

УДК 531.3

Б. В. Успенский, К. В. Аврамов, д-р техн. наук

НЕЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В статье предлагается модификация метода форм Шоу–Пьера для исследования свободных колебаний систем с кусочно-линейными упругими характеристиками, позволяющая вдвое снизить размерность системы уравнений для поиска форм. Рассматривается механическая система с 15-ю степенями свободы, описывающая колебания силовой передачи двигателя внутреннего сгорания. Исследованы различные свойства нелинейных нормальных форм в этой системе.

Ключевые слова: нелинейные нормальные формы Шоу–Пьера, свободные колебания, кусочно-линейные системы, крутильные колебания, инвариантные многообразия.

Введение. Механические системы с конечным числом степеней свободы и кусочно-линейными упругими характеристиками описывают широкий класс технических систем [1]. Такие системы моделируют крутильные колебания силовых передач, различные технологические процессы. Поэтому данный класс систем подвергался многочисленным исследованиям [3, 5, 8]. В [2, 10] показано, что использование приближённых гладких упругих характеристик при анализе таких систем может приводить к неверным результатам. Нелинейные нормальные формы (ННФ) Каудерера–Розенберга для систем с билинейными упругими характеристиками аналитически исследованы в работах [8, 9]. Общий подход к поиску форм Шоу–Пьера изложен в [6, 7], а применительно к кусочно-линейным системам – в [4].

В данной работе предлагается новый подход к расчету нелинейных нормальных форм Шоу–Пьера. Этот подход применяется к анализу нелинейных крутильных колебаний силовой передачи двигателя внутреннего сгорания, которая описывается системой с 15-ю степенями свободы.

Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему с N степенями свободы и трilinearной упругой характеристикой. Система совершает свободные колебания. Диссипативные свойства системы не учитываются. Движения опишем следующей системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} Mz + K_1z &= 0, \quad -\Delta \leq h^T z \leq \Delta; \\ Mz + K_2z &= b_2, \quad h^T z < -\Delta; \\ Mz + K_2z &= b_3, \quad \Delta < h^T z, \end{aligned} \quad (1)$$

где z – вектор-столбец обобщённых координат системы размерности N ; M – диагональная матрица масс системы размерности $N \times N$.

Целью исследования является разработка численной процедуры расчета нелинейных нормальных форм Шоу–Пьера в системах большой размерности. Определения и свойства нелинейных нормальных форм Шоу–Пьера подробно описаны в [1].

Нелинейные нормальные формы. Нелинейную систему (1) запишем в главных координатах системы на линейном участке: $-\Delta \leq h^T z \leq \Delta$. Переход к главным координатам производится с помощью замены переменных

$$z = Q\eta, \quad (2)$$

где Q – матрица собственных векторов матрицы $M^{-1}K_1$. В координатах η система (1) приобретает следующий вид

$$\ddot{\eta} + \Lambda_1 \eta = f(\eta), \quad (3)$$

где $\Lambda_1 = Q^{-1}M^{-1}K_1Q$ – диагональная матрица, с элементами, равными собственным значениям матрицы $M^{-1}K_1$; кусочно-линейная функция $f(\eta) = [f_1, \dots, f_N]$ принимает следующий вид:

$$\vec{f}(\eta) = \begin{cases} 0, & -\Delta \leq h^T Q\eta \leq \Delta; \\ (\Lambda_1 - Q^{-1}M^{-1}K_2Q)\vec{\eta} + Q^{-1}M^{-1}b_2, & h^T Q\eta < -\Delta; \\ (\Lambda_1 - Q^{-1}M^{-1}K_2Q)\vec{\eta} + Q^{-1}M^{-1}b_3, & \Delta < h^T Q\eta. \end{cases}$$

Для расчета нелинейных нормальных форм Шоу–Пьера одна из нормальных координат, например η_i , выбирается ведущей. Все остальные координаты являются зависящими от ведущих. В качестве ведущих координат в дальнейшем анализе примем $a(t), \varphi(t)$. Эти координаты удовлетворяют следующему соотношению:

$$\eta_i(t) = a(t) \cos \varphi(t); \quad \dot{\eta}_i(t) = -\omega_i a(t) \sin \varphi(t), \quad (4)$$

где ω_i – собственные частоты линейных колебаний в области $-\Delta \leq h^T z \leq \Delta$. Следуя [1], движение на нелинейной нормальной форме описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{a} = -\frac{f_i}{\omega_i} \sin \varphi; \quad \dot{\varphi} = \omega_i - \frac{f_i}{a\omega_i} \cos \varphi. \quad (5)$$

Координаты, зависящие от ведущих $\eta_j, j \neq i$, представляются в виде следующих функций:

$$\eta_j(a, \varphi) = P_j(a, \varphi) = \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_j^{l,m} T_{l,m}(a, \varphi), \quad (6)$$

где N_a, N_φ – целые числа, определяющие число базисных функций в разложении; $C_j^{l,m}$ – подлежащие определению коэффициенты; $T_{l,m}(a, \varphi) = A_l(a) \cos(m-1)\varphi$; $A_l(a)$, $l=1, 2, \dots, N_a$ – набор базисных функций, заданных на интервале $[a_0^{(1)}; a_0^{(2)}]$. Разложения в форме (5), (6) подставляются в систему уравнений (2). Величины $\eta_j, j \neq i$ и $\dot{\eta}_j, j \neq i$ находятся, используя разложение (6) и уравнения модальной динамики (5):

$$\eta_j = \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} (A'_l \cos(m-1)\varphi \cdot \dot{a} - A_l(m-1) \sin(m-1)\varphi \cdot \dot{\varphi}); \quad (7)$$

$$\ddot{\eta}_j = \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} \left(\cos(m-1)\varphi \cdot (A''_l \dot{a}^2 + A'_l \ddot{a} - A_l(m-1)^2 \dot{\varphi}^2) - \sin(m-1)\varphi \cdot (2(m-1)A'_l \dot{a} \dot{\varphi} + A_l \ddot{\varphi}) \right). \quad (8)$$

Величины вторых производных $\ddot{a}, \ddot{\varphi}$ определим из уравнений модальной динамики так:

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{f_i}{\omega_i} \sin \varphi \right) = -\frac{1}{\omega_i} \left(\sin \varphi \left(\frac{\partial f_i}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right) + f_i \dot{\varphi} \cos \varphi \right); \quad (9)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d}{dt} \left(\omega_i - \frac{f_i}{a \omega_i} \cos \varphi \right) = -\frac{1}{\omega_i} \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \dot{\varphi} - \frac{f_i}{a} \dot{a} \right) \frac{1}{a} \cos \varphi - f_i \frac{1}{a} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \right). \quad (10)$$

Производные от функции f_i представим так:

$$\frac{\partial f_i}{\partial a} = \begin{cases} 0, \Delta_2 \leq h^T Q \eta \leq \Delta_3 \\ \sum_{k=1}^N Z_{2ik} \frac{\partial \eta_k}{\partial a}, h^T Q \eta < \Delta_2; \\ \sum_{k=1}^N Z_{3ik} \frac{\partial \eta_k}{\partial a}, \Delta_3 < h^T Q \eta \end{cases}; \quad \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} = \begin{cases} 0, \Delta_2 \leq h^T Q \eta \leq \Delta_3 \\ \sum_{k=1}^N Z_{2ik} \frac{\partial \eta_k}{\partial \varphi}, h^T Q \eta < \Delta_2; \\ \sum_{k=1}^N Z_{3ik} \frac{\partial \eta_k}{\partial \varphi}, \Delta_3 < h^T Q \eta \end{cases}, \quad (11)$$

где $Z_2 = \Lambda_1 - Q^{-1} M^{-1} K_2 Q$; $Z_3 = \Lambda_1 - Q^{-1} M^{-1} K_3 Q$; $\xi_2 = Q^{-1} M^{-1} b_2$; $\xi_3 = Q^{-1} M^{-1} b_3$;

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial a} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_k^{l,m} A_l \cos(m-1)\varphi, k \neq i, \\ \cos \varphi, k = i \end{cases}$$

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial \varphi} = \begin{cases} - \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_k^{l,m} (m-1) A_l \sin(m-1)\varphi, k \neq i, \\ - a \sin \varphi, k = i \end{cases}$$

Подстановка выражений (5), (9)–(11) в выражение (8) позволяет выразить $\ddot{\eta}_j$ через параметры a, φ и коэффициенты разложения $C_j^{l,m}$, $l=1, 2, \dots, N_a, m=1, 2, \dots, N_\varphi$.

Для расчета коэффициентов разложения $C_j^{l,m}$, $l=1, 2, \dots, N_a, m=1, 2, \dots, N_\varphi$ система дифференциальных уравнений (3) решается методом Бубнова–Галёркина. Для этого строится невязка

$$F_j = \ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j - f_j(\vec{\eta}), \quad j=1..N, j \neq i. \quad (12)$$

Предполагается, что при расчете невязки в выражение (3) подставлены уравнения (5), (6), (8)–(11). Таким образом, невязка (12) является функцией параметров a, φ и коэффициентов $C_j^{l,m}$. В соответствии с методом Бубнова–Галёркина устанавливается требование ортогональности невязки (12) со всеми базисными функциями $T_{l,m}$ на промежутке изменения $a \in [a_0^1; a_0^2]$; $\varphi \in [0; 2\pi]$

$$\int_{a_0^{(1)}}^{a_0^{(2)}} \int_0^{2\pi} F_j T_{l,m} da d\varphi = 0; \quad j=1, 2, \dots, N, j \neq i; l=1, 2, \dots, N_a; m=1, 2, \dots, N_\varphi. \quad (13)$$

Уравнения (13) представляют собой систему $(N-1) N_a N_\varphi$ уравнений относительно такого же количества коэффициентов $C_j^{l,m}$; $j=1, 2, \dots, N, j \neq i$; $l=1, 2, \dots, N_a; m=1, 2, \dots, N_\varphi$. Решение этой системы позволяет найти коэффициенты $C_j^{l,m}$ и построить с их помощью выражения для главных координат $\eta_j(a, \varphi)$ и выражения для обобщённых координат системы $z(a, \varphi) = Q\eta(a, \varphi)$. Таким образом, построена параметрически заданная поверхность в пространстве обобщённых координат и скоростей, которая и является ННФ Шоу.

После того, как найдена ННФ, движение системы во времени полностью описывается уравнениями модальной динамики (5). Таким образом, движение системы с любым числом степеней свободы может быть сведено к двум дифференциальным уравнениям первого порядка (5).

Описание вычислительной процедуры. Уравнения (13) представляют собой векторный функционал, который находится численно. Для решения системы (13) используется метод Ньютона–Рафсона. Решение уравнений (13) ищется в области $a \in [0; a_0]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Для увеличения точности решения область изменения параметра a может быть разбита на N_s участков, равной или различной ширины. Для каждого участка строится своя система ортогональных в пределах этого участка базисных функций $A_l, l=1, 2, \dots, N_a$. Следуя [4], при использовании такой структуры применяются линейные базисные функции вида:

$$A_1(a) = \frac{a - a_j}{a_{j+1} - a_j}; \quad A_2 = \frac{a_{j+1} - a}{a_{j+1} - a_j},$$

где a_j, a_{j+1} – границы участка.

Численный анализ нелинейных нормальных форм крутильных колебаний. Исследуем крутильные колебания силовой передачи трехцилиндрового транспортного двигателя. Модели таких систем подробно рассмотрены в монографии [1]. Они состоят из жестких дисков с моментами инерции I_i и упругих элементов, связывающих эти диски. Эти упругие элементы являются валами. Расчетная схема рассматриваемой силовой передачи приводится на рис. 1. Между дисками с номерами 7 и 8 системы находится нелинейность типа “зазор”.

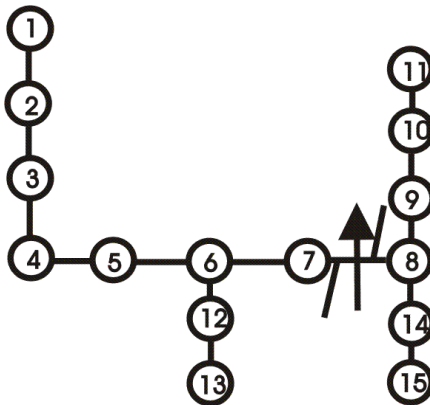


Рис. 1 – Расчетная схема силовой передачи

Крутильные колебания описываются следующей системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \ddot{\theta}_1 - c_{12}(\theta_2 - \theta_1) = 0 \\ I_i \ddot{\theta}_i + c_{i-1,i}(\theta_i - \theta_{i-1}) - c_{i,i+1}(\theta_{i+1} - \theta_i) = 0; i = 2, \dots, 5 \\ I_6 \ddot{\theta}_6 + c_{56}(\theta_6 - \theta_5) - c_{67}(\theta_7 - \theta_6) - c_{6,12}(\theta_{12} - \theta_6) = 0 \\ I_7 \ddot{\theta}_7 + c_{67}(\theta_7 - \theta_6) - f_{78}(\theta_8 - \theta_7) = 0 \\ I_8 \ddot{\theta}_8 + f_{78}(\theta_8 - \theta_7) - c_{89}(\theta_9 - \theta_8) - c_{6,14}(\theta_{14} - \theta_8) = 0 \\ I_i \ddot{\theta}_i + c_{i-1,i}(\theta_i - \theta_{i-1}) - c_{i,i+1}(\theta_{i+1} - \theta_i) = 0; i = 9, 10 \\ I_{11} \ddot{\theta}_{11} + c_{10,11}(\theta_{11} - \theta_{10}) = 0 \\ I_{12} \ddot{\theta}_{12} + c_{6,12}(\theta_{12} - \theta_6) - c_{12,13}(\theta_{13} - \theta_{12}) = 0 \\ I_{13} \ddot{\theta}_{13} + c_{12,13}(\theta_{13} - \theta_{12}) = 0 \\ I_{14} \ddot{\theta}_{14} + c_{8,14}(\theta_{14} - \theta_8) - c_{14,15}(\theta_{15} - \theta_{14}) = 0 \\ I_{15} \ddot{\theta}_{15} + c_{14,15}(\theta_{15} - \theta_{14}) = 0 \end{array} \right. , \quad (14)$$

где $\theta_i, i = 1, 2, \dots, 15$ – углы поворота дисков; $I_i, i = 1, 2, \dots, 15$ – моменты инерции дисков; $c_{i,j}$ – крутильная жесткость валов между дисками i и j ;

$$f_{78}(\theta_8 - \theta_7) = \begin{cases} c_{78}(\theta_8 - \theta_7), -\Delta \leq (\theta_8 - \theta_7) \leq \Delta \\ \tilde{c}_{78}(\theta_8 - \theta_7) + (c_{78} - \tilde{c}_{78})\Delta, \Delta < (\theta_8 - \theta_7) \\ \tilde{c}_{78}(\theta_8 - \theta_7) - (c_{78} - \tilde{c}_{78})\Delta, (\theta_8 - \theta_7) < -\Delta \end{cases}$$

Применим к системе уравнений (14) следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \theta_2 - \theta_1; x_{2,3} = \theta_3 - \theta_2; x_{3,4} = \theta_4 - \theta_3; x_{4,5} = \theta_5 - \theta_4; x_{5,6} = \theta_6 - \theta_5; \\ x_{6,7} &= \theta_7 - \theta_6; x_{7,8} = \theta_8 - \theta_7; x_{8,9} = \theta_8 - \theta_9; x_{9,10} = \theta_9 - \theta_{10}; x_{10,11} = \theta_{10} - \theta_{11}; \\ x_{8,14} &= \theta_8 - \theta_{14}; x_{14,15} = \theta_{14} - \theta_{15}; x_{6,12} = \theta_6 - \theta_{12}; x_{12,13} = \theta_{12} - \theta_{13}. \end{aligned} \quad (15)$$

Динамическая система (рис. 1) исследуется при следующих численных значениях жесткостей упругих элементов в $H.M$:

$$\begin{aligned} c_{12} &= c_{23} = 2 \cdot 10^6; c_{34} = 3 \cdot 10^6; c_{45} = 2,8 \cdot 10^6; c_{56} = 1,5 \cdot 10^6; c_{67} = 6,5 \cdot 10^5; \\ c_{78} &= 8,4 \cdot 10^5; \tilde{c}_{78} = 5,04 \cdot 10^5; c_{89} = 2,6 \cdot 10^6; c_{9,10} = c_{10,11} = 2 \cdot 10^6; \\ c_{6,12} &= 1,9 \cdot 10^4; c_{12,13} = 2,7 \cdot 10^4; c_{8,14} = 3,1 \cdot 10^6; c_{14,15} = 3,3 \cdot 10^4; \end{aligned}$$

и моментов инерции в $H.M$:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 = I_3 = 7,7 \cdot 10^{-2}; I_4 = 6,5 \cdot 10^{-2}; I_5 = 8,5 \cdot 10^{-2}; I_6 = 3,6 \cdot 10^{-2}; \\ I_7 &= 4,9 \cdot 10^{-2}; I_8 = 3,8 \cdot 10^{-2}; I_9 = I_{10} = I_{11} = 7,7 \cdot 10^{-2}; I_{12} = 1,7; \\ I_{13} &= 1; I_{14} = 2,6; I_{15} = 3. \end{aligned}$$

Величина зазора в нелинейном элементе такова: $\Delta = 9,5 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$. Динамическую систему запишем относительно следующих безразмерных переменных

$$x_{ij} \rightarrow \gamma x_{ij}; t \rightarrow \chi T.$$

В численных расчетах использовались следующие величины: $\gamma = 10^4$; $\chi = 10^2$.

В исследуемой системе рассчитывались нелинейные нормальные формы Шоу–Пьера. Расчеты производились в следующем диапазоне изменения амплитуд колебаний: $a \in [0; 16\Delta]$. Этот диапазон был разбит на восемь полос шириной 2Δ . Граничные значения амплитуд у этих полос обозначим так: a_j, a_{j+1} . Для поиска решения использовались две базисные функции $T_{l,m}(a, \varphi)$ вида

$$T_{1,1}(a, \varphi) = \frac{a - a_j}{a_{j+1} - a_j} \cos \varphi; T_{2,1}(a, \varphi) = \frac{a_{j+1} - a}{a_{j+1} - a_j} \cos \varphi.$$

На рис. 2 изображены инвариантные многообразия, соответствующие координатам $x_{7,8}$ и $x_{8,9}$.

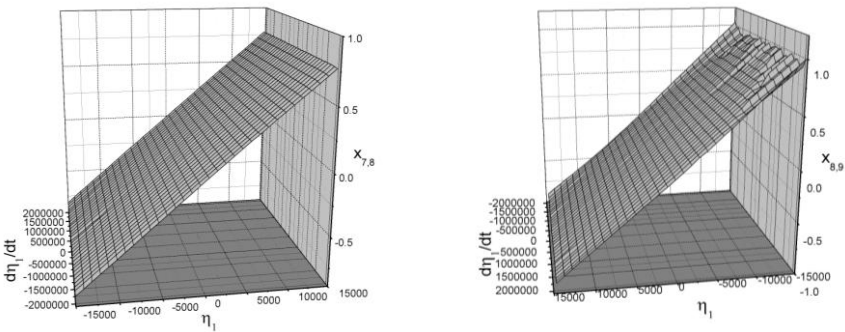
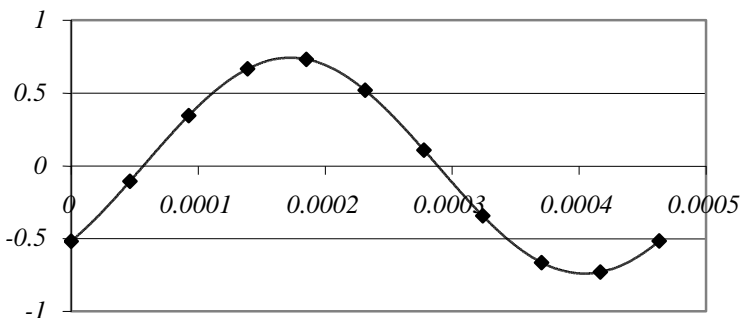


Рис. 2 – Нелинейная нормальная форма Шоу–Пьера в подпространствах $(\eta_1, \dot{\eta}_1, x_{7,8})$ и $(\eta_1, \dot{\eta}_1, x_{8,9})$

Для проверки полученной нелинейной нормальной формы проводилось прямое численное интегрирование динамической системы (14) из начальных условий, принадлежащих нелинейной нормальной форме. Результаты расчета колебаний системы с течением времени представлены на рис. 3. Сплошной линией изображено изменение координаты $x_{8,9}$ на нелинейной нормальной форме. Квадратными точками показываются результаты прямого численного интегрирования системы (14). Близость этих результатов свидетельствует о правильности расчета нелинейной нормальной формы.



Сплошная линия – результаты на нелинейной нормальной форме, а пунктирная – результаты прямого численного интегрирования

Рис. 3 – Движение системы с течением времени.

Нелинейная нормальная форма Шоу–Пьера может быть представлена в виде нелинейной нормальной формы Каудерера–Розенберга [1]. Результаты такого анализа в конфигурационной плоскости $(x_{7,8}; x_{8,9})$ даны на рис. 4. Модальная линия, полученная из расчета формы Шоу–Пьера, изображена сплошной линией, а результаты прямого численного интегрирования показываются точками. Итак, нелинейные нормальные формы в кусочно-линейных системах могут представляться формами Каудерера–Розенберга в конфигурационном пространстве.

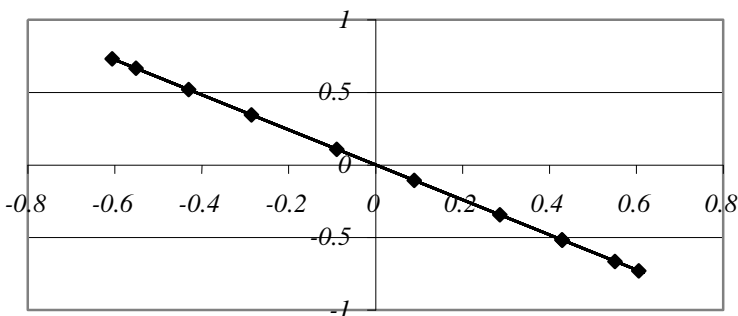


Рис. 4 – Нелинейная нормальная форма Каудерера–Розенберга в конфигурационном пространстве $(x_{7,8}; x_{8,9})$

Для анализа распределения амплитуд колебаний по обобщенным координатам в режиме нормальных колебаний указывалась амплитуда колебаний против номера обобщенной координаты. Результаты анализа представлены на рис. 5. На этом рисунке номера обобщенных координат указа-

ны в следующем порядке: $x_{1,2}$; $x_{2,3}$; $x_{3,4}$; $x_{4,5}$; $x_{5,6}$; $x_{6,7}$; $x_{7,8}$; $x_{8,9}$; $x_{9,10}$; $x_{10,11}$; $x_{8,14}$; $x_{14,15}$; $x_{6,12}$; $x_{12,13}$. Из рис. 5 следует, что значительные амплитуды в режиме нелинейной нормальной формы имеют координаты $x_{6,7}$, $x_{7,8}$, $x_{8,9}$, $x_{9,10}$, $x_{10,11}$, $x_{8,14}$. Наибольших амплитуд достигают координаты $x_{7,8}$, $x_{8,9}$, $x_{8,14}$.

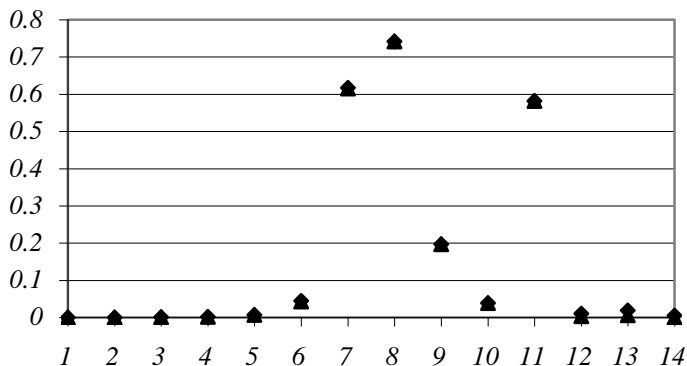


Рис. 5 – Распределение амплитуд колебаний по обобщенным координатам x_{ij}

Нелинейные нормальные формы колебаний исследовались для различных значений амплитуд. Результаты такого анализа представлены на скелетной кривой (рис. 6), где показана зависимость амплитуд колебаний координаты $x_{8,9}$ от частоты.

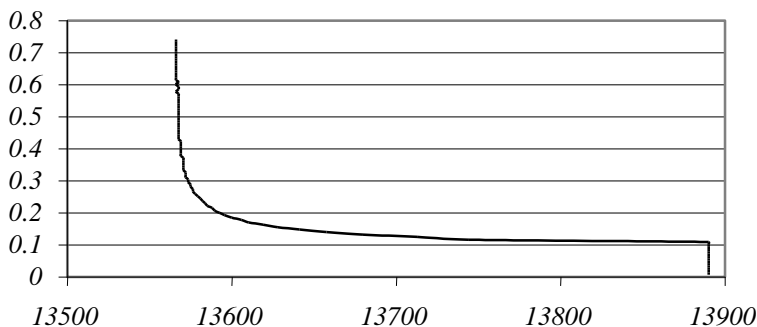


Рис. 6 – Скелетная кривая свободных колебаний координаты $x_{8,9}$

Выводы. Предложен метод расчета нелинейных нормальных форм Шоу–Пьера в кусочно-линейных системах, основанный на подходе из [7–9].

Рассмотренный в этой статье метод позволяет снизить размерность разрешающей системы уравнений вдвое в сравнении с этим подходом.

Показано, что в модальных координатах линейного участка, соответствующего малым колебаниям системы, нелинейная нормальная форма близка к плоскости.

Построение в конфигурационном пространстве движений по форме Шоу–Пьера позволяет сделать вывод, что нелинейные нормальные формы кусочно-линейных систем представляются в виде форм Каудерера–Розенберга.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Аврамов К. В.** Нелинейная динамика упругих систем/ К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2010. – 704 с.
2. **Begley C. J.** A comparison of piecewise linear and continuous approximating models / C. J. Begley, L. N. Virgin // Mechanics Research Communications. – 1995. – Vol. 22, 6. – P. 527–532.
3. **Chati M.** Modal analysis of a cracked beam / M. Chati, R. Rand, S. Mukherjee // Journal of Sound and Vibration. – 1997. – 207, 2. – P. 249–270.
4. **Jiang D.** Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems / D. Jiang, C. Pierre, S. W. Shaw // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – 272. – P. 869–891.
5. **Yuichiro M.** Piecewise linear model for water column oscillator simulating reactor safety system / M. Yuichiro, Y. Morimoto, H. Madarame // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2003. – 38. – P. 213–223.
6. **Pesheck E.** A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds / E. Pesheck, C. Pierre, S. W. Shaw // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – 249. – P. 971–993.
7. **Shaw S. W.** Normal modes for non-linear vibratory systems / S. W. Shaw, C. Pierre // Journal of Sound and Vibration. – 1993. – 164. – P. 85–124.
8. **Todd M. D.** Natural frequency considerations of an impact oscillator / M. D. Todd, L. N. Virgin // Journal of Sound and Vibration. – 1996. – 194, 3. – P. 452–460.
9. **Vestroni F.** A perturbation method for evaluating nonlinear normal modes of a piecewise linear two-degrees-of-freedom system / F. Vestroni, A. Luongo, A. Paolone // Nonlinear Dynamics. – 2008. – 54. – P. 379–393.
10. **Wolf H.** Effect of smoothing piecewise-linear oscillators on their stability predictions / H. Wolf, J. Kodvanja, S. Bjelovucic-Kopilovic // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – 270. – P. 917–932.

Б. В. Успенський, К. В. Аврамов, д-р техн. наук

НЕЛІНІЙНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ КОЛИВАНЬ КУСКОВО-ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З ВЕЛИКОЮ КІЛЬКІСТЮ СТУПЕНІВ СВОБОДИ

У статті запропоновано модифікацію методу форм Шоу–П'єра для дослідження вільних коливань систем з кусково-лінійними пружними характеристиками, яка дозволяє удвічі знизити розмірність системи рівнянь для пошуку форм. Розглянуто механічну систему з 15-ма ступіннями свободи, яка описує коливання силової передачі двигуна внутрішнього згорання. Досліджено різні властивості нелінійних нормальних форм у цій системі.

Ключові слова: нелінійні нормальні форми Шоу–П'єра, вільні коливання, кусково-лінійні системи, крутильні коливання, інваріантні різноманіття.

NONLINEAR NORMAL FORMS OF LARGE-DIMENSION PIECEWISE LINEAR SYSTEMS

A problem of obtaining Shaw–Pierre nonlinear normal modes for piecewise linear systems, performing free oscillations, is considered in the paper. A modification of common technique, that reduces dimensionality of the set of equations for obtaining forms twice, is proposed. A 15-DOF mechanical system that describes torsion oscillations of a power transmission in internal combustion engine is used for demonstration of technique efficiency.

Keywords: *Shaw–Pierre normal modes, free oscillations, piecewise linear systems, torsional oscillations, invariant manifolds.*

Finite-DOF piecewise linear mechanical systems describe wide set of engineering systems [1]. Such systems model power train torsional oscillations and other engineering processes. That is the reason why this systems class has been broadly analyzed [3, 5, 8]. Papers [2, 10] demonstrate that smoothing a piecewise linear elastic response can lead to incorrect behavior. Kauderer–Rosenberg nonlinear normal modes (NNMs) are analytically investigated for systems with bilinear elastic response in papers [8, 9]. General approach to Shaw–Pierre modes analysis is described in [6, 7]. Analysis of such modes concerning piecewise linear systems is described in [4].

New approach to Shaw–Pierre NNMs analysis treats in this paper. This technique is applied to analyze nonlinear torsional oscillations of a power transmission of internal combustion engine, which are described by 15-DOF system.

N-DOF mechanical system with trilinear elastic response and without dissipation is considered. Motion of such system can be described by the following differential equations:

$$\begin{aligned} M z + K_1 z &= 0, -\Delta \leq h^T z \leq \Delta; \\ M z + K_2 z &= b_2, h^T z < -\Delta; \\ M z + K_3 z &= b_3, \Delta < h^T z, \end{aligned} \quad (1)$$

where z is an N -dimensional column vector of generalized coordinates; M is an $N \times N$ diagonal mass matrix.

Numerical approach for Shaw–Pierre NNMs analysis in large-dimensional systems is treated in this paper. Definitions and features of Shaw–Pierre NNMs are described in detail in [1]. To find Shaw–Pierre NNMs, nonlinear system (1) is rewritten with respect to modal coordinates of the first linear region:

$-\Delta \leq h^T z \leq \Delta$. The equations (1) with respect to modal coordinates of the first linear region ($-\Delta \leq h^T z \leq \Delta$) take the form:

$$\eta + \Lambda_1 \eta = f(\eta), \quad (2)$$

where Λ_1 is an $N \times N$ diagonal matrix consists of the squares of the natural frequencies. Piecewise linear function $f(\eta) = [f_1, \dots, f_N]$ transforms to the following form:

$$\bar{f}(\eta) = \begin{cases} 0, & -\Delta \leq h^T Q \eta \leq \Delta; \\ (\Lambda_1 - Q^{-1} M^{-1} K_2 Q) \bar{\eta} + Q^{-1} M^{-1} b_2, & h^T Q \eta < -\Delta; \\ (\Lambda_1 - Q^{-1} M^{-1} K_2 Q) \bar{\eta} + Q^{-1} M^{-1} b_3, & \Delta < h^T Q \eta. \end{cases}$$

To calculate k-th Shaw–Pierre NNM, the modal coordinate $\eta_k, \dot{\eta}_k$ are used as master coordinates. They are transformed to polar coordinates (a, φ) :

$$\eta_i(t) = a(t) \cos \varphi(t); \dot{\eta}_i(t) = -\omega_i a(t) \sin \varphi(t), \quad (3)$$

where ω_i – are natural frequencies in the first area $-\Delta \leq h^T z \leq \Delta$. According to [1], motions at the NNM are described by the following differential equations:

$$\dot{a} = -\frac{f_i}{\omega_i} \sin \varphi; \dot{\varphi} = \omega_i - \frac{f_i}{a \omega_i} \cos \varphi. \quad (4)$$

Slave coordinates $\eta_j, j \neq i$ are represented in the following form:

$$\eta_j(a, \varphi) = P_j(a, \varphi) = \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_j^{l,m} T_{l,m}(a, \varphi), \quad (5)$$

where N_a, N_φ are integers that determine number of trial functions in the expansion; $C_j^{l,m}$ are unknown coefficients; $T_{l,m}(a, \varphi) = A_l(a) \cos(m-1)\varphi$; $A_l(a)$, $l=1..N_a$ are sets of basic functions that are determined in the area $[a_0^{(1)}; a_0^{(2)}]$. The expansions (4) and (5) are substituted to the equations (2). Expressions $\eta_j, j \neq i$ and $\dot{\eta}_j, j \neq i$ can be obtained by using the expansion (5).

The equations (2) are solved using Bubnov–Galerkin method to calculate the coefficients $C_j^{l,m}$, $l=1..N_a, m=1..N_\varphi$. A residual function is obtained in the form:

$$F_j = \ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j - f_j(\bar{\eta}), \quad j=1..N, j \neq i. \quad (6)$$

According to the Bubnov–Galerkin method, it is obtained:

$$a_0^{(2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_0^{(1)}} F_j T_{l,m} da d\varphi = 0; j = 1..N, j \neq i; l = 1, \dots, N_a; m = 1, \dots, N_\varphi. \quad (7)$$

Equations (7) generate a set of $(N-1)N_a N_\varphi$ equations with respect to the unknowns $C_j^{l,m}$; $j = 1..N, j \neq i; l = 1..N_a; m = 1..N_\varphi$.

Efficiency of the technique described above is demonstrated using a 15-DOF mechanical system that describes torsion oscillations of the power transmission of internal combustion engine.

REFERENCES

1. **Avramov K. V.** Nonlinear dynamics of elastic systems / K. V. Avramov, Yu. V. Mikhlin. – Moscow – Izhevsk: RDC «Regular and chaotic dynamics», 2010. – 704 p. (in Russian).
2. **Begley C. J.** A comparison of piecewise linear and continuous approximating models / C. J. Begley, L. N. Virgin // *Mechanics Research Communications*. – 1995. – Vol. 22, 6. – P. 527–532.
3. **Chati M.** Modal analysis of a cracked beam / M. Chati, R. Rand, S. Mukherjee. // *Journal of Sound and Vibration*. – 1997. – Vol. 207(2). – P. 249–270.
4. **Jiang D.** Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems / D. Jiang, C. Pierre, S. W. Shaw // *Journal of Sound and Vibration*. – 2004. – Vol. 272. – P. 869–891.
5. **Yuichiro M.** Piecewise linear model for water column oscillator simulating reactor safety system / M. Yuichiro, Y. Morimoto, H. Madarame // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2003. – Vol. 38. – P. 213–223.
6. **Pesheck E.** A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds / E. Pesheck, C. Pierre, S. W. Shaw // *Journal of Sound and Vibration*. – 2002. – Vol. 249. – P. 971–993.
7. **Shaw S. W.** Normal modes for non-linear vibratory systems / S. W. Shaw, C. Pierre // *Journal of Sound and Vibration*. – 1993. – Vol. 164. – P. 85–124.
8. **Todd M. D.** Natural frequency considerations of an impact oscillator / M. D. Todd, L. N. Virgin // *Journal of Sound and Vibration*. – 1996. – Vol. 194(3). – P. 452–460.
9. **Vestroni F.** A perturbation method for evaluating nonlinear normal modes of a piecewise linear two-degrees-of-freedom system / F. Vestroni, A. Luongo, A. Paolone // *Nonlinear Dynamics*. – 2008. – Vol. 54. – P. 379–393.
10. **Wolf H.** Effect of smoothing piecewise-linear oscillators on their stability predictions / H. Wolf, J. Kodvanja, S. Bjelovucic-Kopilovic // *Journal of Sound and Vibration*. – 2004. – Vol. 270. – P. 917–932.

Национальный технический университет
"Харьковский политехнический институт",
Харьков, Украина
Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
Харьков, Украина

Поступила в редколлегию 30.01.2013