

УДК 539.3

С. В. Мелешко

ИЗГИБ БАЛКИ ТИМОШЕНКО НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

Исследуется изгиб балки на упругом основании при действии сосредоточенной силы в рамках модели балки Тимошенко. Показано, что влияние поперечного сдвига на деформацию балки на упругом основании определяется одним обобщённым безразмерным параметром – некоторой комбинацией параметра жёсткости основания и параметра сдвиговой податливости балки. Приведены результаты численного анализа.

Ключевые слова: балка на упругом основании, модель С. П. Тимошенко, локальная нагрузка.

Введение. Представленные в известных учебниках и монографиях [1, 2 и др.] решения задачи об изгибе балки на упругом основании основаны на классической модели балки Эйлера – Бернулли, т. е. в них пренебрегаются деформациями поперечного сдвига.

Развитие высокоскоростного транспорта требует уточненного исследования напряжённо-деформированного состояния балок на упругом основании при действии локальных нагрузок. В связи с этим в последние годы возрос интерес к более точным моделям балок, наиболее важной из которых является модель С. П. Тимошенко, учитывающая сдвиговую податливость балки.

Цель данной работы состоит в исследовании изгиба балки на упругом основании в рамках модели балки Тимошенко при действии сосредоточенной силы. Используется новая форма безразмерного уравнения изгиба, существенно упрощающая анализ. Показано, что влияние поперечного сдвига на деформацию балки на упругом основании определяется одним обобщённым безразмерным параметром – некоторой комбинацией параметра жёсткости основания и параметра сдвиговой податливости балки. Приведены результаты численного анализа в пакете Maple. Показано, что для стальных балок даже при бесконечной длине сдвиговая податливость приводит к увеличению максимального прогиба в 1,5–3 раза и одновременно к уменьшению максимальных напряжений примерно на 20–40 %.

Дифференциальное уравнение изгиба балки Тимошенко на упругом основании. Рассматривается изгиб бесконечной балки, лежащей на упругом основании и нагруженной сосредоточенной поперечной силой, приложенной в сечении $x = 0$ (рис. 1). Основание считается Винклеровским: реакция, приходящаяся на единицу длины балки, равна $c y$, где y – прогиб, c – коэффициент жёсткости основания.

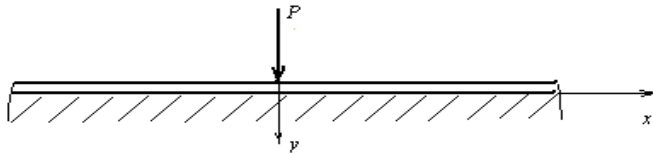


Рис. 1 – Бесконечная балка на упругом основании, нагруженная силой

В соответствии с теорией Тимошенко [1], полный прогиб балки y складывается из изгибного и сдвигового прогибов y_δ и y_c : $y = y_\delta + y_c$. Для изгибного прогиба остаётся в силе дифференциальное уравнение (q – интенсивность нагрузки, действующей на балку):

$$EI \frac{d^4 y_\delta}{dx^4} = q. \quad (1)$$

Угол наклона для сдвигового прогиба определяется по касательному напряжению в центре тяжести сечения:

$$\frac{dy_c}{dx} = \frac{(\tau_{xy})_{y=0}}{G} = \frac{kQ}{FG}, \quad (2)$$

где Q – поперечная сила; F – площадь поперечного сечения; G – модуль упругости при сдвиге и k – численный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения.

Дифференцируя (2) по x трижды (с учётом того, что в задаче статики балки Тимошенко сохраняются обычные дифференциальные зависимости при изгибе, в частности, $dQ/dx = -q$), получаем

$$\frac{d^4 y_c}{dx^4} = -\frac{k}{FG} \frac{d^2 q}{dx^2}.$$

Умножая это уравнение на EI и складывая с (1), получаем уравнение для полного прогиба при произвольной (дифференцируемой дважды) нагрузке q

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q - \frac{kEI}{FG} \frac{d^2 q}{dx^2}. \quad (3)$$

Для балки на винклеровском основании при отсутствии распределённой внешней нагрузки имеем $q = -cy$, и уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{ck}{FG} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{cy}{EI} = 0. \quad (4)$$

Следуя [3], введём безразмерные переменные и параметры:

$$Y = \frac{y}{r_0}, \quad \xi = \frac{x}{r_0}, \quad \chi = \frac{kE}{G}, \quad r_0 = \sqrt{\frac{I}{F}}, \quad \tilde{n}_* = \frac{cr_0^2}{EF}, \quad P^* = \frac{P}{EF}, \quad (5)$$

где r_0 – радиус инерции поперечного сечения; χ – параметр, характеризующий податливость балки на сдвиг. В классической модели балки Эйлера – Бернулли $\chi = 0$, что соответствует бесконечно большой жёсткости на сдвиг. В этих параметрах уравнение (4) принимает вид

$$\frac{d^4 Y}{d\xi^4} - \chi \tilde{n}_* \frac{d^2 Y}{d\xi^2} + \tilde{n}_* Y = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) должно быть дополнено уравнениями, связывающими различные компоненты прогиба (они нужны для формулировки граничных условий). Из (1) и (5) получим связь между изгибным и полным прогибами в размерной и безразмерной формах

$$\frac{d^4 y_u}{dx^4} = -\frac{c}{EI} y \Rightarrow \frac{d^4 Y_u}{d\xi^4} + c_* Y = 0. \quad (7)$$

Аналогично из (2) после дифференцирования получим связь между сдвиговым и полным прогибами

$$\frac{d^2 y_c}{dx^2} = \frac{kc}{FG} y \Rightarrow \frac{d^2 Y_c}{d\xi^2} - \chi c_* Y = 0. \quad (8)$$

Используя полученные уравнения, легко записать несвязанное дифференциальное уравнение для изгибного прогиба, которое оказывается идентичным уравнению (6) (но граничные условия различны)

$$\frac{d^4 Y_u}{d\xi^4} - \chi c_* \frac{d^2 Y_u}{d\xi^2} + c_* Y_u = 0 \quad (9)$$

(аналогичному уравнению удовлетворяет также сдвиговый прогиб). С учётом (9) и равенства $Y = Y_u + Y_c$ из уравнения (7) может быть получено соотношение:

$$\chi \frac{d^2 Y_u}{d\xi^2} + Y_c = 0. \quad (10)$$

Решение дифференциального уравнения изгиба. Корни характеристического уравнения для уравнения (6) $\lambda^4 - \chi c_* \lambda^2 + c_* = 0$ равны

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt[4]{c_*} \sqrt{\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 1}}, \quad (11)$$

где введен параметр

$$\theta = \frac{1}{2} \chi \sqrt{c_*}.$$

Если выполняется условие $\theta > 1$ (основание с очень большой жёсткостью), все корни (11) действительные, причём два из них отрицательны (пусть это будут λ_1 и λ_2) и два положительны.

Если $\theta < 1$ (для классической модели балки $\chi = 0$, т. е. это условие выполняется всегда; для модели Тимошенко это условие выполняется при не слишком большой жёсткости основания), две пары комплексно-сопряженных корней могут быть записаны в виде

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm(\alpha \pm \gamma i) \quad (\alpha > 0, \gamma > 0). \quad (12)$$

Действительная и мнимая части корней α и γ могут быть найдены в алгебраической форме (путём возведения (11) и (12) в квадрат при $\theta < 1$ и сравнения действительных и мнимых частей):

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{c_*}{4}} \sqrt{1+\theta}, \gamma = \sqrt[4]{\frac{c_*}{4}} \sqrt{1-\theta} \quad (13)$$

(при $\theta < 1$ из (13) всегда получаем действительное γ , при $\theta > 1$ – мнимое, тогда (12) даёт действительный корень). Отметим, что для классической модели балки Эйлера – Бернулли величины α и γ совпадают:

$$\alpha = \gamma = \sqrt[4]{c_*} / \sqrt{2}.$$

Запишем общее решение уравнения (6) для двух случаев $\theta < 1$ и $\theta > 1$:

а) $\theta < 1$

$$Y = e^{-\alpha \xi} (C_1 \cos \gamma \xi + C_2 \sin \gamma \xi) + e^{\alpha \xi} (C_3 \cos \gamma \xi + C_4 \sin \gamma \xi);$$

б) $\theta > 1$

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 \xi} + C_2 e^{\lambda_2 \xi} + C_3 e^{\lambda_3 \xi} + C_4 e^{\lambda_4 \xi}.$$

Для бесконечной балки (на интервале $(0, \infty)$) решение упрощается:

а) $\theta < 1$

$$Y = e^{-\alpha \xi} (C_1 \cos \gamma \xi + C_2 \sin \gamma \xi); \quad (14)$$

б) $\theta > 1$

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 \xi} + C_2 e^{\lambda_2 \xi}. \quad (15)$$

Поскольку уравнения для изгибного (9) и сдвигового прогибов идентичны уравнению (6), их общие решения могут быть записаны в виде, аналогичном (14), (15) (для бесконечной балки):

а) $\theta < 1$

$$Y_u = e^{-\alpha\xi}(D_1 \cos \gamma\xi + D_2 \sin \gamma\xi), Y_c = e^{-\alpha\xi}(E_1 \cos \gamma\xi + E_2 \sin \gamma\xi); \quad (16)$$

б) $\theta > 1$

$$Y_u = D_1 e^{\lambda_1 \xi} + D_2 e^{\lambda_2 \xi}, Y_c = E_1 e^{\lambda_1 \xi} + E_2 e^{\lambda_2 \xi}, \quad (17)$$

где D_i, E_i – постоянные, которые могут быть выражены через постоянные C_i при помощи соотношений (7), (8) или (10). Подставляя выражения (14)–(17) в (8) и (10), получим систему линейных соотношений между постоянными C_i, D_i и E_i :

а) $\theta < 1$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)E_1 - 2\alpha\gamma E_2 = \chi c_* C_1, 2\alpha\gamma E_1 + (\alpha^2 - \gamma^2)E_2 = \chi c_* C_2, \quad (18)$$

$$\chi [(\alpha^2 - \gamma^2)D_1 - 2\alpha\gamma D_2] = -E_1, \chi [2\alpha\gamma D_1 + (\alpha^2 - \gamma^2)D_2] = -E_2;$$

б) $\theta > 1$

$$\lambda_1^2 E_1 = \chi c_* C_1, \lambda_2^2 E_2 = \chi c_* C_2, \chi \lambda_1^2 D_1 = -E_1, \chi \lambda_2^2 D_2 = -E_2. \quad (19)$$

Балка на упругом основании под действием сосредоточенной силы.

Применим полученное решение к задаче о действии сосредоточенной силы P на бесконечно длинную балку (с началом координат в точке приложения силы). В этом случае достаточно рассмотреть лишь правую часть балки, для которой применимо полученное выше решение. При $\xi = 0$ выполняются следующие граничные условия:

– Угол поворота для изгибной составляющей прогиба равен нулю

$$\left(\frac{dY_u}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 0. \quad (20)$$

– Поперечная сила равна половине приложенной силы P (со знаком «–»):

$$Q(0) = -\frac{P}{2} \quad (21)$$

(отметим, что полный угол наклона изогнутой оси может иметь скачок в точке приложения силы $\xi = 0$ вследствие скачка в поперечной силе и появления

сдвигового прогиба в соответствии с (2), поэтому нельзя ставить условие типа (20) для полного прогиба).

Условие (21) с учётом (2) после перехода к безразмерным параметрам запишется в виде

$$\left(\frac{dY_c}{d\xi} \right)_{\xi=0} = -\frac{\chi}{2} P^*. \quad (22)$$

В случае $\theta < 1$ для нахождения произвольных постоянных в условия (20) и (22) подставим (16). С помощью (18), учитывая (13), можем выразить C_i :

а) $\theta < 1$

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}(1+2\theta)}{4c_*^{3/4}\sqrt{1+\theta}} P^*, \quad C_2 = \frac{\sqrt{2}(1-2\theta)}{4c_*^{3/4}\sqrt{1-\theta}} P^*. \quad (23)$$

Общее решение уравнения (14) запишется в виде

$$Y = \frac{P^*}{2\sqrt{2}c_*^{3/4}} e^{-\alpha\xi} \left(\frac{1+2\theta}{\sqrt{1+\theta}} \cos \gamma\xi + \frac{1-2\theta}{\sqrt{1-\theta}} \sin \gamma\xi \right). \quad (24)$$

В частном случае $\chi = 0$ (классическая модель балки) решение (24) сводится к выражению

$$Y = \frac{P^* e^{-\alpha\xi}}{2\sqrt{2}c_*^{3/4}} (\cos \alpha\xi + \sin \alpha\xi) \quad (\alpha = \sqrt[4]{c_*} / \sqrt{2})$$

и совпадает, как легко проверить после перехода к размерным параметрам по (5), с известным решением [1].

Для случая $\theta > 1$ в условия (20) и (22) подставим (17). С помощью (19) выразим C_i :

б) $\theta > 1$

$$C_1 = -\frac{\lambda_1^3}{2c_* (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} P^*, \quad C_2 = \frac{\lambda_2^3}{2c_* (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} P^*. \quad (25)$$

Общее решение для уравнения полного прогиба запишется в виде

$$Y = \frac{P^*}{2c_* (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left(-\lambda_1^3 e^{\lambda_1 \xi} + \lambda_2^3 e^{\lambda_2 \xi} \right). \quad (26)$$

Учитывая, что $\lambda_2^2 - \lambda_1^2 = 2\sqrt{c_*} \sqrt{\theta^2 - 1}$, выражение (26) может быть записано также в виде

$$Y = \frac{P^*}{4c_*^{3/2} \sqrt{\theta^2 - 1}} \left(\lambda_1^3 e^{\lambda_1 \xi} - \lambda_2^3 e^{\lambda_2 \xi} \right). \quad (27)$$

Результаты численного анализа. Сравним вначале прогибы, получаемые в двух моделях балки – Эйлера – Бернулли и Тимошенко. Максимальный прогиб (в точке приложения силы $\xi = 0$) для балки Тимошенко равен:

а) $\theta < 1$ (из (24))

$$Y_m^T = \frac{P^*}{2\sqrt{2} c_*^{3/4}} \frac{2\theta + 1}{\sqrt{1 + \theta}};$$

б) $\theta > 1$ (из (27), с учётом выражений (11))

$$Y_m^T = \frac{P^* (2\theta + 1)}{2c_*^{3/4} \left(\sqrt{\theta - \sqrt{\theta^2 - 1}} + \sqrt{\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}} \right)}.$$

Отношение максимальных прогибов в балке Тимошенко и в балке Эйлера–Бернулли равно:

а) $\theta < 1$

$$\frac{Y_m^T}{Y_m^{EB}} = \frac{2\theta + 1}{\sqrt{1 + \theta}}; \quad (28)$$

б) $\theta > 1$

$$\frac{Y_m^T}{Y_m^{EB}} = \frac{\sqrt{2} (2\theta + 1)}{\left(\sqrt{\theta - \sqrt{\theta^2 - 1}} + \sqrt{\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}} \right)}. \quad (29)$$

Мы видим, что влияние сдвиговой податливости балки на максимальный прогиб во всех случаях зависит только от обобщённого параметра $\theta = (1/2)\chi\sqrt{c_*}$.

Зависимость (28), (29) представлена на рис. 2. Как видно из рис. 2, при учёте поперечного сдвига максимальные перемещения заметно возрастают, примерно в 1,5–3 раза, тем больше, чем больше жёсткость основания.

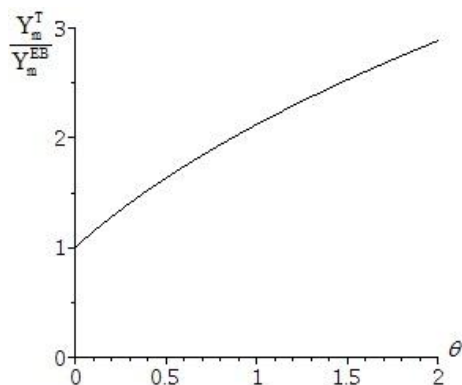


Рис. 2 – Влияние обобщённого параметра сдвиговой податливости балки на максимальный прогиб

Зависимость прогиба балки от координаты ξ , определяемая формулами (24), (27), иллюстрируется рис. 3, на котором построен относительный прогиб балки Y/P^* при $c_* = 0,1$ и $c_* = 0,5$ для двух значений χ : $\chi = 0$ (т. е. для модели Эйлера – Бернулли) и $\chi = 3$, что примерно соответствует изотропному материалу (с обычной зависимостью между модулями упругости на растяжение и на сдвиг) для балки прямоугольного сечения. При $c_* = 0,1$ и $\chi = 3$ получаем $\theta < 1$, при $c_* = 0,5$ и $\chi = 3$ – $\theta > 1$.

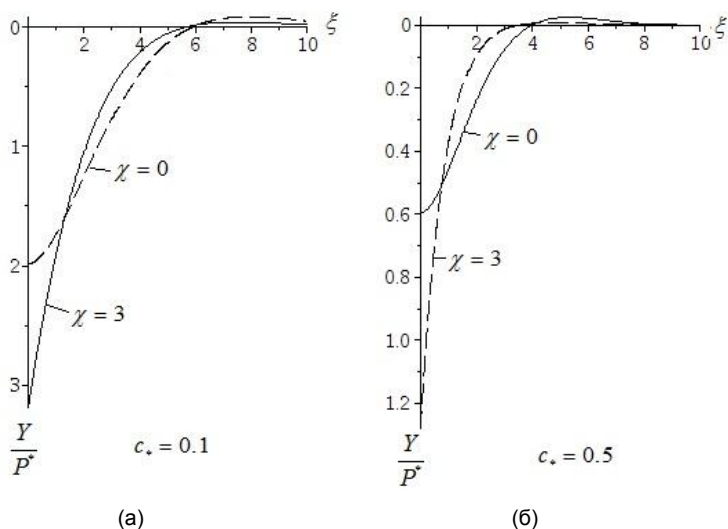


Рис. 3 – Нормализованный прогиб балки Y/P^*

При учёте сдвиговой податливости заметно меняется не только максимальный прогиб, но и профиль прогиба. Он становится более локализованным.

Перейдём теперь к оценке влияния поперечного сдвига на изгибающие моменты (напряжения). В безразмерных переменных и параметрах без-

размерный изгибающий момент $M^* = \frac{M}{r_0 EF}$ равен

$$M^* = -\frac{d^2 Y_u}{d\xi^2}, \quad (30)$$

т. е. определяется через изгибный прогиб. В связи с этим выпишем решения для изгибного прогиба. Из (23) с помощью (18) для случая $\theta < 1$ и из (25) с помощью (19) соответственно для случая $\theta > 1$ получим выражения произвольных постоянных D_1, D_2 :

а) $\theta < 1$

$$D_1 = \frac{\sqrt{2}}{4c_*^{3/4} \sqrt{1+\theta}} P^*, \quad D_2 = \frac{\sqrt{2}}{4c_*^{3/4} \sqrt{1-\theta}} P^* ;$$

б) $\theta > 1$

$$D_1 = \frac{P^*}{2\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad D_2 = -\frac{P^*}{2\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}.$$

Подставляя в общие решения (16) и (17) эти выражения, по (30) получим нормализованные изгибающие моменты:

а) $\theta < 1$

$$M^* = \frac{P^*}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{C_*}} e^{-\alpha\xi} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\theta}} \cos \gamma\xi - \frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \sin \gamma\xi \right). \quad (31)$$

В частном случае $\chi = 0$ (классическая модель балки) (31) сводится к выражению

$$M^* = \frac{P^*}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{C_*}} e^{-\alpha\xi} (\cos \alpha\xi - \sin \alpha\xi) \quad (\alpha = \sqrt[4]{c_*} / \sqrt{2});$$

б) $\theta > 1$

$$M^* = \frac{-P^*}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (\lambda_1 e^{\lambda_1 \xi} - \lambda_2 e^{\lambda_2 \xi}). \quad (32)$$

Максимальный изгибающий момент (в точке приложения силы $\xi = 0$) для балки Тимошенко равен:

а) $\theta < 1$

$$(M^*)_m^T = \frac{P^*}{2\sqrt{2}\sqrt{C_*}\sqrt{1+\theta}};$$

б) $\theta > 1$

$$(M^*)_m^T = \frac{-P^*}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

Отношение максимальных изгибающих моментов в балке Тимошенко и в балке Эйлера – Бернулли равно:

а) $\theta < 1$

$$\frac{(M^*)_m^T}{(M^*)_m^{EB}} = \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}; \quad (33)$$

б) $\theta > 1$

$$\frac{(M^*)_m^T}{(M^*)_m^{EB}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{\theta - \sqrt{\theta^2 - 1}} + \sqrt{\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}}\right)}. \quad (34)$$

Влияние сдвиговой податливости балки на максимальный момент зависит только от обобщённого параметра $\theta = (1/2)\chi\sqrt{C_*}$. Зависимость (33), (34) представлена на рис. 4.

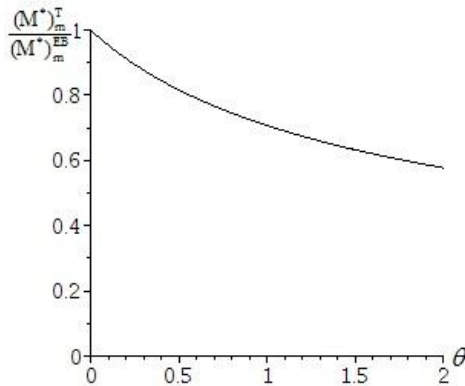


Рис. 4 – Влияние параметра сдвиговой податливости балки на максимальный изгибающий момент

Как видно из рис. 4, при учёте поперечного сдвига максимальный изгибающий момент уменьшается, примерно на 20–40%, тем больше, чем больше жёсткость основания.

Зависимость изгибающего момента от координаты ξ , определяемая формулами (31), (32), иллюстрируется рис. 5, на котором построен относительный изгибающий момент M^*/P^* при $c_* = 0,1$ и $c_* = 0,5$ для двух значений χ : $\chi = 0$ и $\chi = 3$.

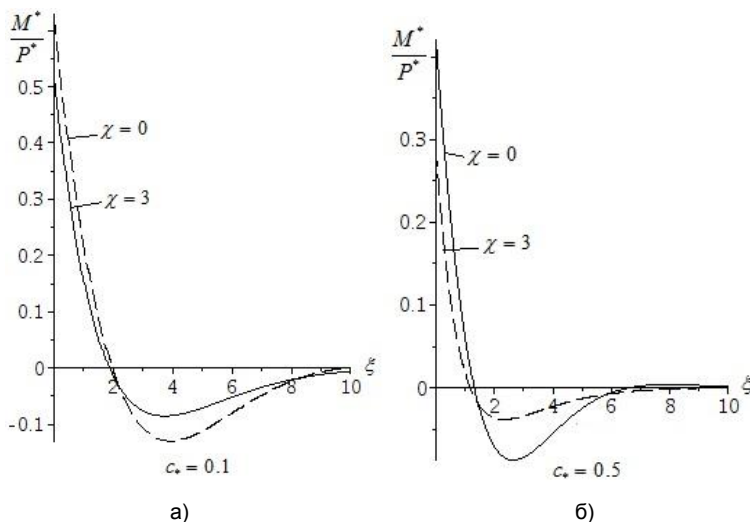


Рис. 5 – Относительный изгибающий момент M^*/P^*

Выводы. В данной работе получено дифференциальное уравнение изгиба балки Тимошенко на упругом основании в безразмерных переменных и параметрах, которое удобно для исследования влияния сдвиговых деформаций на прогиб балки.

Получено решение этого уравнения для случая действия сосредоточенной силы. Выполнен численный анализ решения с использованием пакета Maple. Проведено сравнение решений, полученных для классической модели балки и для модели балки Тимошенко. Из полученных результатов видно, что при учёте поперечного сдвига

- максимальные перемещения в модели Тимошенко заметно возрастают по сравнению с классической моделью, примерно в 1,5–3 раза, тем больше, чем больше жёсткость основания;
- заметно меняется не только максимальный прогиб, но и профиль прогиба, он становится более локализованным;
- максимальный изгибающий момент уменьшается, примерно на 20–40%, тем больше, чем больше жёсткость основания.

Автор выражает благодарность д-ру техн. наук проф. А. И. Маневичу за постановку задачи, консультации и обсуждение результатов работы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Власов В. З.** Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев.– М. : ГИФМЛ, 1960. – 492 с.
2. **Маневич А. И.** Поперечные волны в балке Тимошенко из вязко-упругого материала / А. И. Маневич // Theoretical Foundations of Civil Engineering. – Warsaw, 2009. – XV. – P. 209–216.
3. **Тимошенко С. П.** Сопrotивление материалов. Ч. 1–2. – М. : Наука, 1965.– Ч. 1. – 364 с.; Ч. 2. – 480 с.

С. В. Мелешко

ВИГИН БАЛКИ ТИМОШЕНКО НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ

Досліджується вигин балки на пружній основі в рамках моделі балки Тимошенко під дією зосередженої сили. Показано, що вплив поперечного зсуву на деформацію балки на пружній основі визначається одним узагальненим безрозмірним параметром – деякою комбінацією параметра жорсткості основи та параметра зсувної податливості балки. Наведено результати чисельного аналізу.

Ключові слова: балка на пружній основі, модель Тимошенко, локальне навантаження.

S. V. Meleshko

BENDING OF TIMOSHENKO BEAM ON AN ELASTIC FOUNDATION UNDER THE ACTION OF A CONCENTRATED FORCE

The bending of Timoshenko beam on an elastic foundation under the action of a concentrated force is studied. It is shown that the influence of transversal shear on the deformation of beam resting on the elastic foundation is determined by a single generalized dimensionless parameter - some combination of the shear flexibility parameter of the beam and the foundation stiffness parameter. Results of the numerical analysis are presented.

Keywords: beam on elastic foundation, Timoshenko model, local loading.

Bending of a infinite beam resting on Winkler elastic foundation with stiffness parameter c and under the action of a concentrated shear force applied at section $x=0$ is studied (fig. 1).

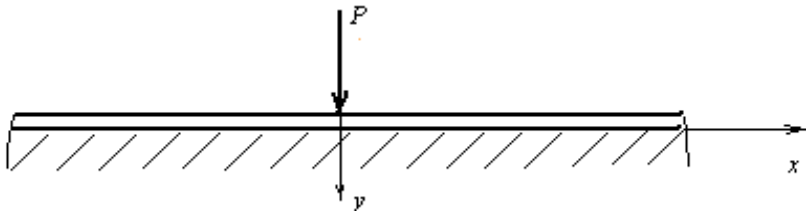


Fig. 1 – Infinite beam on an elastic foundation under the action of a concentrated force

The governing differential equation is the following

$$\frac{d^4 y}{d x^4} - \frac{c k}{F G} \frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{c y}{E I} = 0$$

(E is the modulus of elasticity, G is the shear modulus, I is the second moment of area, F – total cross-sectional area, k – shear factor that depends on shape of the cross section). Introducing dimensionless parameters

$$Y = \frac{y}{r_0}, \quad \xi = \frac{x}{r_0}, \quad \chi = \frac{kE}{G}, \quad r_0 = \sqrt{\frac{I}{F}}, \quad \tilde{n}_* = \frac{c r_0^2}{EF}, \quad P^* = \frac{P}{EF},$$

where r_0 – radius of gyration; χ – shear flexibility parameter of the beam (in classical Euler – Bernoulli model of beam $\chi = 0$) the governing equation can be written in the form

$$\frac{d^4 Y}{d \xi^4} - \chi \tilde{n}_* \frac{d^2 Y}{d \xi^2} + \tilde{n}_* Y = 0.$$

This equation should be supplemented with relations for the bending and shear deflections

$$\frac{d^4 Y_e}{d \xi^4} + \tilde{n}_* Y = 0, \quad \frac{d^2 Y_c}{d \xi^2} - \chi c_* Y = 0.$$

The general solution can be written in the form:

a) $\theta < 1$

$$Y = e^{-\alpha \xi} (C_1 \cos \gamma \xi + C_2 \sin \gamma \xi) + e^{\alpha \xi} (C_3 \cos \gamma \xi + C_4 \sin \gamma \xi);$$

b) $\theta > 1$

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 \xi} + C_2 e^{\lambda_2 \xi} + C_3 e^{\lambda_3 \xi} + C_4 e^{\lambda_4 \xi},$$

where

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm 4 \sqrt{c_*} \sqrt{\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 1}},$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{c_*}{4}} \sqrt{1 + \theta}, \quad \gamma = \sqrt[4]{\frac{c_*}{4}} \sqrt{1 - \theta}, \quad \theta = \frac{1}{2} \chi \sqrt{c_*}.$$

This analysis showed that:

– In the case of concentrated transverse force P applied at section $\xi = 0$, the following boundary conditions are fulfilled;

- The angle of rotation for the bending component of deflection is zero;
- The transverse force is equal to half of the applied force (with the sign "-").

Then the solution is as follows:

a) for $\theta < 1$:

$$Y = \frac{P^*}{2\sqrt{2}c_*^{3/4}} e^{-\alpha\xi} \left(\frac{1+2\theta}{\sqrt{1+\theta}} \cos \gamma\xi + \frac{1-2\theta}{\sqrt{1-\theta}} \sin \gamma\xi \right),$$

b) for $\theta > 1$:

$$Y = \frac{P^*}{4c_*^{3/2} \sqrt{\theta^2 - 1}} \left(\lambda_1^3 e^{\lambda_1 \xi} - \lambda_2^3 e^{\lambda_2 \xi} \right).$$

A numerical analysis was performed in which the solutions for the classical and Timoshenko beam models were compared. This analysis showed that:

- the account of transverse shear results in changing profile of the bending axis - it becomes more localized;
- maximum displacement in Timoshenko beam model is significantly greater comparing to the classical model, up to 1,5–3 times;
- maximum bending moment decreases by about 20–40%.

REFERENCES

1. **Vlasov V. Z.** Beams, plates and shells on elastic foundation / V. Z. Vlasov, N. N. Leontiev. – Moscow : GIPML, 1960. – 492 p. (in Russian).
2. **Manevich A. I.** Transverse waves in visco-elastic Timoshenko beam / A. I. Manevich // Theoretical Foundations of Civil Engineering. – Warsaw, 2009. – XV. – P. 209–216 (in Russian).
3. **Timoshenko S. P.** Strength of materials. Part 1–2 / S. P. Timoshenko. – Moscow : Nauka, 1965. – Part 1 – 364 p.; Part 2 – 480 p. (in Russian).

*Днепропетровский национальный университет
им. Олесь Гончара,
Днепропетровск, Украина*

Поступила в редколлегию 20.04.2013