

УДК 539.3

В. Ф. Мейш, д-р физ.-мат. наук, Н. П. Кепенач

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОПЕРЕЧНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ

В работе рассмотрена задача вынужденных колебаний поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения при действии нестационарной нагрузки. Приведена постановка и разработан численный алгоритм решения поставленной задачи. Система дифференциальных уравнений основана на использовании теории оболочек и стержней типа Тимошенко. Приведен пример расчета динамического поведения поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки при нестационарной нагрузке.

Ключевые слова: цилиндрические оболочки эллиптического поперечного сечения, теория оболочек и стержней типа Тимошенко, вынужденные колебания, численные методы.

Введение. При решении задач об определении напряженно-деформированного состояния подкрепленных оболочек существует два основных направления – использование конструктивно ортотропной модели подкрепленных оболочек и модель с учетом дискретного расположения ребер [1–5]. Расчеты согласно конструктивно-ортотропной модели оболочек в ряде случаев приводят к значительным погрешностям, что вызывает необходимость использования модели подкрепленных оболочек с учетом дискретного расположения ребер [1–5]. Задачи динамического поведения подкрепленных оболочек с учетом дискретного расположения ребер в рамках классической модели детально рассмотрены в работах [1, 2, 4]. Уточненная модель теории подкрепленных оболочек при исследовании динамического поведения неоднородных конструкций при нестационарных нагрузках использовалась в работах [3, 5–7]. В указанных работах, в основном, рассмотрены подкрепленные оболочки канонической формы (цилиндрические, сферические и конические). Эллиптические подкрепленные оболочки с учетом дискретного расположения ребер при нестационарных нагрузках рассмотрены в исследованиях [8, 9]. Практически отсутствуют работы по динамике подкрепленных оболочек более сложной геометрии.

В данной работе в рамках модели теории оболочек и стержней типа Тимошенко приведена постановка задачи о вынужденных колебаниях поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки эллиптического сечения, построен численный алгоритм решения задачи и проведен анализ полученных численных результатов.

Изложение основного материала. Рассматривается подкрепленная цилиндрическая оболочка эллиптического поперечного сечения при действии распределенной внутренней нагрузки $P_3(s_1, s_2, t)$, где s_1, s_2 и t – пространственные и временная координаты. При постановке задачи учитывается дискретное расположение продольных ребер [2–4].

Коэффициенты первой квадратичной формы и кривизн координатной поверхности исходной оболочки записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, \quad k_1 = 0; \\ A_2 &= (a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2}; \\ k_2 &= ab(a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{-3/2}; \\ s_1 &= A_1 \alpha_1, \quad s_2 = A_2 \alpha_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где a и b – полуоси эллипса, который характеризует поперечное сечение цилиндрической оболочки.

Для вывода уравнений колебаний подкрепленной цилиндрической оболочки используется вариационный принцип стационарности Гамильтона – Остроградского [1, 3, 5]. После стандартных преобразований в вариационном функционале, с учетом условий контакта оболочка – ребро [1, 3, 5], получим две группы уравнений:

– уравнения колебаний гладкой цилиндрической оболочки с эллиптическим поперечным сечением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} - k_2 T_{23} &= \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3(s_1, s_2, t) &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (2)$$

– уравнения колебаний j -го ребра, расположенного вдоль оси s_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [T_{11}]_j &= \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2,j} T_{23j} + [S]_j &= \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{23j}}{\partial s_2} + k_2 T_{22} + [T_{13}]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [M_{11}] &= \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{torj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right]; \\ \frac{\partial M_{22j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{j22}}{\partial s_2} - T_{23j} + [H] &= \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right]. \end{aligned}$$

В уравнениях (2), (3) $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2$ – компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки; ρ, ρ_j – плотности материала оболочки и j -го ребра соответственно; h – толщина оболочки; $h_{cj} = 0,5(h + h_j)$; h_j – высота поперечного сечения j -го ребра. Величины $[f] = f^+ - f^-$, где f^\pm – значения функций справа и слева от j -й линии разрыва (линия проецирования центра тяжести j -го ребра на срединную поверхность цилиндрической оболочки).

Величины усилий и моментов в уравнениях колебаний для оболочки (2) связаны с соответствующими величинами деформаций следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu_2 \varepsilon_{22}), \quad T_{22} = B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11}), \quad (4) \\ T_{13} &= B_{13} \varepsilon_{13}, \quad T_{23} = B_{23} \varepsilon_{23}; \quad S = B_{12} \varepsilon_{12}; \\ M_{11} &= D_{11}(\kappa_{11} + \nu_2 \kappa_{22}), \quad M_{22} = D_{22}(\kappa_{22} + \nu_1 \kappa_{11}); \quad H = D_{12} \kappa_{12}; \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_2} + \frac{\partial u_2}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2; \\ \kappa_{11} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}. \end{aligned}$$

В соотношениях (4) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \\ B_{12} &= G_{12} h, \quad B_{13} = G_{13} h, \quad B_{23} = G_{23} h; \\ D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{12} = G_{12} \frac{h^3}{12}, \end{aligned}$$

где $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_1, \nu_2$ – физико-механические параметры ортотропного материала оболочки.

Величины усилий и моментов в уравнениях колебаний для j -го ребра (3) связаны с соответствующими величинами деформаций согласно соотношениям:

$$\begin{aligned} T_{11j} &= E_i F_i \varepsilon_{11j}, \quad T_{12j} = G_j F_j \varepsilon_{12j}, \quad T_{13j} = G_j F_j \varepsilon_{13j}; \\ M_{11j} &= E_j I_{1j} \kappa_{11j}, \quad M_{12j} = G_j I_{torj} \kappa_{12j}; \\ \varepsilon_{11j} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1} \pm h_{ej} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{22j} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \pm h_{ej} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}; \\ \kappa_{11j} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \kappa_{12j} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

В соотношениях (5) E_j, G_j – физико-механические параметры материала ребра; F_j, I_{1j}, I_{torj} – геометрические параметры поперечного сечения j -го ребра. Уравнения колебаний (2)–(5) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

Численный алгоритм решения задачи. Численный алгоритм решения начально-краевой задачи (2)–(5) основан на применении интегро-интерполяционного метода построения разностных соотношений по пространственным координатам s_1, s_2 и явной аппроксимации по временной координате t [3, 5–7, 9].

Согласно исходной постановке задачи решение ищется в гладкой области (уравнения (2), (4)) и склеивается на линиях разрывов (уравнения (3), (5)). Остановимся на построении решения в гладкой области $D = \{s_{10} \leq s_1 \leq s_{1N}; s_{20} \leq s_2 \leq s_{2N}\}$. Выберем подобласть $D_{kl}^1 \subset D$, $D_{kl}^1 = \{s_{1k-1/2} \leq s_1 \leq s_{1k+1/2}; s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2}\}$ и проинтегрируем уравнения колебаний (2) по этой подобласти. В результате получим следующие разностные соотношения нахождения решений на $(n+1)$ -ом временном слое:

$$\begin{aligned} \frac{T_{11k+1/2,l}^n - T_{11k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{S_{k,l+1/2}^n - S_{k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} &= \rho h (u_{1k,l}^n)_{\bar{t}}; \\ \frac{S_{k+1/2,l}^n - S_{k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{T_{22k,l+1/2}^n - T_{22k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + \frac{k_{2l}}{2} (T_{23k,l+1/2}^n - T_{23k,l-1/2}^n) &= \rho h (u_{2k,l}^n)_{\bar{t}}; \\ \frac{T_{13k+1/2,l}^n - T_{13k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{T_{23k,l+1/2}^n - T_{23k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\ - \frac{k_{2l}}{2} (T_{22k,l+1/2}^n - T_{22k,l-1/2}^n) + P_{3k,l}^n &= \rho h (u_{3k,l}^n)_{\bar{t}}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{M_{11k+1/2,l}^n - M_{11k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{H_{k,l+1/2}^n - H_{k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} -$$

$$-\frac{1}{2}(T_{13k+1/2,l}^n + T_{13k-1/2,l}^n) = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1k,l}^n)_{\bar{\bar{r}}};$$

$$\frac{H_{k+1/2,l}^n - H_{k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{M_{22k,l+1/2}^n - M_{22k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} -$$

$$-\frac{1}{2}(T_{23k,l+1/2}^n + T_{23k,l-1/2}^n) = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{2k,l}^n)_{\bar{\bar{r}}}.$$

Таким образом, в разностных соотношениях величины обобщенных перемещений $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2$ соотнесены к целым узлам пространственной разностной сетки, а величины усилий и моментов (соответственно деформаций) – к полуцелым узлам $(k \pm 1/2, l)$; $(k, l \pm 1/2)$. Для получения согласованных разностных соотношений для усилий и моментов уравнения (4) интегрируются по областям:

$$D_{kl}^2 = \{s_{1k-1} \leq s_1 \leq s_{1k}; s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2}\};$$

$$D_{kl}^3 = \{s_{1k} \leq s_1 \leq s_{1k+1}; s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2}\}$$

и т. д. В соотношениях (6) обозначения разностных производных введено согласно [5, 10]. Аналогичным образом строятся разностные соотношения для уравнений колебаний j -го подкрепляющего ребра. Указанный подход построения разностных схем позволяет выполнять закон сохранения полной механической энергии исходной упругой системы на разностном уровне.

Числовые результаты. Как числовой пример, рассматривалась задача динамического поведения поперечной подкрепленной ребрами цилиндрической панели эллиптического сечения при действии распределенной внутренней импульсной нагрузки. Предполагается, что все стороны цилиндрической панели жестко защемлены. Поперечные ребра располагались в сечениях $s_i = 0,25Li$; $i = \overline{1,3}$ (панель подкреплена тремя поперечными ребрами), где L – длина панели по оси s_1 .

Распределенная импульсная нагрузка $P_3(s_1, s_2, t)$ задавалась следующим образом:

$$P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)],$$

где A – амплитуда загрузки; T – длительность нагрузки. В расчетах полагалось $A = 10^6 \text{ Па}$; $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

Задача решалась при следующих геометрических и физико-механических параметрах для оболочки: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h = 10^{-2} \text{ м}$; $L = 0,4 \text{ м}$. Параметры эллиптичности поперечного сечения брались следующие: 1) $a = b = 0,1$; 2) $a = 1,1b$; 3) $a = 1,2b$. Для подкрепляющего ребра полагось: $E_j = E$; $F_j = a_j h_j$; $a_j = h$; $h_j = 2h$.

Были проведены расчеты для трех вариантов эллиптичности поперечного сечения цилиндрической панели: 1) $a/b = 1$; 2) $a/b = 1,1b$; 3) $a/b = 1,2$. Расчеты проводились в области $D = \{0 \leq s_1 \leq L, 0 \leq s_2 \leq A_2 \pi / 8\}$ на временном отрезке $0 \leq t \leq 80T$. На рис. 1–3 приведены результаты численных расчетов для величин u_3 , σ_{11} , σ_{22} соответственно в сечении $s_2 = 0$ вдоль координаты $s_1 - 0 \leq s_1 \leq L$. Учитывая динамический характер распределения искомым величин по пространственным координатам s_1, s_2 и времени t , проведен анализ напряженно-деформированного состояния исходной неоднородной конструкции для времен достижения ими максимальных по модулю значений. На рис. 1 приведены зависимости величин u_3 от координаты s_1 при разных значениях a/b в моменты достижения ими максимальных по модулю значений.

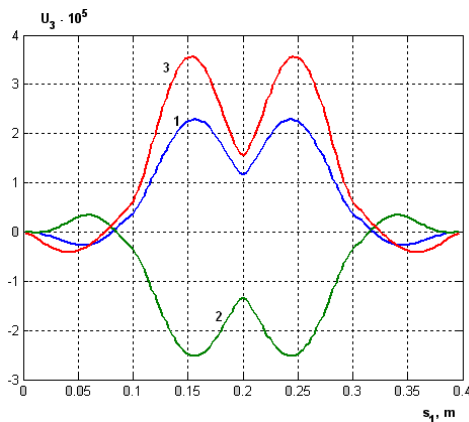


Рис. 1 – Зависимость величин перемещения u_3 по пространственной координате s_1 в сечении $s_2 = 0$

Кривая 1 ($a/b = 1$) соответствует времени $t = 18T$, кривая 2 ($a/b = 1,1$) – времени $t = 19T$, кривая 3 – ($a/b = 1,2$) – $t = 14,5T$. На рис. 2 приведены аналогичные зависимости для величин σ_{11} . Кривая 1 соответствует времени $t = 18,875T$, кривая 2 – $t = 19,625T$, кривая 3 – $t = 17,75T$.

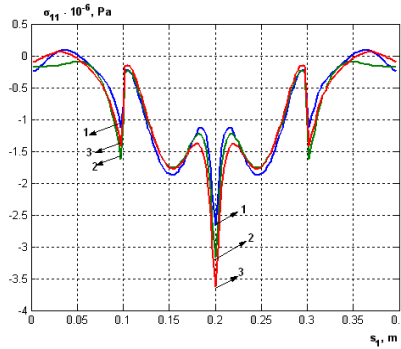


Рис. 2 – Зависимость величин напряжения σ_{11} по пространственной координате s_1 в сечении $s_2 = 0$

На рис. 3 приведены зависимости величин σ_{22} от координаты s_1 . Кривая 1 соответствует времени $t = 18T$, кривая 2 – $t = 19,625T$, кривая 3 – $t = 19T$. На приведенных рисунках визуально можно четко определить местонахождение подкрепляющих ребер по координате s_1 (линии пространственных разрывов). Проявляется заметная зависимость искомых величин от параметра эллиптичности поперечного сечения. Для величин u_3 отношение $u_{3\max}^3 / u_{3\max}^1 = 1,56$, где верхние индексы отвечают номеру варианта расчетов. Для величин σ_{11} – $\sigma_{11\max}^3 / \sigma_{11\max}^1 = 1,3$. В случае σ_{22} – $\sigma_{22\max}^3 / \sigma_{22\max}^1 = 1,1$. Свои максимальные значения по модулю величины u_3 , ε_{22} , σ_{22} достигают между ребрами, а величины ε_{11} , σ_{11} – на линиях расположения ребер.

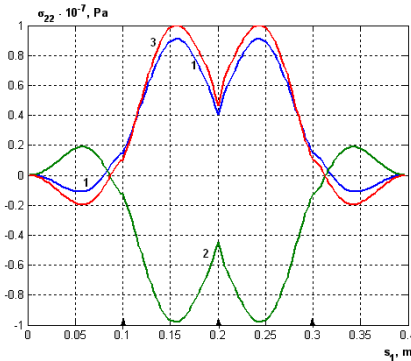


Рис. 3 – Зависимость величины u_3 в сечении $s_2 = 0$ по временной координате t

Выводы. В работе дана постановка задачи о вынужденных колебаниях поперечно подкрепленных цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением при действии нестационарной нагрузки. Разработан численный алгоритм решения данного класса задач. Приведены результаты расчетов и проведен количественный и качественный анализ полученных данных.

Перспективы дальнейшего развития в данном направлении. Представляют интерес исследования нестационарных задач в аналогичной постановке при других граничных условиях, а также решение неосесимметричных задач о вынужденных колебаниях указанных оболочек с продольно-поперечным подкреплением.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Амиро И. Я.** Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – К. : Наук. думка, 1980. – 368 с.
2. **Амиро И. Я.** Динамика ребристых оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий, В. Г. Паламарчук. – К. : Наук. думка, 1983. – 204 с.
3. **Головко К. Г.** Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш; под ред. акад. НАН Украины А. Н. Гузя. – К. : Изд-во полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
4. Колебания ребристых оболочек вращения / под ред. И. Я. Амиро. – К. : Наук. думка, 1988. – 172 с.
5. **Луговой П. З.** Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / П. З. Луговой, В. Ф. Мейш, Э. А. Штанцель. – К. : Изд-во полигр. центр «Киевский ун-т», 2005. – 537 с.
6. **Мейш В. Ф.** Нелинейное деформирование продольно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках / В. Ф. Мейш // Механика композитных материалов. – 1993. – Т. 29, Вып. 2. – С. 184–190.
7. **Мейш В. Ф.** О численном решении двумерных динамических задач геометрически нелинейной теории дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек типа Тимошенко / В. Ф. Мейш // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 2. – С. 61–67.
8. **Мейш В. Ф.** К численному решению задач динамики подкрепленных эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках / В. Ф. Мейш // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 3. – С. 53–59.
9. **Мейш В. Ф.** К расчету неосесимметричных колебаний дискретно подкрепленных поперечными ребрами эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках / В. Ф. Мейш, Н. В. Майбородина // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 63–73.
10. **Самарский А. А.** Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.

В. Ф. Мейш, д-р фіз.-мат. наук, Н. П. Кепенач

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПОПЕРЕЧНО ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

В роботі розглянута задача про вимушені коливання поперечно підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу під дією нестационарного навантаження. Приведено постановку та розроблено чисельний алгоритм розв'язування поставленої задачі. Система диференціальних рівнянь базується на використанні теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка. Наведено приклад розрахунку динамічної поведінки поперечно підкріпленої циліндричної оболонки під дією нестационарного навантаження.

Ключові слова: циліндричні оболонки еліптичного перерізу, теорія оболонок та стержнів типу Тимошенка, вимушені коливання, чисельні методи.

FORCED OSCILLATION OF TRANSVERSE STIFFENED CYLINDRICAL SHELLS WITH ELLIPTICAL CROSS-SECTION UNDER NON-STATIONARY LOADS

A problem of forced oscillation of transverse stiffened cylindrical shells with an elliptical cross section under the action of the nonstationary loads is considered. The problem formulation and the numerical algorithm for its solution are represented. The system of differential equations based on the theory of shells and rods Timoshenko type is obtained. As an example the results of analysis of nonstationary vibrations of transverse stiffened cylindrical shells are presented.

Keywords: cylindrical shell with an elliptical cross section, the theory of shells and rods Timoshenko type, forced vibrations, numerical methods.

In this paper, the problem of forced oscillations of transverse stiffened cylindrical shell of elliptical cross – section is considered in the framework of the theory of shells and rods Timoshenko type. A numerical algorithm is constructed for solving the problem. The results of analysis of nonstationary vibrations of transverse stiffened shells are presented.

To derive the vibration equations for stiffened cylindrical shell the variational principle of stationary Hamilton – Ostrogradskii is used [4, 3]. The coefficients of the first quadratic form and the curvature of the coordinate surface of the cylindrical shell are taken in accord [3]. After standard transformations in the variational functional and taking into account the conditions of the contact shell – transverse ribs [1, 2, 6], two groups of equations are obtained:

1) the vibration equations of smooth cylindrical shell of the elliptical cross-section

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} - k_2 T_{23} = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3(s_1, s_2, t) &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1)$$

2) the vibration equations of transverse rib, which is located along the s_2 – axis

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [T_{11}]_j &= \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j} T_{23j} + [S]_j &= \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial T_{23j}}{\partial s_2} + k_2 T_{22} + [T_{13}]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [M_{11}] = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{torj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right],$$

$$\frac{\partial M_{22j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{j22}}{\partial s_2} - T_{23j} + [H] = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right].$$

In equations (1), (2) designation of parameters is introduced by [4, 3].

The initial vibration equations are supplemented by the corresponding boundary and initial conditions.

The numerical algorithm for solving the initial – boundary value problems based on using of integro-interpolation method of constructing difference relations along the spatial coordinates and the explicit approximation of the time coordinate [4, 3, 10]. According to the initial formulation of the problem the solution is constructed in a smooth area and is pasted on the lines of discontinuity [7–9].

As a numerical example, the problem of the dynamic behaviour of the transverse stiffened cylindrical panel with elliptical cross section under the action of a distributed pulse loading is represented.

REFERENCES

1. **Amiro I. Ya.** The methods of calculation of shells. Vol. 2. The theory of ribbed shells / I. Ya. Amiro, V. A. Zarutskiy. – K. : Scientific Dumka, 1980. – 376 p. (in Russian).
2. **Amiro I. Ya.** The dynamics of ribbed shells / I. Ya. Amiro., V. A. Zarutskiy, V. G. Palamarchuk. – Kiev : Scientific Dumka, 1983. – 204 p. (in Russian).
3. **Golovko K. G.** Dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loading: monograph / K. G. Golovko, P. Z. Lugovoyi, V. F. Meish; edited by academician. NAS of Ukraine, A. N. Guzya. – K. : Ed. print. center «Kyiv Univ.», 2012. – 541 p. (in Russian).
4. **Lugovoyi P. Z.** The nonstationary dynamics of inhomogeneous shell constructions: monograph / P. Z. Lugovoyi, V. F. Meish, E. A. Shtantsel. – K. : Ed. print. center «Kyiv Univ.», 2005. – 537 p. (in Russian).
5. **Meish V. F.** Forced vibrations of a three-layered cylindrical shells of elliptical cross section under nonstationary loads / V. F. Meish, A. N. Mihalyak // Int. Appl. Mechanics. – 2010. – Vol. 46, № 2. – P. 226–232 (in Russian).
6. **Meish V. F.** Nonlinear deformation of longitudinally reinforced orthotropic cylindrical shells under nonstationary load / V. F. Meish // Mechanics of Composite Materials. – 1993. – Vol. 29, № 2. – P. 184–190 (in Russian).
7. **Meish V. F.** On the numerical solution of two-dimensional dynamic problems of geometrically nonlinear theory of discretely reinforced cylindrical shells Timoshenko type / V. F. Meish // Int. Appl. Mechanics. – 1997. – Vol. 33, № 2. – P. 221–227 (in Russian).
8. **Meish V. F.** On the numerical solution of dynamical problems of supported ellipsoidal shells under nonstationary load / V. F. Meish // Int. Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, № 3. – P. 333–339 (in Russian).
9. **Meish V. F.** Calculation of non-axisymmetrical vibrations of discretely supported by transverse ribs ellipsoidal shells under nonstationary load / V. F. Meish, N. V. Mayborodina // Int. Appl. Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 10. – P. 1323–1333 (in Russian).
10. **Samarskiyi A. A.** The theory of difference schemes / A. A. Samarskiyi. – M. : Nauka, 1977. – 656 p. (in Russian).

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины,
Киев, Украина

Поступила в редакцию 01.02.2013