial J}{\partial N_{x0}} = 0; \quad 8) \frac{\partial J}{\partial N_{x1}} = 0; \quad 9) \frac{\partial J}{\partial N_{y0}} = 0; \quad 10) \frac{\partial J}{\partial N_{y1}} = 0; \quad 11) \frac{\partial J}{\partial N_{xy0}} = 0; \\
12) \frac{\partial J}{\partial N_{xy1}} = 0; \quad 13) \frac{\partial J}{\partial M_{x0}} = 0; \quad 14) \frac{\partial J}{\partial M_{x1}} = 0; \quad 15) \frac{\partial J}{\partial M_{y0}} = 0; \quad 16) \frac{\partial J}{\partial M_{y1}} = 0; \tag{5} \\
17) \frac{\partial J}{\partial M_{xy0}} = 0; \quad 18) \frac{\partial J}{\partial M_{xy1}} = 0; \quad 19) \frac{\partial J}{\partial \psi_{x0}} = 0; \quad 20) \frac{\partial J}{\partial \psi_{x1}} = 0; \quad 21) \frac{\partial J}{\partial \psi_{y0}} = 0; \\
22) \frac{\partial J}{\partial \psi_{y1}} = 0; \quad 23) \frac{\partial J}{\partial Q_{x0}} = 0; \quad 24) \frac{\partial J}{\partial Q_{x1}} = 0; \quad 25) \frac{\partial J}{\partial Q_{y0}} = 0; \quad 26) \frac{\partial J}{\partial Q_{y1}} = 0.
\end{aligned}$$

Nonlinear system of equations (5) was solved by the Newton method under the following input data:

$$E = E_i = E_j = 6,67 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2; \quad \nu = 0,3; \quad n = 8; \quad h_j = 1,39 \text{ mm}; \quad k = 16; \quad R = 160 \text{ mm};$$

$$\tilde{q} / \tilde{q}_0 = 3; \quad \tilde{q}_0 / E = 0,002; \quad \Gamma(t) = A e^{-\psi t}; \quad (\psi = 0,05; A = 0,1615);$$

$$|h_i| = 0,1375 \cdot 10^{-1} R; \quad \frac{I_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}; \quad h = 0,45 \text{ mm}; \quad I_{kp,j} = 0,48 \text{ mm}^4;$$

$$\frac{I_{kpi}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}; \quad L = 800 \text{ mm}; \quad F_j = 5,75 \text{ mm}^2; \quad I_{xy} = 19,9 \text{ mm}^4;$$

$$\frac{F_i}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1}; \quad k_1 = 4; \quad \rho_0 = 7,8 \text{ g/sm}^3; \quad \tau = \frac{q}{Eh} = 0,08; \quad \tau = \frac{q}{Eh}.$$

In fig. 1 we give dependences of dynamical stability zone on the parameters of the construction on the plane «load-frequency» and represent them in the form of a curve. This curve divides the plane into two domains: for the points of one of them the vibrations are bounded in time, for other one the vibrations are not bounded in time. On the graph, the shaded lines correspond to vibrations of the cylindrical panel in viscous-elastic medium, modeled on the base of Pasternak dynamical model, the solid lines – on the base of Pasternak classical model. Furthermore, curve 1 corresponds to accounting of lateral shear in the shell, curve 2 – to ignorance of lateral shear in the shell. The calculation shows that accounting of lateral shear in the shell reduces to contraction of stable zones of the shell. The calculation also shows that application of Pasternak dynamical model reduces to decrease of critical force compared with Pasternak classical model. From the calculation of shells we have that for viscous-elastic body the breaking point of the characteristic curve rises over the frequency axis. Furthermore, the calculation shows that accounting of the medium influence reduces to increase of force τ_1 .

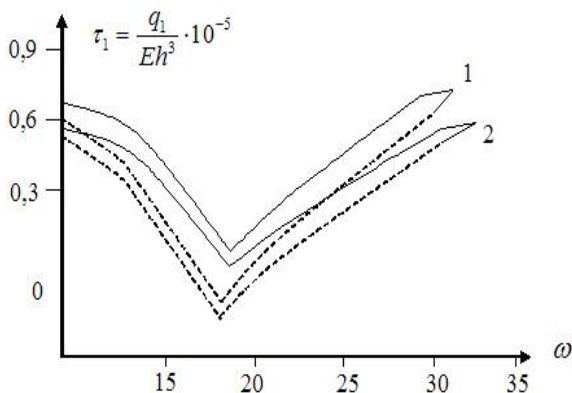


Fig. 1 – Domains of stable and unstable parametric vibrations.

REFERENCES

1. **Amiro I. Ya.** Theory of ridge shells / I. Ya. Amiro, V. A. Zarutskiy // Analysis methods of shells. – K. : Naukova Dumka, 1980. – 367 p. (in Russian).
2. **Volmir A. S.** Nonlinear dynamics of plates and shells / A. S. Volmir. – M. : Nauka, 1972. – 432 p. (in Russian).

3. **Iskenderov R. A.** Stability of a filled cylindrical shell strengthened with annular ribs under different load changing in time. / R. A. Iskenderov // *Sistemniye tehnologii*. – D., 2009. – № 2, (61). – P. 198–204 (in Russian).

4. **Iskenderov R. A.** Influence of initial flexure on critical stress of stability loss of a medium contacting ridge cylindrical shell / R. A. Iskenderov // *Problems of computational mechanics and strength of structures*. – D. : DNY named after Oles Honchar, 2010. – Vol. 14. – P. 183–190 (in Russian).

5. **Kubenko V. D.** Nonlinear vibrations of cylindrical shells / V. D. Kubenko, P. S. Kovalchuk, N. P. Podchasov. – K. : Vysshaya shkola, 1989. – 208 p. (in Russian).

6. **Latifov F. S.** A problem on free vibrations of medium-filled cylindrical shells strengthened with crossed system of ribs and loaded with axial contractive forces / F. S. Latifov, S. G. Suleymanova // *Mechanics of machines, mechanisms and materials. International scientific-engineering journal*. Minsk: Publ. of the Machine-building Institute of NAS of Byelorussia, 2009. – № 1. – P. 59–62 (in Russian).

7. **Mehtiyev M. M.** Nonlinear parametric vibrations of a medium-contacting cylindrical shell strengthened with longitudinal ribs / M. M. Mehtiyev // *Mechanika*. – M. : Mashinostroeniye, 2011. – № 1. – P. 23–27 (in Russian).

8. **Pirmamedov I. T.** Parametric vibrations of a viscoelastic shell with regard to damageability, enclosed in viscoelastic matrix / I. T. Pirmamedov // *Mechanics of machines, mechanisms and materials. International scientific-engineering journal*. – Minsk : Publ. of the Machine-building Institute of NAS of Byelorussia, 2009. – № 1, (6). – P. 52–55 (in Russian).

9. **Pirmamedov I. T.** Parametric vibrations of nonlinear and non-homogeneous on thickness viscoelastic, medium-contacting cylindrical shell, by using the Pasternak dynamical model / I. T. Pirmamedov // *Vestnik Kavkazskogo Mezhdunarodnogo Universiteta – Tbilisi*, 2009. – № 1. – P. 20–25 (in Russian).

*Азербайджанский архитектурно-строительный университет,
Баку, Азербайджан*

Поступила в редколлегию 01.04.2013