

УДК 539.3

*М. М. Николишин, д-р фіз.-мат. наук, В. К. Опанасович, канд. фіз.-мат. наук,
Л. Р. Куротчин, М. С. Слободян, канд. фіз.-мат. наук*

ЗНАХОДЖЕННЯ ДОВЖИНИ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН БІЛЯ ВЕРШИНИ НАСКРІЗНОЇ ТРІЩИНИ НА ПРЯМОЛІНІЙНІЙ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ ПРИ РОЗТЯЗІ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ

Досліджена задача розтягу напруженнями на нескінченності кусково-однорідної ізотропної пластини з наскрізною тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля її вершин. Для знаходження довжини пластичних зон використали умови пластичності Мізеса та Треска у вигляді поверхневого шару. Знайдено напружений стан пластини на межі поділу матеріалів. Побудовано графічні залежності довжини пластичних зон та розкриття берегів тріщини у її вершинах від зовнішнього навантаження.

Ключові слова: тріщина, розтяг, кусково-однорідна пластина, умова пластичності Мізеса, умова пластичності Треска, пластична зона.

Вступ. У машинобудуванні та інших галузях техніки широко використовуються пластинчасті елементи конструкцій, що пов'язано з їх легкістю та міцністю. Дієдатність таких елементів, їх експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів, які різко знижують діапазон допустимого навантаження і можуть призвести до руйнування конструкції. Дослідження задач розтягу кусково-однорідної пластини з тріщиною на межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон проведено у публікаціях [4, 5].

Формулювання задачі. Розглянемо кусково-однорідну ізотропну пластину з прямолінійною межею поділу матеріалів, яка знаходиться під дією однорідного поля напружень на нескінченності. Вважаємо, що на межі поділу матеріалів знаходиться наскрізна тріщина, береги якої вільні від зовнішнього навантаження, а в її вершинах наявні пластичні зони. Поза тріщиною матеріали пластин спаяні.

В серединній поверхні пластини введемо декартову систему координат $Oxy\bar{z}$ з початком координат в центрі тріщини завдовжки $2l$, а вісь Ox направимо вздовж межі поділу матеріалів. Довжину тріщини з пластичними зонами позначимо через $2a$, а лінію спаю матеріалів – через L' , тріщину – через L , а пластичні зони тріщини – через L_1^+ і L_1^- , $L_1 = L_1^+ \cup L_1^-$ (рис. 1). Для пружних характеристик верхньої півплощини будемо приписувати індекс 1, а для нижньої – індекс 2. граничним значенням відповідних величин при $y \rightarrow \pm 0$ будемо приписувати знаки «+» і «-».

Згідно з постановкою задачі маємо такі крайові умови:

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ = (\sigma_y - i\tau_{xy})^-, (u + iv)^+ = (u + iv)^- \text{ на } L'; \quad (1)$$

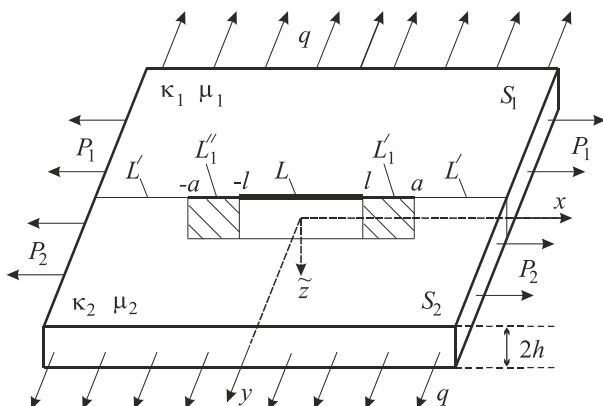


Рис. 1 – Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

$$\sigma_y^\pm = 0, \tau_{xy}^\pm = 0 \text{ на } L; \quad (2)$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_0, \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = -\tau_0 \text{ на } L'_1, \sigma_y^\pm = \sigma_0, \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = \tau_0 \text{ на } L''_1, \quad (3)$$

де u, v – проекції вектора переміщення по осі Ox і Oy відповідно; σ_y, τ_{xy} – компоненти тензора напружень; σ_0, τ_0 – невідомі нормальні і дотичні напруження у пластичній зоні.

Побудова розв'язку. В роботі [5] з використанням комплексних потенціалів Колосова – Мухелішвілі [3] розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження та побудовано їх розв'язок у класі функцій, обмежених у пластичних вершинах. На межі поділу матеріалів отримано такі вирази для компонент тензора напружень:

на L_1 :

$$\begin{aligned} \sigma_y^+ &= \sigma_y^- = \sigma_0, \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = \tau_0 \cdot \text{sign}(x), \\ \sigma_x^+ &= \rho(x)[- \sigma_0 \{ \sin b(x) I_6(x) - \cos b(x) I_5(x) \} + \\ &+ \tau_0 \text{sign}(x) \{ \sin b(x) I_5(x) + \cos b(x) I_6(x) \} + \tilde{g}_1 \sigma_0 + \tilde{P}_1 + \\ &+ 2\tau_0 \text{sign}(x) \begin{cases} \{ \sin b(x) I_3(x) - \cos b(x) I_4(x) \}, x \in L'_1 \\ \{ \sin b(x) I_1(x) + \cos b(x) I_2(x) \}, x \in L''_1 \end{cases}, \\ \sigma_x^- &= -\rho(x)[- \sigma_0 \{ \sin b(x) I_6(x) - \cos b(x) I_5(x) \} + \\ &+ \tau_0 \text{sign}(x) \{ \sin b(x) I_5(x) + \cos b(x) I_6(x) \} - \tilde{g}_2 \sigma_0 + \tilde{P}_2 + \\ &+ 2\tau_0 \text{sign}(x) \begin{cases} \{ \sin b(x) I_3(x) - \cos b(x) I_4(x) \}, x \in L'_1 \\ \{ \sin b(x) I_1(x) + \cos b(x) I_2(x) \}, x \in L''_1 \end{cases}; \end{aligned}$$

на L :

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = 0, \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0,$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^+ &= \rho(x)[\sigma_0\{\sin b(x)[I_2(x) - I_4(x)] - \\ &- \cos b(x)[I_1(x) + I_3(x)]\} + \tau_0\{\sin b(x)[-I_1(x) + I_3(x)] - \\ &- \cos b(x)[I_2(x) + I_4(x)]\}] + \tilde{P}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^- &= -\rho(x)[\sigma_0\{\sin b(x)[I_2(x) - I_4(x)] - \\ &- \cos b(x)[I_1(x) + I_3(x)]\} + \tau_0\{\sin b(x)[-I_1(x) + I_3(x)] - \\ &- \cos b(x)[I_2(x) + I_4(x)]\}] + \tilde{P}_2; \end{aligned}$$

на L' :

$$\begin{aligned} \sigma_y^+ = \sigma_y^- &= (1-g)\rho_1(x)[\sigma_0\{-\sin f(x)[I_1(x) + I_3(x)] + \\ &+ \cos f(x)[-I_2(x) + I_4(x)]\} + \tau_0\{\cos f(x)[I_1(x) - I_3(x)] - \\ &- \sin f(x)[I_2(x) + I_4(x)]\}]\text{sign}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^\pm &= -(1-g)\rho_1(x)[\sigma_0\{\sin f(x)[-I_2(x) + I_4(x)] + \\ &+ \cos f(x)[I_1(x) + I_3(x)]\} + \tau_0\{\sin f(x)[I_1(x) - I_3(x)] + \\ &+ \cos f(x)[I_2(x) + I_4(x)]\}]\text{sign}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^+ &= (3+g)\rho_1(x)[\sigma_0\{-\sin f(x)[I_1(x) + I_3(x)] + \\ &+ \cos f(x)[-I_2(x) + I_4(x)]\} + \tau_0\{\cos f(x)[I_1(x) - I_3(x)] - \\ &- \sin f(x)[I_2(x) + I_4(x)]\}]\text{sign}(x) + \tilde{P}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^- &= -(1+3g)\rho_1(x)[\sigma_0\{-\sin f(x)[I_1(x) + I_3(x)] + \\ &+ \cos f(x)[-I_2(x) + I_4(x)]\} + \tau_0\{\cos f(x)[I_1(x) - I_3(x)] - \\ &- \sin f(x)[I_2(x) + I_4(x)]\}]\text{sign}(x) + \tilde{P}_2, \end{aligned}$$

де

$$\sigma_0 = \frac{q\pi e^{-\beta\pi}}{1-g} \left(\int_l^a \frac{\cos b(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} t dt - 2a\beta \int_l^a \frac{\sin b(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} dt \right) / z_n;$$

$$\tau_0 = -\frac{q\pi e^{-\beta\pi}}{1-g} \left(\int_l^a \frac{\sin b(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} t dt + 2a\beta \int_l^a \frac{\cos b(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} dt \right) / z_n;$$

$$z_n = \int_l^a \frac{\cos b(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} dt \int_l^a \frac{\cos b(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} t dt + \int_l^a \frac{\sin b(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} dt \int_l^a \frac{\sin b(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} t dt;$$

$$I_1(x) = \int_{L_1'} \frac{\sin b(t)dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)}, \quad I_2(x) = \int_{L_1'} \frac{\cos b(t)dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)};$$

$$I_3(x) = \int_{L_1'} \frac{\sin b(t)dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)}, \quad I_4(x) = \int_{L_1'} \frac{\cos b(t)dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)};$$

$$I_5(x) = \int_L \frac{\sin b(t)dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)}, \quad I_6(x) = \int_L \frac{\cos b(t)dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)};$$

$$\rho(x) = 2\sqrt{a^2 - x^2}/\pi; \quad \rho_1(x) = e^{\beta\pi}\rho(x)/4; \quad \tilde{g}_1 = \frac{3+g}{1-g}; \quad \tilde{g}_2 = \frac{1+3g}{1-g};$$

$$\tilde{P}_1 = P_1 - q\tilde{g}_1; \quad \tilde{P}_2 = P_2 + q\tilde{g}_2; \quad f(t) = b(t) = \beta \ln \left| \frac{a-t}{a+t} \right|; \quad \beta = -\frac{\ln|g|}{2\pi};$$

$$g = -\frac{\mu_1 + \mu_2\kappa_1}{\mu_2 + \mu_1\kappa_2}; \quad \mu_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)}; \quad \kappa_j = \frac{3-\nu_j}{1+\nu_j},$$

де ν_j і E_j – відповідно коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга матеріалу j -тої півплощини, $j=1,2$.

Зауважимо, що напруження на нескінченності зв'язані залежністю

$$P_2 = \frac{P_1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{3-\kappa}{1+\kappa} q, \quad \text{де } \kappa = \kappa_1 = \kappa_2, \quad n = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Скористаємося умовою пластичності Мізеса [1, 2]

$$\sigma_T^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2$$

та умовою пластичності Треска [1] у вигляді поверхневого шару [2]:

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} = \sigma_T;$$

$$\sigma_{1,2} = \left(\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\tau_{xy})^2} \right) / 2.$$

Числовий аналіз і висновки. Було проведено числовий аналіз задачі для нитесилу та технічно чистого заліза з границею текучості відповідно $\sigma_T^{(1)} = 278 \text{ МПа}$ і $\sigma_T^{(2)} = 130 \text{ МПа}$ та пружними сталими $E_1 = 1,38 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $E_2 = 2,08 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Інтеграли обчислювались чисельно за допомогою методу механічних квадратур [6]. На рис. 2–5 суцільні і штрихові лінії були отримані для відповідних величин з використанням умов пластичності Мізеса і Треска відповідно.

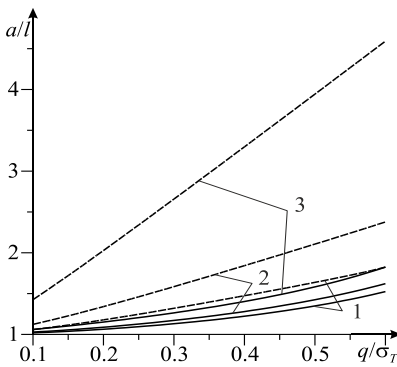


Рис. 2

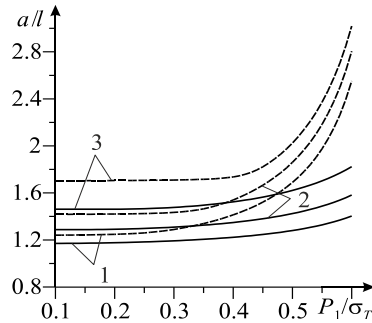


Рис. 3

На рис. 2 та рис. 4 криві 1 побудовані при $P_1/\sigma_T = 0,4$, крива 2 – при $P_1/\sigma_T = 0,5$, крива 3 – при $P_1/\sigma_T = 0,6$. На рис. 3 і рис. 5 криві 1 відповідають $q/\sigma_T = 0,4$, криві 2 – $q/\sigma_T = 0,5$ і крива 3 – $q/\sigma_T = 0,6$.

На рис. 2 показано графічну залежність відносної довжини пластичної зони a/l від безрозмірного розподіленого навантаження q/σ_T , а на рис. 3 та ж залежність тільки від відносного розподіленого навантаження P_1/σ_T . На основі рис. 2 та рис. 3 можна зробити висновок, що зростання розподіленого навантаження q (P_1) при фіксованому P_1 (q) приводить до зростання довжини пластичної зони, причому вона від q майже лінійна. Зауважимо, що при використанні умови пластичності Треска довжини пластичних зон більші ніж при використанні умови пластичності Мізеса.

На рис. 4, рис. 5 показано графічну залежність відносного розкриття берегів тріщини у її вершині δ/l від безрозмірного розподіленого навантаження q/σ_T (P_1/σ_T). На основі рис. 4, рис. 5 можна зробити висновок, що зростання розподіленого навантаження q (P_1) приводить до зростання параметра δ/l , причому цей параметр більший при використанні умови пластичності Треска, ніж при використанні умови пластичності Мізеса.

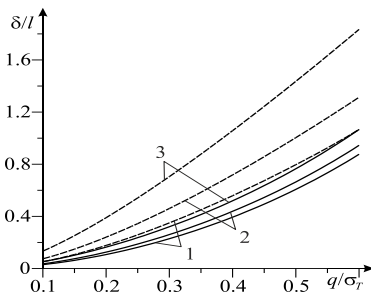


Рис. 4

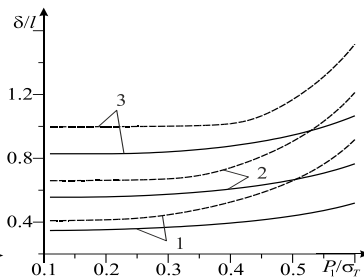


Рис. 5

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Божидарник В. В.** Елементи теорії пластичності та міцності / В. В. Божидарник, Г. Т. Сулим. – Львів : Світ, 1999. – Т. 1. – 531 с.
2. **Кир'ян В. І.** Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій / В. І. Кир'ян, В. А. Осадчук, М. М. Николишин. – Львів : СПЛОМ, 2007. – 320 с.
3. **Мухелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
4. **Николишин М. М.** Двовісний розтяг однорідної ізотропної пластини з двома рівними співвісними тріщинами з урахуванням пластичних зон біля їх вершин / М. М. Николишин, В. В. Опанасович, Л. Р. Куротчин, М. С. Слободян // *Мат. методи та фіз. мех. поля.* – 2009. – Т. 52, № 1. – С. 115–121.
5. **Николишин М. М.** Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їх вершин / М. М. Николишин, В. В. Опанасович, Л. Р. Куротчин // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2006. – Вип. 4. – С. 101–108.
6. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1988. – 324 с.

*М. М. Николишин, д-р физ.-мат. наук, В. К. Опанасович, канд. физ.-мат. наук,
Л. Р. Куротчин, Н. С. Слободян, канд. физ.-мат. наук*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ПЛАСТИЧНЫХ ЗОН ВОЗЛЕ ВЕРШИНЫ СКВОЗНОЙ ТРЕЩИНЫ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Исследована задача о растяжении усилиями на бесконечности кусочно-однородной изотропной пластины с сквозной трещиной на прямолинейной границе раздела материалов с учетом пластических зон возле ее вершин. Для определения длины пластических зон использованы условия пластичности Мизеса и Треска в виде поверхностного слоя. Определено напряженное состояние пластины на границе раздела материалов. Построены графические зависимости длины пластических зон и раскрытия берегов трещины у ее вершины от величины нагрузки.

Ключевые слова: трещина, растяжение, кусочно-однородная пластина, условие пластичности Мизеса, условие пластичности Треска, пластическая зона.

*M. M. Nikolishin, Professor, V. K. Opanasovych, Associate Professor,
L. R. Kurotchyn, N. S. Slobodyan, Associate Professor*

DETERMINATION OF THE PLASTIC ZONE LENGTH AT THE TIP OF A THROUGH CRACK AT THE INTERFACE OF MATERIALS OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS ISOTROPIC PLATE UNDER THE ACTION OF THE TENSION LOADING

The problem of a piecewise-homogeneous isotropic plate with a through crack on the interface of materials under the action of the tension loads at infinity with account of the plastic zones near its tips is studied. To determine the length of the plastic zones the plasticity conditions of Mises and Tresca are used in the form of the surface layer. The stress of the plate at the interface is determined. The graphical dependences of the plastic zone lengths and the crack opening displacement at its tip on the value of loading are constructed.

Keywords: crack, tension, piecewise-homogeneous plate, condition plasticity of Mises, condition plasticity of Tresca, plastic zone.

The work considers a piecewise-homogeneous isotropic plate with linear interface of materials under the action of homogeneous stress field at infinity. It is assumed that a through crack is situated at the interface, the faces of which are external load-free and there are plastic zones at its tips. Outside the crack the plate materials are welded.

In the median surface of the plate we introduce the Cartesian coordinate system $Oxy\bar{z}$ with the origin at the crack centre of length $2l$ and it directs the axis Ox along the materials interface. The crack length with plastic zones we denote as $2a$ and the materials joint line as L' , the crack as L and the plastic zones of the crack as L_1' and L_1'' , $L_1 = L_1' \cup L_1''$ (see fig. 1). The elastic properties of the upper half-plane will be indicated as the index 1 and the properties of the lower one – the index 2. Boundary values of corresponding magnitudes for $y \rightarrow \pm 0$ we will prescribe the signs «+» and «-».

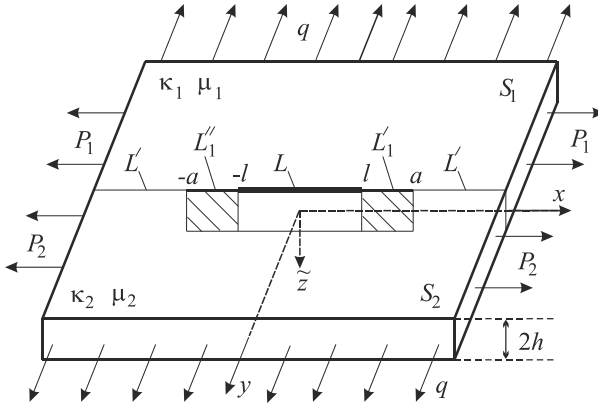


Fig. 1 – Scheme of plate loading and location of a crack

In accordance with the problem statement we have the following boundary conditions:

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ = (\sigma_y - i\tau_{xy})^-, (u + iv)^+ = (u + iv)^- \text{ на } L', \quad (1)$$

$$\sigma_y^\pm = 0, \tau_{xy}^\pm = 0 \text{ на } L, \quad (2)$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_0, \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = -\tau_0 \text{ на } L_1', \sigma_y^\pm = \sigma_0, \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = \tau_0 \text{ на } L_1'', \quad (3)$$

where u, v are the projections of displacement vector on the axes Ox and Oy , respectively; σ_y, τ_{xy} are the components of stress tensor; σ_0, τ_0 are the unknown normal and tangential stresses in the plastic zone.

Using the complex Kolosov–Muskhelishvili potentials [3], the solution of the problem is reduced to the problems of linear conjugation and their solutions are constructed in the class of functions limited at the tips of the plastic zones, see paper [5].

The numerical analysis of the problem is realized for nitesile and technically pure iron with yield limit $\sigma_T^{(1)} = 278 MPa$ and $\sigma_T^{(2)} = 130 MPa$, respectively, and elastic constants $E_1 = 1.38 \cdot 10^5 MPa$, $E_2 = 2.08 \cdot 10^5 MPa$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. The Mises plasticity condition is used in the form [1, 2]:

$$\sigma_T^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2,$$

and the Tresca plasticity condition [5] of surface layer [4]:

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} = \sigma_T,$$

$$\sigma_{1,2} = \left(\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\tau_{xy})^2} \right) / 2.$$

In addition, there is the dependence between stresses at infinity

$$P_2 = \frac{P_1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{3-\kappa}{1+\kappa} q, \text{ where } n = \frac{E_1}{E_2} = 0.66, \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} = 2.077.$$

In figs. 2–5 the solid and dashed lines are corresponded values obtained for the Mises and Tresca plasticity conditions, respectively.

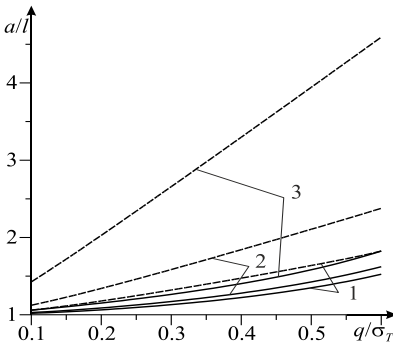


Fig. 2

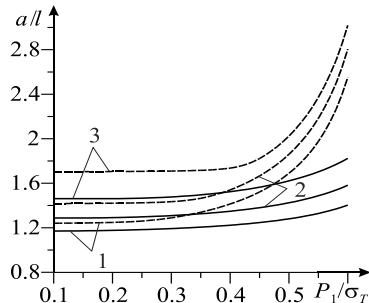


Fig. 3

In fig. 2 and fig. 4 the curves 1 are constructed for $P_1/\sigma_T = 0.4$, the curves 2 – for $P_1/\sigma_T = 0.5$, the curves 3 – for $P_1/\sigma_T = 0.6$. In fig. 3 and fig. 5 the curves 1 correspond to $q/\sigma_T = 0.4$, the curves 2 – to $q/\sigma_T = 0.5$ and the curves 3 – to $q/\sigma_T = 0.6$.

Fig. 2 represents the graphic dependence of relative length of plastic zone a/l on the dimensionless distributed loading q/σ_T , and fig. 3 shows the same dependence only on the relative distributed loading P_1/σ_T . On the basis of figs. 2, 3 we can conclude that the increase of distributed loading q (P_1) for fixed P_1 (q) leads to the increase of the plastic zone length, moreover from q it

is almost linear. Note that if the Tresca plasticity condition is used, the lengths of plastic zones are larger than if we use the Mises plasticity conditions.

In fig. 4, fig. 5 the graphic dependence of relative crack opening displacement at the tip δ/l on the dimensionless distributed loading q/σ_T (P_1/σ_T) is shown. On the basis of fig. 4, fig. 5 we can conclude that the increase of the distributed loading q (P_1) leads to the increase of parameter δ/l , this parameter is larger if we use the Tresca plasticity condition than if the Mises plasticity condition is used.

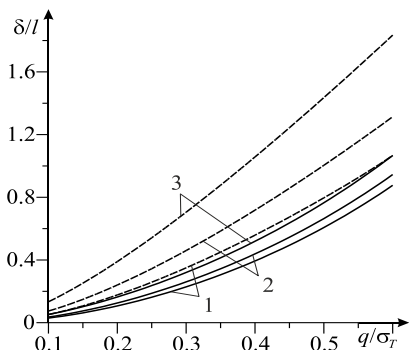


Fig. 4

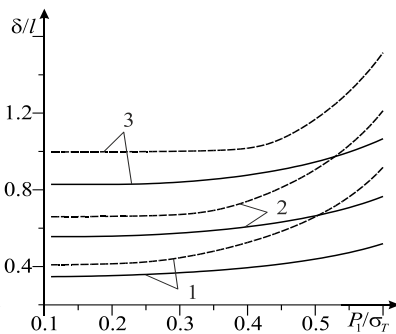


Fig. 5

In a special case from [4] we obtain the results of this work if we regard that the elastic properties of materials are similar.

REFERENCES

1. **Bozhydarnyk V.** Elements of plasticity and strength theory / V. Bozhydarnyk, H. Sulym. – Lviv : Svit, 1999. – Vol. 1. – 531 p. (in Ukrainian).
2. **Kiryay V.** Fracture mechanics of welded joints in metal constructions / V. Kiryan, V. Osadchuk, M. Nykolyshyn. – Lviv : SPOLOM, 2007. – 320 p. (in Ukrainian).
3. **Muskhelishvily N.** Some principal problems of mathematica elasticity theory / N. Muskhelishvily. – M. : Nauka, 1966. – 708 p. (in Russian).
4. **Nykolyshyn M.** Two-axial extension of homogeneous isotropic plate with two equal co-axial cracks with regard for plastic zones near its tips / M. Nykolyshyn, V. Opanasovych, L. Kurotchyn, M. Slobodian // Math. methods and phys.-mech. fields. – 2009. – Vol. 52, № 1. – P. 115–121 (in Ukrainian).
5. **Nykolyshyn M.** Two-axial extension of piecewise-homogeneous isotropic plate with a crack on linear interface of materials with regard for plastic zones near its tips / M. Nykolyshyn, V. Opanasovych, L. Kurotchyn // Applied problems of mech. and math. – 2006. – № 4 – P. 101–108 (in Ukrainian).
6. **Savruk M.** Two-dimensional elasticity problems for bodies with cracks / M. Savruk. – K. : Nauk. dumka, 1988. – 324 p. (in Russian).

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача,
Львів, Україна
Львівський національний університет
ім. Івана Франка,
Львів, Україна*

Надійшла до редколегії 19.03.2012